

Chapitre B-I

Cinématique du point.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On montrera comment se repérer dans l'espace et le temps et on définira vitesse et accélération.

On fera ensuite la distinction entre repère et référentiel.

On étudiera les lois de composition des mouvements lors d'un changement de référentiel dans le cas général et dans les cas particuliers le plus fréquemment utilisés. Cela paraîtra peut-être aride mais ce sera fondamental pour le chapitre suivant. On en profitera pour introduire la notion de pseudo-vecteur.

On définira les coordonnées polaires et les bases locales.

Enfin, l'on fera le lien entre la trajectoire, la vitesse et l'accélération et l'on introduira l'abscisse curviligne, la courbure et le rayon de courbure.

Table des matières

B-I Cinématique du point.	1
1 L'espace et le temps.	4
1.a L'espace.	4
1.b Le temps.	5
2 Vitesse et accélération.	5
3 Repères et référentiels.	6
3.a Changement de repère.	6
3.b Changement de repère indépendant du temps. Référentiel.	8
4 Composition des vitesses, des accélérations et des rotations.	9
4.a Vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.	9
4.b Composition des dérivées vectorielles.	13
4.c Composition des vitesses.	14
4.d Composition des accélérations.	19
4.e Composition des vecteurs rotation	22
5 Coordonnées polaires.	23
5.a Coordonnées cylindriques.	23
5.b Coordonnées sphériques.	25
6 Abscisse curviligne et courbure.	27
6.a Abscisse curviligne	27
6.b Vitesse.	27
6.c Accélération. Courbure.	28

1 L'espace et le temps.

1.a L'espace.

En mécanique classique, on postule que l'espace peut être décrit comme un espace affine euclidien à trois dimensions sur l'ensemble des réels, dont les éléments sont appelés *points* et notés par des majuscules romaines.

Par expérience, les notions sur les espaces affines sont un peu floues, mais au lieu de nous lancer dans une définition¹ hors de propos dans un cours de physique, contentons-nous de rappeler les points essentiels pour la pratique qu'en font physiciens et géomètres

A deux points A et B de l'espace affine, on associe un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ de l'espace vectoriel sous-jacent, appelé *déplacement* de A vers B et plus couramment *vecteur* AB . On a les propriétés suivantes :

- Aller de A à A , c'est ne pas bouger, donc quel que soit le point A , $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- Aller de A à B puis de B à A revient à ne pas bouger donc quels que soient les points A et B , on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
- Si l'on va de A à B puis de B à C , on est finalement allé de A à C , donc quels que soient les points A , B et C , on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, relation connue sous le nom de relation de CHASLES.
- En choisissant un point particulier de l'espace affine appelé *origine*, couramment noté point O , on établit une bijection entre l'espace affine et l'espace vectoriel en associant à tout point M de l'un, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de l'autre, ce qui permet de définir les *coordonnées* du point M comme les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur la base de l'espace vectoriel. Elles sont notées traditionnellement x , y et z et appelées respectivement *abscisse*, *ordonnée* et *cote*. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé *vecteur position*.
- En conséquence de quoi, si les coordonnées d'un point A , identiques aux composantes de $\overrightarrow{OA}$, sont (x_A, y_A, z_A) , celles de B (comme celles de $\overrightarrow{OB}$) sont (x_B, y_B, z_B) , alors les composantes de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, ce qui relie les composantes de $\overrightarrow{AB}$ aux coordonnées de A et B .

Pour résumer de façon parlante, un espace affine, c'est un espace vectoriel avec une origine. En fait, vous avez parfaitement la maîtrise de tout cela et vous manipulez les espaces affines comme M. Jourdain faisait de la prose.

Le fait que l'espace vectoriel sous-jacent soit euclidien permet de définir le produit scalaire de déplacements et surtout la norme d'un déplacement. A partir de là, on définira

1. $\mathcal{A}$ est un espace affine associé à l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, s'il existe une application φ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ sur $\mathcal{E}$ telle que :

i) $\forall A \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{A} \quad \forall C \in \mathcal{A} \quad \varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$

ii) $\forall A \in \mathcal{A} \quad \forall V \in \mathcal{E} \quad \exists B! \in \mathcal{A} \quad \varphi(A, B) = V$

Du point i), avec $A = B$ on tire : $\forall A \in \mathcal{A} \quad \varphi(A, A) = 0_{\mathcal{E}}$

et avec $C = A$ on tire : $\forall A \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{A} \quad \varphi(B, A) = -\varphi(A, B)$

Du point ii) avec $O \in \mathcal{A}$, on tire que l'application f_O de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$ définie par :

$\forall M \in \mathcal{A} \quad f_O(M) = \varphi(O, M)$ est une bijection.

la distance² $d(A, B)$ entre deux points A et B de l'espace affine par $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Bien sûr, on choisira systématiquement, dans l'espace vectoriel, une base orthonormée de trois vecteurs notés traditionnellement soit $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, soit $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$, soit encore³ (c'est plus récent) $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$. Dans ce cours, on utilisera la première version.

Le choix de cette base vectorielle et d'une origine O de l'espace affine définit un *repère*.

1.b Le temps.

En mécanique classique, on postule que le temps peut être décrit comme un espace affine euclidien à une dimension sur l'ensemble des réels, dont les éléments sont appelés *instants* ou *dates*. A un couple de deux instants, on associe un vecteur de $\mathbb{R}$ (considéré comme espace vectoriel à une dimension), appelé *durée* ou *intervalle de temps*.

On choisit un instant initial, noté traditionnellement « l'instant $t = 0$ », tout instant sera repéré par la durée écoulée depuis l'instant initial, un nombre réel donc, noté t . Et la durée écoulée entre un instant t_1 et un instant t_2 est $t_2 - t_1$.

On postule aussi que le temps ne peut être parcouru, à la différence de l'espace que dans un seul sens, le sens croissant, c'est la célèbre « flèche du temps ». Quelque désagréable que cela puisse être psychologiquement⁴, sans cela pas de causalité possible, car la cause précède l'effet, donc pas de physique.

Il est dès lors impossible de comparer de visu les durées de deux expériences menées à des dates différentes. On doit donc admettre et postuler que des expériences de mêmes conditions initiales ont la même durée, ce qui permettra de gérer la physique par des équations différentielles dont la variable est le temps. Ce postulat donne donc le seul moyen de mesurer le temps : trouver un dispositif avec un fonctionnement cyclique de sorte qu'à la fin d'un cycle, on soit revenu dans les mêmes conditions et donc que chaque cycle a la même durée qui pourra servir d'unité de temps.

2 Vitesse et accélération.

Imaginons un point M mobile.

Stop! Ce qui précède n'a aucun sens! Un point tout seul, au milieu de nulle part, comment peut-on savoir s'il est mobile? On ne peut se déplacer que par rapport à ce qui nous entoure, par rapport à un décor en somme; tout déplacement est relatif. Le décor

2. Il est aisé de vérifier que c'est une distance au sens mathématique du terme, c'est à dire que l'on a $d(A, A) = 0$, $d(A, B) = d(B, A)$ et $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ (inégalité triangulaire); c'est une simple conséquence des propriétés de la norme dans l'espace vectoriel.

3. Ça permet d'éviter de payer un typographe de haut niveau, car c'est plus facile à réaliser.

4. « Où donc, où donc, avez-vous fui, jours dorés de ma jeunesse? » (Alexandre POUCHKINE dans *Eugène Onéguine*).

du mouvement sera remplacé par l'abstraction d'un repère qui lui est solidaire. Reprenons donc.

Imaginons un point mobile M par rapport à un repère $Oxyz$, noté par la lettre $\mathcal{R}$ dans ce qui suit. Ses coordonnées dépendent donc du temps, notons-les $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

On appelle vitesse de M par rapport au repère $\mathcal{R}$ (ou dans le repère $\mathcal{R}$), la dérivée temporelle du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, en considérant que les vecteurs de la base du repère sont indépendants du temps. On note ainsi cette vitesse : $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}(t)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}(t) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t) \overrightarrow{e}_x + y(t) \overrightarrow{e}_y + z(t) \overrightarrow{e}_z] \\ \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}}(t) &= \frac{dx}{dt} \overrightarrow{e}_x + \frac{dy}{dt} \overrightarrow{e}_y + \frac{dz}{dt} \overrightarrow{e}_z\end{aligned}$$

On utilisera la notation très répandue de la dérivée temporelle d'une fonction par un point suscrit ($\dot{x}$ pour $\frac{dx}{dt}$). En allégeant un peu la notation de la vitesse et en mentionnant la notation vectorielle (en indiquant le repère en indice), on écrit donc :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x} \overrightarrow{e}_x + \dot{y} \overrightarrow{e}_y + \dot{z} \overrightarrow{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{Oxyz}$$

On appelle accélération de M par rapport au repère $\mathcal{R}$ (ou dans le repère $\mathcal{R}$), la dérivée temporelle seconde du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, en considérant que les vecteurs de la base du repère sont indépendants du temps. On note ainsi cette accélération $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}}$ ou $\overrightarrow{\gamma}_{M/\mathcal{R}}$. On note la dérivée seconde temporelle par deux points, soit un tréma. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} &= \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [x(t) \overrightarrow{e}_x + y(t) \overrightarrow{e}_y + z(t) \overrightarrow{e}_z] \\ \overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}}(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} \overrightarrow{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \overrightarrow{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \overrightarrow{e}_z = \ddot{x} \overrightarrow{e}_x + \ddot{y} \overrightarrow{e}_y + \ddot{z} \overrightarrow{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{Oxyz}\end{aligned}$$

Le chapitre qui suit (B-II Dynamique du point) montrera que la dynamique n'a besoin que des dérivées temporelles première et seconde.

3 Repères et référentiels.

3.a Changement de repère.

Rien de bien original à dire sur les changements de repère de l'espace à un instant donné, cela relève de l'analyse vectorielle avec une petite complication pour un espace

affine. Rappelons brièvement.

Soit un premier repère d'origine O et de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ et un second d'origine O' et de vecteurs unitaires $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ et $\vec{e}_{z'}$. Pour tout point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans le premier repère et (x', y', z') dans le second, l'on peut écrire, en appelant $(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$ les coordonnées de O' dans le premier repère, (a_{xx}, a_{yx}, a_{zx}) les composantes de $\vec{e}_{x'}$ dans la base du premier repère (et analogues pour $\vec{e}_{y'}$ et $\vec{e}_{z'}$) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z = x_{O'} \vec{e}_x + y_{O'} \vec{e}_y + z_{O'} \vec{e}_z + x' \vec{e}_{x'} + y' \vec{e}_{y'} + z' \vec{e}_{z'}$$

ce qui conduit aisément, on vous fait grâce des calculs, au résultat suivant mis sous forme vectorielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{Oxyz} = \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{pmatrix}_{Oxyz} + \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{xz} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{Ox'y'z'}$$

ce qui fait apparaître une matrice de passage dont il faut retenir la propriété essentielle avec deux bases orthonormées, car elle simplifie les calculs, que son inverse (qui apparaît dans l'expression de coordonnées dans le second référentiel en fonction de celles dans le premier) est sa transposée. Appliquons cette propriété en multipliant la relation précédente à gauche par la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{xz} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{Oxyz} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{xz} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{pmatrix}_{Oxyz} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{Ox'y'z'}$$

où le premier terme du second membre réalise le changement de base pour le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ et donne donc, au signe près, les coordonnées de O dans le second repère, c'est un moyen de les calculer ; on peut donc réécrire :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{Ox'y'z'} = \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{pmatrix}_{Ox'y'z'} + \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{xz} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{Oxyz}$$

résultat attendu car parfaitement symétrique de l'autre.

Pour le temps, puisque l'espace vectoriel sous-jacent est à une dimension et donc le vecteur unitaire dans le sens de la flèche du temps est unique, on ne peut changer que l'origine, ce qui est à la portée d'un enfant de cinq ans⁵

5. « Un enfant de cinq ans comprendrait cela. Allez me chercher un enfant de cinq ans ! » Groucho MARX dans *La Soupe au Canard*

3.b Changement de repère indépendant du temps. Référentiel.

Soit un repère $\mathcal{R} = Oxyz$ et un second repère $\mathcal{R}' = Ox'y'z'$ fixe par rapport au premier, c'est à dire que O' a une vitesse nulle par rapport à $\mathcal{R}$ et que les vecteurs de $\mathcal{R}'$ ont des composantes dans $\mathcal{R}$ fixes, donc que la matrice de passage entre les deux bases vectorielles est indépendante du temps.

Imaginons un point M mobile par rapport aux deux repères, de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$ et (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$. Ses vitesses par rapport aux deux repères sont :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{M/\mathcal{R}} &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \\ \vec{v}'_{M/\mathcal{R}'} &= \begin{pmatrix} v'_{x'} \\ v'_{y'} \\ v'_{z'} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \dot{x}' \vec{e}_{x'} + \dot{y}' \vec{e}_{y'} + \dot{z}' \vec{e}_{z'} = \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}\end{aligned}$$

Dérivons maintenant, par rapport au temps, la relation qui lie (x, y, z) et (x', y', z') en tenant compte que la matrice de passage est invariable ainsi que les coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$, on y désignera par $(\vec{v}_{M/\mathcal{R}})_{\mathcal{R}}$ la vitesse par rapport à $\mathcal{R}$ exprimée par ses composantes dans la base de $\mathcal{R}$ et autres notations analogues.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} &= \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \\ z_{O'} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \\ (\vec{v}_{M/\mathcal{R}})_{\mathcal{R}} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} (\vec{v}'_{M/\mathcal{R}'})_{\mathcal{R}'}\end{aligned}$$

Or $(\vec{v}'_{M/\mathcal{R}'})_{\mathcal{R}'}$, multiplié à gauche par la matrice de passage donne les composantes de la vitesse par rapport à $\mathcal{R}'$ par ses composantes dans $\mathcal{R}$, d'où :

$$(\vec{v}_{M/\mathcal{R}})_{\mathcal{R}} = (\vec{v}'_{M/\mathcal{R}'})_{\mathcal{R}}$$

Les deux vecteurs ayant les mêmes composantes dans la même base sont égaux. On s'aperçoit ainsi que les deux vitesses par rapport au deux repères sont égales et bien sûr, il en est de même pour les deux accélérations, donc que remplacer un repère par un autre, par rapport auquel il est immobile, ne change rien aux vitesses ni aux accélérations, donc que les deux repères sont équivalents en ce qui concerne la cinématique.

Cela aura pour conséquence que deux repères fixes l'un par rapport à l'autre sont parfaitement équivalents. Un ensemble des repères fixes l'un par rapport à l'autre ne définira

fondamentalement qu'une unique façon de définir un même «décor» par rapport on étudie le déplacement d'un point M . Cet ensemble⁶ sera appelé *référentiel* et sera en pratique décrit par l'un quelconque de ses repères-éléments.

4 Composition des vitesses, des accélérations et des rotations.

4.a Vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.

• Vecteur rotation.

Soit un référentiel $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$, que l'on appellera par la suite *référentiel relatif*, en mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R} = Oxyz$, que l'on appellera par la suite *référentiel absolu*.

Nous aurons besoin pour la suite de la dérivée temporelle des vecteurs unitaires de $\mathcal{R}'$ considérés dans leur mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ (par rapport à $\mathcal{R}'$, ce serait stupide car ils y sont fixes ! Inutile donc de noter $\mathcal{R}$ en indice.) ; ces dérivées seront données par leur composantes dans la base vectorielle orthonormée de $\mathcal{R}'$, car c'est ce qui permettra de dire des choses intéressantes, notons donc :

$$\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = w_{xx} \vec{e}_{x'} + w_{yx} \vec{e}_{y'} + w_{zx} \vec{e}_{z'}$$

$$\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = w_{xy} \vec{e}_{x'} + w_{yy} \vec{e}_{y'} + w_{zy} \vec{e}_{z'}$$

$$\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = w_{xz} \vec{e}_{x'} + w_{yz} \vec{e}_{y'} + w_{zz} \vec{e}_{z'}$$

Or $\vec{e}_{x'}$ est unitaire, donc $\vec{e}_{x'}^2 = 1$ et, en dérivant par rapport au temps, $2\vec{e}_{x'} \cdot \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = 0$; en multipliant la première des expressions ci-dessus par $\vec{e}_{x'}$, on en déduit que $w_{xx} = 0$ et de même $w_{yy} = 0$ et $w_{zz} = 0$.

Or $\vec{e}_{x'}$ et $\vec{e}_{y'}$ sont orthogonaux donc $\vec{e}_{x'} \cdot \vec{e}_{y'} = 0$ et, en dérivant par rapport au temps, $\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \cdot \vec{e}_{y'} + \vec{e}_{x'} \cdot \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = 0$, et en utilisant les expressions ci-dessus, $w_{yx} + w_{xy} = 0$ et de même $w_{zx} + w_{xz} = 0$ et $w_{yz} + w_{zy} = 0$. On peut donc noter $\Omega_1 = w_{zy} = -w_{yz}$, $\Omega_2 = w_{xz} = -w_{zx}$

6. On appelle en mathématique relation d'équivalence un relation binaire, notée par exemple $\equiv$, telle que :

i) $\forall a \ a \equiv a$, ii) $\forall a \ \forall b \ (a \equiv b) \Rightarrow (b \equiv a)$ et iii) $\forall a \ \forall b \ \forall c \ (a \equiv b \text{ et } b \equiv c) \Rightarrow (a \equiv c)$

et l'on appelle classe d'équivalence de a , notée $\bar{a}$, l'ensemble $\bar{a} = \{x | x \equiv a\}$

Un référentiel est une classe d'équivalence de la relation « être fixe par rapport à » entre repères.

et $\Omega_3 = w_{yx} = -w_{xy}$ et les relations précédentes se réécrivent ainsi :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} = \Omega_3 \vec{e}_{y'} - \Omega_2 \vec{e}_{z'} \\ \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} = \Omega_1 \vec{e}_{z'} - \Omega_3 \vec{e}_{x'} \\ \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = \Omega_2 \vec{e}_{x'} - \Omega_1 \vec{e}_{y'} \end{cases}$$

Soit un vecteur $\vec{V}$ constant dans un référentiel relatif $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$ et projetons-le ainsi $\vec{V} = V_{x'} \vec{e}_{x'} + V_{y'} \vec{e}_{y'} + V_{z'} \vec{e}_{z'}$. Sa dérivée par rapport au référentiel relatif est bien sûr nulle, sa dérivée par rapport au référentiel absolu, est, en terminant le calcul sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= V_{x'} \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + V_{y'} \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + V_{z'} \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} \\ \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= V_{x'} (\Omega_3 \vec{e}_{y'} - \Omega_2 \vec{e}_{z'}) + V_{y'} (\Omega_1 \vec{e}_{z'} - \Omega_3 \vec{e}_{x'}) + V_{z'} (\Omega_2 \vec{e}_{x'} - \Omega_1 \vec{e}_{y'}) \\ \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \begin{pmatrix} \Omega_2 V_{z'} - \Omega_3 V_{y'} \\ \Omega_3 V_{x'} - \Omega_1 V_{z'} \\ \Omega_1 V_{y'} - \Omega_2 V_{x'} \end{pmatrix} \\ \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} (\vec{V}) \end{aligned}$$

Remarque : ceci est valable pour les vecteurs de la base relative, par exemple :

$$\left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_3 \\ -\Omega_2 \end{pmatrix} = \Omega_3 \vec{e}_{y'} - \Omega_2 \vec{e}_{z'}$$

qui est bien la notation dont on est parti.

Nous avons donc fait apparaître une matrice antisymétrique qui lie un vecteur fixe dans le référentiel relatif et sa dérivée dans le référentiel absolu. Ce n'est pas très difficile mais lourd à manipuler et encombrant à l'écriture.

Or sur $\mathbb{R}$, on définit le produit vectoriel⁷ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ par :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

7. Les principales propriétés du produit vectoriel sont les suivantes :

On peut donc écrire formellement, ce qui remplace avantageusement la notation matricielle :

$$\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \Omega_2 V_{z'} - \Omega_3 V_{y'} \\ \Omega_3 V_{x'} - \Omega_1 V_{z'} \\ \Omega_1 V_{y'} - \Omega_2 V_{x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{pmatrix} = \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$$

Par définition, le vecteur $\vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{e}_{x'} + \Omega_2 \vec{e}_{y'} + \Omega_3 \vec{e}_{z'}$ est appelé vecteur rotation (parce que les vecteurs de la base changent de direction) de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Notons qu'il dépend a priori du temps.

Pour un vecteur fixe du référentiel relatif, on a donc $\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$

• Pseudo-vecteurs.

Imaginons que, dans le référentiel $\mathcal{R}'$ décrit par le repère de base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$, nous remplaçons ce repère par le repère de base $\mathcal{B}_2 = (\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, -\vec{e}_{z'})$; le second repère est fixe par rapport au premier, on n'a donc pas changé de référentiel relatif qui tourne de la même façon par rapport au référentiel absolu.

Rappelons, en précisant les notations pour ce nouveau contexte :

$$\left(\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \right)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \left(\vec{V} \right)_{\mathcal{B}_1}$$

Le changement de base fait intervenir une matrice de passage et l'on a :

$$\left(\vec{V} \right)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\vec{V} \right)_{\mathcal{B}_2}$$

et donc, par dérivation temporelle :

$$\left(\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \right)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \right)_{\mathcal{B}_2}$$

-
- il est bilinéaire : d'une part $(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) \wedge \vec{b} = \lambda_1 (\vec{a}_1 \wedge \vec{b}) + \lambda_2 (\vec{a}_2 \wedge \vec{b})$ et d'autre part $\vec{a} \wedge (\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2) = \lambda_1 (\vec{a} \wedge \vec{b}_1) + \lambda_2 (\vec{a} \wedge \vec{b}_2)$
 - il est antisymétrique $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$
 - $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est nul si et seulement si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles
 - $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$
 - $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| |\sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))|$, soit aussi l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

En reportant ces deux dernières relations dans celle d'avant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \right)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (\vec{V})_{\mathcal{B}_2}$$

Soit en multipliant à gauche par l'inverse de la matrice de passage (qui lui est en fait identique dans ce cas), on a :

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \right)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (\vec{V})_{\mathcal{B}_2}$$

On effectue les produits de matrices, puis faisons apparaître un produit vectoriel et l'on arrive à :

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \right)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} (\vec{V})_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -\Omega_1 \\ -\Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \wedge (\vec{V})_{\mathcal{B}_2}$$

où les composantes du vecteur rotation ont été calculées de façon que le produit vectoriel et le produit matriciel aient le même résultat ; on vous fait grâce du calcul explicite. On constate que dans la base $\mathcal{B}_2$ elles sont $(-\Omega_1, -\Omega_2, \Omega_3)$ et donc que le vecteur rotation est :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_2} = (-\Omega_1) (\vec{e}_{x'}) + (-\Omega_2) (\vec{e}_{y'}) + (\Omega_3) (-\vec{e}_{z'}) = -(\Omega_1 \vec{e}_{x'} + \Omega_2 \vec{e}_{y'} + \Omega_3 \vec{e}_{z'}) = -\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_1}$$

ce qui n'est pas normal pour un vecteur ; dans un changement de base, il change certes de composantes mais devrait rester identique à lui-même.

Ceci est dû au fait que le produit vectoriel est une invention pour remplacer un calcul matriciel par un calcul vectoriel plus simple. Cette facilité se paye de la complication qu'on vient de mettre à jour. Pour bien insister sur le fait qu'un vecteur fictif remplace par l'intermédiaire d'un produit vectoriel une matrice antisymétrique, on le qualifie de *pseudo-vecteur* ou *vecteur axial*. On peut insister en notant le vecteur avec une flèche arrondie⁸ soit $\vec{\Omega}$ au lieu de $\vec{\Omega}$. Je le ferai dans ce chapitre et m'en abstiendrai dans les autres.

• Bases directes et indirectes.

Supposons que le vecteur rotation soit $\vec{\Omega}$ dans une base $Oxyz$ qualifiée arbitrairement de *directe* et choisissons deux vecteurs unitaires orthogonaux, $\vec{e}_{x'}$ et $\vec{e}_{y'}$, l'on peut alors créer deux bases orthonormées $Ox'y'z'$, l'une avec $\vec{e}_{z'} = \vec{e}_{x'} \wedge \vec{e}_{y'}$ et l'autre avec $\vec{e}_{z'} = -\vec{e}_{x'} \wedge \vec{e}_{y'}$.

8. en fait arrondie dans l'autre sens, mais ce n'est pas prévu par l'éditeur de textes L^AT_EX.

Dans la première le vecteur rotation sera ${}^9\hat{\Omega}$ et elle sera qualifiée de *directe* ; dans la seconde le vecteur rotation sera $-\hat{\Omega}$ et elle sera qualifiée de *indirecte*.

Par prudence et pour éviter les complications, on travaillera systématiquement avec des bases directes.

La convention choisie est la suivante, présentée de façons équivalentes :

- On se place dos à Oz de façon qu' Oz aille des pieds à la tête et l'on regarde dans l'axe de la bissectrice de Ox et Oy , dans le quadrant $x > 0$ et $y > 0$. Si Ox est à droite et Oy à gauche, la base est directe (méthode du bonhomme d'AMPÈRE).
- On se contorsionne le pouce, l'index et le majeur de la main droite de façon à les placer deux à deux perpendiculaires. Si l'on peut placer le pouce parallèle et de même sens que Ox , l'index parallèle et de même sens que Oy et le majeur parallèle et de même sens que Oz , alors la base est directe (méthodes de trois doigts de la main droite).
- On observe le plan Oxy de dessus, c'est à dire en se plaçant dans le demi-espace $z > 0$ et en regardant vers le bas, dans le sens des z décroissant puis on imagine une aiguille de centre O tournant de Ox vers Oy , si elle tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, alors la base est directe.

4.b Composition des dérivées vectorielles.

Soit un vecteur $\vec{V}(t)$ dépendant du temps, étudié à la fois dans un référentiel absolu $\mathcal{R} = Oxyz$ et dans un référentiel relatif $\mathcal{R}' = O'x'y'z'$; le mouvement du second par rapport au premier est qualifié de *mouvement d'entraînement* et est caractérisé par le pseudo-vecteur rotation noté $\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ ou $\hat{\Omega}_{\text{entr.}}$.

Par définition, la dérivée du vecteur par rapport à l'un des référentiels est sa dérivée calculée en considérant les vecteurs de la base du référentiel comme indépendants du temps et se calcule naturellement à partir des composantes du vecteur dans cette base. Ces dérivées seront bien sûr qualifiées d'absolue et de relative. Notons :

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z = V_{x'} \vec{e}_{x'} + V_{y'} \vec{e}_{y'} + V_{z'} \vec{e}_{z'}$$

On utilise la première expression pour calculer la dérivée absolue et la seconde pour la dérivée relative, d'où :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\text{abs.}} = \dot{V}_x \vec{e}_x + \dot{V}_y \vec{e}_y + \dot{V}_z \vec{e}_z \\ \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} &= \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\text{rel.}} = \dot{V}_{x'} \vec{e}_{x'} + \dot{V}_{y'} \vec{e}_{y'} + \dot{V}_{z'} \vec{e}_{z'} \end{aligned}$$

9. Je ne le démontre pas, il y a déjà eu pas mal de calculs indigestes jusqu'ici.

Certes, mais quel est le lien entre ces deux dérivées ? Partons de l'idée, a priori surprenante, consistant à projeter le vecteur dans la base relative et d'en calculer la dérivée absolue en considérant les vecteurs de la base relative comme mobiles dans la base absolue, soit :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= V_{x'} \vec{e}_{x'} + V_{y'} \vec{e}_{y'} + V_{z'} \vec{e}_{z'} \\ \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \dot{V}_{x'} \vec{e}_{x'} + \dot{V}_{y'} \vec{e}_{y'} + \dot{V}_{z'} \vec{e}_{z'} + V_{x'} \left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\text{abs.}} + V_{y'} \left. \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} \right|_{\text{abs.}} + V_{z'} \left. \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} \right|_{\text{abs.}}\end{aligned}$$

Dans les trois premiers termes l'on reconnaît la dérivée relative ; dans les trois derniers reportons les expressions des dérivées des vecteurs unitaires établies plus haut.

$$\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + V_{x'} (\Omega_3 \vec{e}_{y'} - \Omega_2 \vec{e}_{z'}) + V_{y'} (\Omega_1 \vec{e}_{z'} - \Omega_3 \vec{e}_{x'}) + V_{z'} (\Omega_2 \vec{e}_{x'} - \Omega_1 \vec{e}_{y'})$$

Passons en notation matricielle et faisons apparaître un produit vectoriel (on reconnaît le même type de calcul qu'un peu plus haut).

$$\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \Omega_2 V_{z'} - \Omega_3 V_{y'} \\ \Omega_3 V_{x'} - \Omega_1 V_{z'} \\ \Omega_1 V_{y'} - \Omega_2 V_{x'} \end{pmatrix} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{pmatrix} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}$$

d'où le théorème (en deux versions de vocabulaires différents dans les indices) :

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}} \quad \boxed{\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\text{abs.}} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\text{rel.}} + \hat{\Omega}_{\text{entr.}} \wedge \vec{V}}$$

4.c Composition des vitesses.

• Loi de composition.

Pour calculer la vitesse d'un point $M(t)$, par rapport au paragraphe précédent, il y a une difficulté supplémentaire, mais mineure : le vecteur à dériver est le vecteur position qui n'est que la représentation commode de la position, élément d'un espace affine et non vectoriel ; dans un changement de référentiel, non seulement il faut tenir compte du changement de base vectorielle mais aussi du changement d'origine. La vitesse absolue et la vitesse relative sont, par définition :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\text{abs.}}(M) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \vec{v}_{\text{rel.}}(M) = \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$$

Pour obtenir une relation entre ces deux vitesses, utilisons la relation de CHASLES, calculons la dérivée temporelle dans $Oxyz$, reconnaissons deux vitesses dans ce référentiel, utilisons le théorème établi ci-dessus et reconnaissons enfin une vitesse dans $O'x'y'z'$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\ \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) &= \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) &= \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\end{aligned}$$

d'où le théorème :

$$\boxed{\vec{v}_{\text{abs.}}(M) = \vec{v}_{\text{rel.}}(M) + \vec{v}_{\text{entr.}}(M)}$$

en introduisant une vitesse d'entraînement définie par :

$$\boxed{\vec{v}_{\text{entr.}}(M) = \vec{v}_{\text{abs.}}(O') + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

• Point coïncident.

La formule donnant la vitesse d'entraînement a le pouvoir rassurant des formules mathématiques mais nous sommes ici pour lui donner du sens, du sens physique.

Remarquons que pour un point M fixe dans $\mathcal{R}'$, donc de vitesse relative nulle, la vitesse d'entraînement et la vitesse absolue sont égales.

Prenons maintenant un point M mobile dans $\mathcal{R}'$, dont nous voulons étudier les vitesses à un instant t ; à ce même instant, il est confondu avec un point M^* du référentiel $\mathcal{R}'$ que l'on appelle *point coïncident*. Si l'on remonte un peu le temps et que l'on relance le «film» d'un peu avant l'instant t à un peu après t , le point M mobile dans $\mathcal{R}'$ et le point M^* fixe dans $\mathcal{R}'$, vont à la rencontre l'un de l'autre, se confondent à l'instant t puis se séparent. D'après la remarque ci-dessus, la vitesse absolue de M^* à l'instant t n'est rien d'autre que la vitesse d'entraînement de M à ce même instant.

Pour terminer, comprenons bien qu'un changement de référentiel est un choix délibéré du physicien ; s'il l'effectue, ce n'est pas pour se pourrir la vie mais pour se la simplifier ; en pratique donc, dans la quasi-totalité des cas, il se place dans l'un des deux cas suivants, où la notion de point coïncident est plus simple d'emploi que la formule ci-dessus, soit

$$\vec{v}_{\text{entr.}}(M) = \vec{v}_{\text{abs.}}(O') + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

• **Le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.**

On dit que $\mathcal{R}'$ a un mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$ si les vecteurs de base de $\mathcal{R}'$ sont constants dans $\mathcal{R}$; en pratique alors, l'on prend $\vec{e}_{x'} = \vec{e}_x$, $\vec{e}_{y'} = \vec{e}_y$ et $\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z$ et l'on a donc :

$$\left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

et aussi, par essence :

$$\left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

Si l'on applique à ces trois vecteurs la formule $\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}$, l'on tire :

$$\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{x'} = \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{y'} = \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{z'} = \vec{0}$$

relations qui ne sont possibles simultanément que si $\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$. En fait, nous venons de monter mathématiquement une évidence physique : un référentiel qui se déplace avec des axes dont les directions restent fixes ne tourne pas.

La formule qui donne l'expression de la vitesse d'entraînement devient alors :

$$\vec{v}_{\text{entr.}}(M) = \vec{v}_{\text{abs.}}(O') + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_{\text{abs.}}(O')$$

dont le sens physique est simple :

Quand le référentiel relatif a un mouvement de translation par rapport au référentiel absolu, tous les points ont la même vitesse d'entraînement qui est la vitesse absolue de l'origine du référentiel relatif ; inutile dans ce cas de s'intéresser au point coïncident.

• **Le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation autour d'un axe.**

Supposons que le référentiel $\mathcal{R}'$ tourne, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, autour d'un axe. Comme dans chaque référentiel, on peut se choisir un repère (voir paragraphe 3 p. 6 la distinction entre repère et référentiel), faisons-le en sorte de nous simplifier la vie ; l'origine sera commune, sur l'axe qui sera choisi à la fois comme axe Oz dans $\mathcal{R}$ et comme axe Oz' dans $\mathcal{R}'$ et la rotation sera décrite par l'angle $\varphi(t)$ entre Ox et Ox' (égal à celui entre Oy et Oy') comme sur la figure 1 p.17 (abstraction faite pour l'instant des points M , H et P et tout ce qui y est lié).

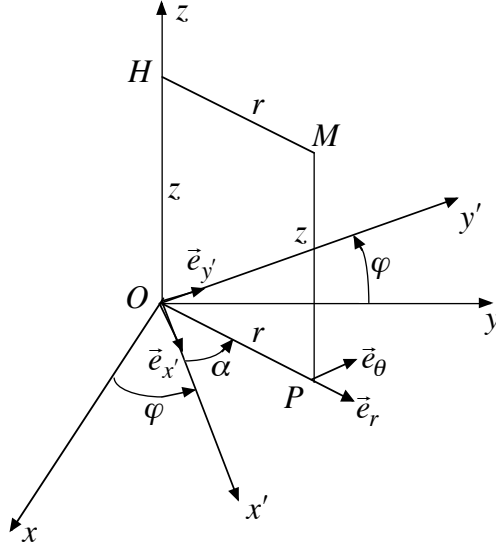


FIGURE 1 – Référentiel relatif en rotation.

La première chose à faire est d'identifier le vecteur rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Comme par construction, $\vec{e}_{z'}$ est confondu avec $\vec{e}_z$ et a donc une dérivée temporelle nulle dans $\mathcal{R}$, on a $\left. \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ et bien sûr aussi et par essence, on a $\left. \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$; si l'on applique à $\vec{e}_{z'}$ la formule $\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}$, l'on tire :

$$\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{z'} = \vec{0}$$

et l'on apprend ainsi que $\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est parallèle à Oz ; notons $\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \vec{e}_z$ et puisque le vecteur est en fait un pseudo-vecteur, le scalaire $\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est un pseudo-scalaire qui change de signe dans une base indirecte.

Par ailleurs, en projetant $\vec{e}_{x'}$ dans la base absolue, l'on tire, grâce à la formule de dérivation des fonctions composées :

$$\begin{aligned} \vec{e}_{x'} &= \cos[\varphi(t)] \vec{e}_x + \sin[\varphi(t)] \vec{e}_y \\ \left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= -\sin[\varphi(t)] \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_x + \cos[\varphi(t)] \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_y \\ \left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\varphi} \left[\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_x + \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_y \right] \end{aligned}$$

Dans la dernière expression, l'on reconnaît un vecteur unitaire faisant l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$ avec Ox , c'est donc $\vec{e}_{y'}$ dont on sait qu'il est égal à $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_{x'}$. Finalement :

$$\left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \vec{e}_{y'} = \dot{\varphi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{x'}$$

Puisque par essence, on a $\left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$; si l'on applique à $\vec{e}_{x'}$ la formule de dérivation vectorielle $\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{V}$, on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}_{x'} \\ \left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{x'} \end{aligned}$$

Par comparaison des deux dernières conclusions, on en déduit que :

$$\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

Le vecteur rotation est parallèle à l'axe de rotation et sa mesure est la vitesse angulaire de rotation.

Au passage, nous avons démontré un théorème important, exposé ci-dessous de façon plus générale :

La dérivée temporelle d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ du plan Oxy faisant l'angle θ avec Ox est le produit de la dérivée temporelle $\dot{\theta}$ de l'angle par le vecteur unitaire $\vec{v}$ de Oxy directement perpendiculaire à $\vec{u}$ c'est-à-dire tel que l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ soit $\frac{\pi}{2}$, soit $\vec{u} = \dot{\theta} \vec{v}$

En particulier, l'on a $\left. \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\dot{\varphi} \left. \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$

Maintenant que le vecteur rotation est déterminé, passons à l'étude de la vitesse d'entraînement d'un point M dont les projections sur l'axe Oz et le plan Oxy sont notées H et P . Sur la figure 1 p.17, supposée correspondre à l'instant t , le point coïncident M^* est confondu avec M et puisqu'il est lié au référentiel tournant, il décrit un cercle dans un plan parallèle à Oxy de centre H et de rayon $\|\vec{HM}\|$. Si l'on note $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire de $\vec{HM} = \vec{OP}$, on a $\vec{OM} = \vec{OH} + r \vec{e}_r$ avec $\vec{OH}$ et r constants ; par ailleurs le vecteur $\vec{e}_r$ fait avec Ox' un angle α constant et donc avec Ox l'angle $\theta = \varphi(t) + \alpha$. Insistons sur le fait que l'on parle ici du point coïncident, ce qui explique que l'on considère r et α comme constants. En utilisant le théorème encadré ci-dessus :

$$\vec{v}_{\text{entr.}} = \left. \frac{d(\vec{OH} + r \vec{e}_r)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = r \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = r \dot{\varphi} \vec{e}_{\theta}$$

où $\vec{e}_{\theta}$ est le vecteur unitaire *orthoradial* directement perpendiculaire au vecteur unitaire *radial* $\vec{e}_r$ dans le plan Oxy .

Retenons donc une fois pour toute que :

Dans le contexte d'un référentiel relatif tournant par rapport au référentiel absolu autour de l'axe Oz , la vitesse d'entraînement d'un point M est orthoradiale, avec comme mesure le produit de la distance à l'axe par la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement.

• **Remarque sur les solides.**

Il y a d'énormes ressemblances entre l'étude des vitesses d'entraînement et l'étude des vitesses des points d'un solide (voir chapitre B-VIII : « de la dynamique des systèmes à celle des solides ») et ce n'est pas par hasard : un solide est un ensemble de points à distance fixe les uns des autres et il en est de même pour les points à coordonnées fixes dans le référentiel relatif. Donc si vous maîtrisez ce qui précède, vous maîtriserez le champ des vitesses dans un solide.

4.d Composition des accélérations.

C'est facile, à condition d'être très méticuleux sur les notations. L'on part de $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$ et l'on dérive par rapport au temps dans le référentiel absolu $\mathcal{R}$ puis on utilise à l'envi la formule de dérivation vectorielle. Roulons, mais à chaque étape, on simplifie la notation avant d'aborder la suivante (on note $\vec{a}$ les accélérations) :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) &= \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ \frac{d(\vec{v}_{\mathcal{R}}(M))}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} &= \dots \\ \dots &= \frac{d(\vec{v}_{\mathcal{R}}(O'))}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d(\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M))}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d(\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \frac{d(\overrightarrow{O'M})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \\ \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) &= \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \frac{d(\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M))}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} + \dot{\hat{\Omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \frac{d(\overrightarrow{O'M})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \\ \vec{a}_{\mathcal{R}}(M) &= \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \left[\frac{d(\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M))}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) \right] + \dots \\ &\quad \dots \dot{\hat{\Omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left[\frac{d(\overrightarrow{O'M})}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \dot{\hat{\Omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \dots \\ \dots \dot{\hat{\Omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left[\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + 2\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \dots \\ \dots \dot{\hat{\Omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right)\end{aligned}$$

Reste à donner du sens physique à tout cela. $\vec{a}_{\mathcal{R}}(M)$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M)$ sont bien évidemment l'*accélération absolue* et l'*accélération relative*. Dans le cas particulier où M est fixe dans le référentiel relatif (en fait, c'est du point coïncident dont on parle), $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M)$ sont nuls et la formule ci-dessus donne l'accélération du point coïncident que l'on appellera par analogie *accélération d'entraînement*, soit :

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M^*) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \dot{\hat{\Omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right)$$

si l'on observe bien, il reste le terme $2\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$, soit encore $2\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\text{rel.}}$ à ne pas avoir été mentionné ; on l'appelle *accélération complémentaire* ou encore accélération de CORIOLIS. Résumons :

$\begin{aligned}\vec{a}_{\text{abs.}}(M) &= \vec{a}_{\text{rel.}}(M) + \vec{a}_{\text{entr.}}(M) + \vec{a}_{\text{comp.}}(M) \\ \text{avec } \vec{a}_{\text{entr.}}(M) &= \vec{a}_{\text{abs.}}(O') + \dot{\hat{\Omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \\ \text{et } \vec{a}_{\text{comp.}}(M) &= 2\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\text{rel.}}(M)\end{aligned}$

La première ligne est à savoir par cœur, la dernière donne un moyen simple de calculer l'accélération complémentaire, la deuxième, par contre, donne traditionnellement lieu à deux pages de calculs, trois erreurs et un résultat faux et encore, si l'on a réussi à retrouver correctement la formule dans sa mémoire, sinon c'est encore pire. Retenons plutôt que l'accélération d'entraînement, c'est l'accélération du point coïncident, soit :

$\begin{aligned}\vec{a}_{\text{abs.}}(M) &= \vec{a}_{\text{rel.}}(M) + \vec{a}_{\text{entr.}}(M) + \vec{a}_{\text{comp.}}(M) \\ \text{avec } \vec{a}_{\text{entr.}}(M) &= \vec{a}_{\text{abs.}}(M^*) \text{ où } M^* \text{ est le point coïncident} \\ \text{et } \vec{a}_{\text{comp.}}(M) &= 2\hat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\text{rel.}}(M)\end{aligned}$
--

Voyons ce que cela donne dans les cas particuliers étudiés pour les vitesses (paragraphe 4.c débutant p. 14).

• **Le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.**

On a vu que dans ce cas $\widehat{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \widehat{0}$, d'où $\vec{a}_{\text{comp.}}(M) = \vec{0}$ et $\vec{a}_{\text{entr.}}(M) = \vec{a}_{\text{abs.}}(O')$. On arrive au même type de conclusion que pour les vitesses :

Quand le référentiel relatif a un mouvement de translation par rapport au référentiel absolu, tous les points ont la même accélération d'entraînement qui est l'accélération absolue de l'origine du référentiel relatif ; inutile dans ce cas de s'intéresser au point coïncident.

En particulier quand le référentiel relatif a un mouvement de translation uniforme à savoir que la vitesse de O' dans le référentiel absolu est constante, donc l'accélération nulle, alors :

Quand le référentiel relatif a un mouvement de translation uniforme par rapport au référentiel absolu, tous les points ont une accélération d'entraînement nulle et ont donc la même accélération dans les deux référentiels.

• **Le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation autour d'un axe.**

Dans le paragraphe 4.c débutant p. 14, nous avons $\overrightarrow{OM^*} = \overrightarrow{OH} + r \vec{e}_r$ avec $\overrightarrow{OH}$ et r constants et à :

$$\vec{v}_{\text{entr.}} = \left. \frac{d(\overrightarrow{OH} + r \vec{e}_r)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = r \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = r \dot{\varphi} \vec{e}_{\theta}$$

Dérivons une seconde fois le mouvement du point coïncident dans son mouvement par rapport au référentiel absolu et utilisons le théorème sur la dérivée des vecteurs unitaires :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{entr.}} &= \left. \frac{d\vec{v}_{\text{entr.}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(r \dot{\varphi} \vec{e}_{\theta})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = r \ddot{\varphi} \vec{e}_{\theta} + r \dot{\varphi} \left. \frac{d\vec{e}_{\theta}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ \vec{a}_{\text{entr.}} &= r \ddot{\varphi} \vec{e}_{\theta} + r \dot{\varphi} [\dot{\varphi} (-\vec{e}_r)] = r \ddot{\varphi} \vec{e}_{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r \end{aligned}$$

Remarquons que le terme radial $-r \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r$ peut aussi s'écrire $-\dot{\varphi}^2 \overrightarrow{HM}$. Résumons :

Dans le contexte d'un référentiel relatif tournant par rapport au référentiel absolu autour de l'axe Oz , l'accélération d'entraînement d'un point M a une composante orthoradiale avec comme mesure le produit de la distance à l'axe par l'accélération angulaire du mouvement d'entraînement et une composante radiale dirigée vers l'axe avec comme module le produit de la distance à l'axe par le carré de la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement.

Dans l'usage le plus fréquent des changements de référentiel, la vitesse angulaire est constante et donc l'accélération angulaire nulle. Alors :

Dans le contexte d'un référentiel relatif tournant par rapport au référentiel absolu autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire constante, l'accélération d'entraînement d'un point M est radiale, dirigée vers l'axe, avec comme module le produit de la distance à l'axe par le carré de la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement, soit $\vec{a}_{\text{entr.}} = -\dot{\varphi}^2 \overrightarrow{HM}$ où H est la projection de M sur l'axe.

4.e Composition des vecteurs rotation

Imaginons deux changements de référentiels en cascade passant dans un premier temps du référentiel 1, « absolu », au référentiel 2, « relatif » dans ce premier temps puis dans un second temps du référentiel 2, devenu « absolu » dans ce second temps, au référentiel 3, « relatif ».

Si l'on considère le passage direct du référentiel 1 au référentiel 3, la vitesse d'un point M du référentiel 3 par rapport au référentiel 1, se calcule comme une vitesse d'entraînement (voir au sein du paragraphe 4.c commençant p. 14), soit en adaptant les notations (en particulier O_3 est l'origine du référentiel 3) :

$$\vec{v}_{3/1}(M) = \vec{v}_{3/1}(O_3) + \hat{\Omega}_{3/1} \wedge \overrightarrow{O_3M}$$

De même, la vitesse de ce point M du référentiel 3 par rapport au référentiel 2 cette fois, est donné par :

$$\vec{v}_{3/2}(M) = \vec{v}_{3/2}(O_3) + \hat{\Omega}_{3/2} \wedge \overrightarrow{O_3M}$$

Considérons maintenant les vitesses de M et O_3 comme les vitesses de points mobiles sans tenir compte qu'ils appartiennent au référentiel 3, leurs vitesses absolues se confondent avec $\vec{v}_{3/1}(M)$ et $\vec{v}_{3/1}(O_3)$, leurs vitesses relatives avec $\vec{v}_{3/2}(M)$ et $\vec{v}_{3/2}(O_3)$ et leur vitesses d'entraînement sont celles des points coïncidents du référentiel 2 (d'origine O_2) par rapport au référentiel 1 soit respectivement $\vec{v}_{2/1}(O_2) + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$ pour M et pour O_3 , $\vec{v}_{2/1}(O_2) + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2O_3}$.

Réécrivons le premier des deux résultats précédents en développant la composition de vitesses, on a successivement, en simplifiant à la fin :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{3/1}(M) &= \vec{v}_{3/1}(O_3) + \hat{\Omega}_{3/1} \wedge \overrightarrow{O_3M} \\ \left[\vec{v}_{3/2}(M) + \vec{v}_{2/1}(O_2) + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2M} \right] &= \dots \\ \dots &= \left[\vec{v}_{3/2}(O_3) + \vec{v}_{2/1}(O_2) + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2O_3} \right] + \hat{\Omega}_{3/1} \wedge \overrightarrow{O_3M} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\vec{v}_{3/2}(M) + \vec{v}_{2/1}(O_2) + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge (\overrightarrow{O_2 O_3} + \overrightarrow{O_3 M}) \right] &= \dots \\ \dots &= \left[\vec{v}_{3/2}(O_3) + \vec{v}_{2/1}(O_2) + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2 O_3} \right] + \hat{\Omega}_{3/1} \wedge \overrightarrow{O_3 M} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\vec{v}_{3/2}(M) + \vec{v}_{2/1}(O_2) + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2 O_3} + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_3 M} \right] &= \dots \\ \dots &= \left[\vec{v}_{3/2}(O_3) + \vec{v}_{2/1}(O_2) + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2 O_3} \right] + \hat{\Omega}_{3/1} \wedge \overrightarrow{O_3 M} \\ \vec{v}_{3/2}(M) + \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_3 M} &= \vec{v}_{3/2}(O_3) + \hat{\Omega}_{3/1} \wedge \overrightarrow{O_3 M} \end{aligned}$$

Soustrayons de ce résultat le second des résultats précédents soit, rappelons-le pour faciliter la lecture, $\vec{v}_{3/2}(M) = \vec{v}_{3/2}(O_3) + \hat{\Omega}_{3/2} \wedge \overrightarrow{O_3 M}$; on obtient successivement avec réaménagement :

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_3 M} &= \hat{\Omega}_{3/1} \wedge \overrightarrow{O_3 M} - \hat{\Omega}_{3/2} \wedge \overrightarrow{O_3 M} \\ \left(\hat{\Omega}_{2/1} + \hat{\Omega}_{3/2} \right) \wedge \overrightarrow{O_3 M} &= \hat{\Omega}_{3/1} \wedge \overrightarrow{O_3 M} \end{aligned}$$

Ceci est vrai quel que soit le point M ; on peut donc affirmer :

$$\boxed{\hat{\Omega}_{3/1} = \hat{\Omega}_{3/2} + \hat{\Omega}_{2/1}}$$

que l'on peut aussi énoncer ainsi pour la ressemblance avec les formules relatives aux vitesses et aux accélérations :

$$\boxed{\hat{\Omega}_{\text{abs.}} = \hat{\Omega}_{\text{rel.}} + \hat{\Omega}_{\text{entr.}}}$$

Ce résultat est évident et se démontre très simplement dans le cas de rotations autour d'un même axe de direction fixe ; il est ici généralisé. On le généralisera aux solides dans le chapitre B-VIII.

5 Coordonnées polaires.

5.a Coordonnées cylindriques.

• Coordonnées.

Elles sont définies à partir d'un repère cartésien $Oxyz$ dont l'axe Oz est privilégié. Pour repérer un point M , on commence par tracer son *plan méridien*, c'est-à-dire le plan passant

par Oz et le point M , il contient la projection H de M sur Oz et m projection de M sur xOy puis on donne $r = \|\vec{Om}\| = \|\vec{HM}\|$, $\theta = (\vec{Ox}, \vec{Om}) \in]-\pi, \pi]$ et $z = \overline{OH}$ (voir figure 2 p.24).

Tout d'abord z est commun aux coordonnées cartésiennes et cylindriques.

On passe d'une part des cartésiennes aux cylindriques par $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ est donné par $\cos \theta = \frac{x}{r}$ et $\sin \theta = \frac{y}{r}$ (la valeur de l'un et le signe de l'autre suffisent mais sont nécessaires¹⁰).

On passe d'autre part des cylindriques aux cartésiennes par $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$

• Bases locales.

Un vecteur dépendant du point M est projeté sur une *base locale*, orthonormée directe, constitué des vecteurs unitaires suivants (voir figure 2 p.24) :

- le vecteur unitaire *radial* $\vec{e}_r$, vecteur unitaire de $\vec{HM}$
- le vecteur unitaire *orthoradial* $\vec{e}_\theta$, vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans un plan parallèle à xOy
- le vecteur unitaire *axial* $\vec{e}_z$

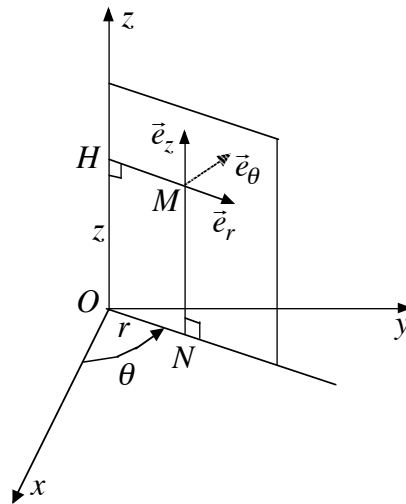


FIGURE 2 – Coordonnées cylindriques.

A chaque point M sa base, c'est pourquoi le titre est au pluriel.

Tout d'abord $\vec{e}_z$ est commun aux coordonnées cartésiennes et cylindriques.

¹⁰. Il serait vain de chercher à passer par un arccos, arcsin ou arctan car aucun ne couvre l'intervalle $] -\pi, \pi]$

On passe d'une part des cartésiennes aux cylindriques par des projections élémentaires

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

On passe d'autre part des cylindriques aux cartésiennes par des projections tout aussi élémentaires

$$\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$$

5.b Coordonnées sphériques.

• Coordonnées.

Dans le même contexte que pour les coordonnées cylindriques, le point M est repéré par $r = \|\vec{OM}\|$, $\theta = (\vec{Oz}, \vec{OM}) \in [0, \pi]$ et $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{ON}) \in]-\pi, \pi]$ (voir figure 3 p.25).

On retrouve l'approche des géographes (latitude¹¹ et longitude). Notez que le θ des cylindriques est devenu le φ des sphériques et que r n'a pas la même signification dans ces deux systèmes.

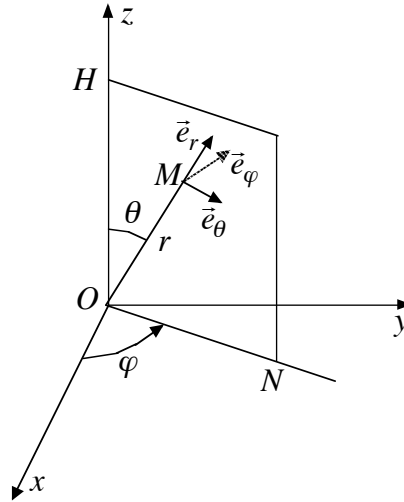


FIGURE 3 – Coordonnées sphériques.

11. les géographes mesurent la latitude à partir de l'équateur et positivement vers le pôle nord ; θ est parfois appelé co-latitude.

Pour passer des cartésiennes aux sphériques, on procède en deux étapes en passant par le plan méridien avec comme axes Oz et Ox' intersection du plan méridien avec Oxy , de vecteur unitaire $\vec{e}_{x'}$, c'est aisé, je vous passe les détails.

Des cartésiennes aux sphériques : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$ et φ tiré de $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (la valeur de l'un et le signe de l'autre).

Des sphériques aux cartésiennes : $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$ et enfin $z = r \cos \theta$

• Bases locales.

La base locale orthonormée directe est ici :

- le vecteur $\vec{e}_r$, vecteur unitaire de $\vec{OM}$
- le vecteur $\vec{e}_\theta$, vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le plan méridien
- le vecteur $\vec{e}_\varphi$, identique au $\vec{e}_\theta$ des cylindriques

Pour passer des cartésiennes aux sphériques, on procède par les deux mêmes étapes.

Des cartésiennes aux sphériques :

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

Des sphériques aux cartésiennes, c'est sans doute moins facile à voir ; utilisons donc nos souvenirs de mathématiques, la matrice de passage soit :

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice *unitaire*, c'est-à-dire que ses colonnes sont les composantes de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux ; si vous la multipliez par sa transposée, inutile de faire le calcul par écrit, on visualise de tête, la définition même du produit de deux matrices donne pour termes diagonaux les carrés des vecteurs unitaires donc 1 et les autres termes des produits scalaires de vecteurs orthogonaux donc 0, on obtient la matrice unité donc la transposée d'une matrice unitaire est son inverse. En ce qui nous concerne, on peut affirmer sans aucun complexe et totalement sûr de soi :

$$\vec{e}_x = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_y = \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_\theta + \cos \varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$

6 Abscisse curviligne et courbure.

Ce paragraphe intéresse en fait plus les mathématiciens que les physiciens. Il concerne les courbes paramétrées ; pour le physicien, le paramètre est le temps et la courbe est la trajectoire¹² d'un point mobile.

6.a Abscisse curviligne

Soit un point mobile, à l'instant t , il est au point M de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$, à un instant infiniment proche $t + dt$, il est au point M' dont les coordonnées sont donc $(x(t+dt), y(t+dt), z(t+dt))$ et s'est déplacé de $\overrightarrow{MM'}$ dont les composantes sont, en utilisant un développement de TAYLOR à l'ordre 1 :

$$dx = x(t + dt) - x(t) = \dot{x}(t) dt = v_x dt$$

$$dy = y(t + dt) - y(t) = \dot{y}(t) dt = v_y dt$$

$$dz = z(t + dt) - z(t) = \dot{z}(t) dt = v_z dt$$

La longueur de ce petit déplacement peut être notée de beaucoup de façons possibles :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt = \|\vec{v}\| dt$$

La longueur parcourue sur la trajectoire orientée dans le sens des temps croissant, à partir de l'instant origine est :

$$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt$$

$s(t)$ s'appelle l'abscisse curviligne de M sur sa trajectoire. On passe sous silence les complications engendrées par un mouvement alternatif sur une même courbe, un peu de bon sens sera bien plus efficace qu'une théorie peu lisible.

6.b Vitesse.

Les composantes de $\overrightarrow{MM'}$ montrent simplement que $\vec{v} dt = \overrightarrow{MM'}$ et la définition de ds est $ds = \|\overrightarrow{MM'}\|$. Si l'on introduit le vecteur unitaire de $\overrightarrow{MM'}$, donc le vecteur unitaire tangent à la trajectoire orienté dans le sens du mouvement, appelé *vecteur unitaire tangent* et noté traditionnellement $\vec{\tau}$, on a :

$$\vec{v} dt = \overrightarrow{MM'} = ds \vec{\tau}$$

12. Rappelons à nos amis journalistes qu'une voiture ne quitte jamais sa trajectoire ; par contre, il arrive que sa trajectoire quitte la route.

Par ailleurs, si l'on note $v = \|\vec{v}\|$, comme la vitesse est par essence tangente à la trajectoire, on a $\vec{v} = v \vec{\tau}$, d'où :

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

qui n'est rien d'autre qu'une reformulation des définitions de s et de $\vec{\tau}$

6.c Accélération. Courbure.

On part de $\vec{v} = v \vec{\tau}$ et l'on dérive.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \vec{\tau})}{dt} = \dot{v} \vec{\tau} + v \dot{\vec{\tau}}$$

Or $\vec{\tau}$ est unitaire donc $\vec{\tau}^2 = 1$; si l'on dérive, l'on en déduit $2 \vec{\tau} \cdot \dot{\vec{\tau}} = 0$, donc que $\dot{\vec{\tau}}$ est orthogonal à $\vec{\tau}$.

Pour avoir des définitions ultérieures ne dépendant que de la forme de la trajectoire et non de la façon dont elle est parcourue, remarquons que :

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

Il est d'usage d'appeler le vecteur unitaire de $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$, *vecteur unitaire normal* et de le noter $\vec{\nu}$ et l'on appelle *courbure* son module et *rayon de courbure*, noté R , l'inverse de son module, soit :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{\nu}}{R}$$

que l'on reporte dans l'expression de l'accélération en y faisant apparaître une *accélération tangentielle* $\vec{a}_t$ et une *accélération normale* $\vec{a}_n$, soit :

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{\tau} + v \dot{\vec{\tau}} = \dot{v} \vec{\tau} + v \left(v \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right) = \dot{v} \vec{\tau} + v^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \dot{v} \vec{\tau} + v^2 \frac{\vec{\nu}}{R} = \dot{v} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{\nu}$$

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \text{avec} \quad \vec{a}_t = \dot{v} \vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{\nu}$
--

Au vu de la définition de tout ce beau monde, en général c'est le mouvement qui donne accès à l'accélération et permet de trouver le rayon de courbure de la trajectoire ; mais il arrive que l'on doive procéder à rebrousse-poil. C'est le cas d'un point mobile assujéti à rester sur une piste dont la forme donc le rayon de courbure est connu et donne accès à l'accélération normale.

Pour terminer, est-il utile de dire que les mathématiciens démontrent que le rayon de courbure d'un cercle est son rayon « classique » ; normal, ils ont tout fait pour cela dans leur définition !