Chapitre B-II

Dynamique du point.

 $\label{eq:convergence} \mbox{Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons:$

- Pas d'utilisation commerciale.
- ${\,-\,}$ Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

$R\acute{E}SUM\acute{E}$:

La mise en place du formalisme axiomatique de la mécanique du point a été le résultat d'une longue maturation des premières expériences de GALILÉE jusqu'à la synthèse par NEWTON des lois de la mécanique et de celles de la gravitation. La mécompréhension du rôle des forces de frottement a longtemps fait croire qu'il y avait un lien de cause à effet entre la force exercée sur un objet et sa vitesse; dès que cette erreur fut levée, la mécanique a pu être mise en place.

Il n'est guère intéressant ici d'explorer cette genèse, fausses pistes comprises, (ce sera fait, partiellement, dans le chapitre B-III) et vous trouverez donc ici une présentation totalement axiomatisée.

Pour les exemples en fin de chapitre, les prérequis sont un peu d'aisance dans la résolution des équations différentielles.

Table des matières

B-II Dynamique du point.	1
1 Point matériel. Référentiels galiléens	4
2 Système isolé de deux points matériels en interaction	4
2.a Masse et quantité de mouvement	4
2.b Force. Action et réaction	4
2.c Changement de référentiel	6
3 Moment cinétique	7
3.a Définition et propriétés	7
3.b Moment dynamique	7
3.c Conservation du moment cinétique	9
4 Energie cinétique	9
4.a Définition	9
4.b Puissance	9
4.c Energie potentielle	10
5 Limites du modèle	11
6 Exemples de mouvements	12
6.a Mouvements unidirectionnels avec une force dépendant de la po-	
sition	12
6.b Visualisation graphique du cas précédent	13
6.c Une autre visualisation graphique du cas précédent : l'espace des	
phases	15
6.d Mouvements unidirectionnels avec une force dépendant de la vitesse.	16
6.e Mouvements pluridirectionnels	18

1 Point matériel. Référentiels galiléens.

On postule l'existence de particules de taille infiniment petite, appelées *points matériels*. La matière, dans ce modèle, est un assemblage de points matériels.

On postule l'existence de référentiels privilégiés dans lesquels tout point matériel isolé (c'est-à-dire ne subissant aucune interaction) a un mouvement rectiligne uniforme. On les appelle référentiels inertiels ou galiléens.

Tous les théorèmes de mécanique de ce chapitre sont énoncés pour un référentiel galiléen.

Ce postulat est connu sous le nom de principe d'inertie.

2 Système isolé de deux points matériels en interaction.

2.a Masse et quantité de mouvement.

Soit un système isolé de deux points matériels A et B en interaction, c'est à dire que les deux points exercent une action l'un sur l'autre, mais ne subissent l'action d'aucun autre point matériel. On note $\overrightarrow{v}_A(t)$ et $\overrightarrow{v}_B(t)$ leurs vitesses.

On postule que chacun des points est caractérisé par un scalaire strictement positif et immuable, appelé $masse\ inertielle^1$, noté respectivement m_A et m_B , tel que la quantité :

$$m_A \overrightarrow{v}_A(t) + m_B \overrightarrow{v}_B(t)$$

reste constante au cours du temps.

Cette quantité est appelée quantité de mouvement du système et notée \overrightarrow{p} . De même, $\overrightarrow{p}_A = m_A \overrightarrow{v}_A(t)$ est la quantité de mouvement du point A et $\overrightarrow{p}_B = m_B \overrightarrow{v}_B(t)$, celle du point B.

Le postulat peut donc se formuler comme une loi de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé de deux points.

2.b Force. Action et réaction.

Rien ne prouve par contre que la quantité de mouvement de A, ni celle de B, se conserve.

On définit la force exercée par A sur B par :

$$\overrightarrow{F}_{A \to B} = \frac{d\overrightarrow{p}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(m_B \overrightarrow{v}_B) = m_B \frac{d\overrightarrow{v}_B}{dt}$$

^{1.} La masse gravitationnelle est le coefficient qui apparaît dans la loi d'attraction universelle. En mécanique newtonienne, il n'y a aucune raison a priori que ces masses soient égales, mais l'expérience prouve qu'elles le sont. Seule la théorie de la relativité générale propose une explication en disant que les corps massiques déforment l'espace.

et de même, la force exercée par B sur A par :

$$\overrightarrow{F}_{B\to A} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_A \overrightarrow{v}_A) = m_A \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_A}{\mathrm{d}t}$$

Comme la quantité de mouvement totale se conserve, on en déduit immédiatement que :

 $\overrightarrow{F}_{B \to A} = -\overrightarrow{F}_{A \to B}$

Il s'agit du théorème ² d'action et réaction.

A ce stade reste à la charge des expérimentateurs et théoriciens de dégager et axiomatiser des lois de forces formulant la force en fonctions des points et de leurs mouvements.

De ces définitions et en notant $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_{A \to B}$, on déduit aisément, au premier ordre en dt, que :

 $\overrightarrow{p}_B(t+\mathrm{d}t) = \overrightarrow{p}_B(t) + \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t$

et

$$\overrightarrow{p}_A(t+dt) = \overrightarrow{p}_A(t) - \overrightarrow{F} dt$$

Plutôt que dire que la quantité de mouvement totale se conserve, on peut aussi dire que pendant $\mathrm{d}t$, A et B échangent la quantité de mouvement élémentaire \overrightarrow{F} $\mathrm{d}t$. De façon générale, toute loi de conservation pour un système pourra être reformulée en loi d'échange entre composantes du système 3 ; on ne le fera pas systématiquement dans ce cours, mais il faudra le garder à l'esprit.

J'insiste ici sur le fait que la loi $\overrightarrow{F} = m \frac{\mathrm{d} \overrightarrow{v}}{\mathrm{d} t}$ n'est pas, à mon sens, un principe fondamental de la dynamique, mais une simple définition de la force. Pour que ce soit un principe (un axiome dirait un mathématicien), il faudrait que fût défini auparavant ce qu'est une force; or aucune définition a priori d'une force ne tient la route. La présentation de ce cours est bien plus pertinente : c'est l'étude du mouvement d'un corps en présence d'un corps qui permet de mesurer la force que celui-ci exerce sur celui-là et permet de dégager, par exemple, la dépendance de la force à la distance entre les deux corps. Historiquement, du reste, ce sont les lois de KEPLER qui ont permis à NEWTON de dégager la loi de gravitation universelle et non l'inverse.

Remarque : On note souvent l'accélération $\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$ par la lettre \overrightarrow{a} (autrefois, l'on notait $\overrightarrow{\gamma}$).

Remarque historique : On a longtemps cru qu'il fallait exercer une force pour donner un mouvement à un corps et donc postulé une proportionnalité entre force et vitesse. Cette erreur provenait de la méconnaissance des forces de frottement ; un frottement fluide conduit effectivement à un proportionnalité entre force motrice et vitesse limite. Ce sont les

^{2.} La conservation de la quantité de mouvement et la loi d'action et réaction sont équivalentes ; l'une est axiome et l'autre théorème, mais peu importe dans quel ordre.

^{3.} Quand mon épouse me demande vingt euros, nous échangeons cette somme et cependant, l'argent du ménage se conserve... mais pas longtemps.

expériences de Galilée qui ont conduit à la bonne approche, en limitant les frottements et en ralentissant le mouvement pour avoir le temps d'effectuer des mesures fiables (sphères roulant sur un plan incliné). Officiellement, la bonne loi a été obtenue en 1604, mais sans définition précise de la notion de force (voir ci-dessus).

2.c Changement de référentiel

Dans le passage d'un premier référentiel, supposé galiléen, faisant office de « référentiel absolu » dans la terminologie du chapitre B-I (Cinématique du point) à un second, pas forcément galiléen, faisant office de « référentiel relatif », on a établi une formule de composition des accélérations

$$\overrightarrow{a}_{\text{abs.}} = \overrightarrow{a}_{\text{rel.}} + \overrightarrow{a}_{\text{entr.}} + \overrightarrow{a}_{\text{Cor.}}$$

où $\overrightarrow{a}_{abs.}$ est l'accélération absolue, c'est-à-dire dans le premier référentiel, $\overrightarrow{a}_{rel.}$ est l'accélération relative, c'est-à-dire dans le second référentiel, $\overrightarrow{a}_{entr.}$ et $\overrightarrow{a}_{Cor.}$ sont des termes correctifs, appelés respectivement accélération d'entraı̂nement et accélération complémentaire (ou de CORIOLIS) dont la définition et l'interprétation physique ont été développés dans le chapitre B-I.

Si, dans le premier référentiel, un point matériel de masse m est soumis à une force \overrightarrow{F} , on a $m \overrightarrow{a}_{abs.} = \overrightarrow{F}$; si l'on cherche dans le second référentiel une formulation similaire de la forme $m \overrightarrow{a}_{rel} = \overrightarrow{F'}$, la loi de composition des accélération conduit aisément à

$$m \overrightarrow{a}_{\text{rel.}} = \overrightarrow{F} - m \overrightarrow{a}_{\text{entr.}} - m \overrightarrow{a}_{\text{Cor.}}$$

qu'on peut mémoriser en introduisant deux forces fictives appelées forces d'inertie s'ajoutant à la vraie force \overrightarrow{F} et qui sont $-m \overrightarrow{a}_{entr.}$ et $-m \overrightarrow{a}_{Cor.}$

On verra un exemple d'application dans le chapitre B-III (« Référentiel géocentrique ou héliocentrique? ») comparant les référentiels de de COPERNIC, de FOUCAULT et terrestre.

Voyons un cas particulier fondamental : si le second référentiel est en translation uniforme par rapport au premier, l'accélération de CORIOLIS est nulle (car le vecteur rotation du second référentiel par rapport au premier est nul) et l'accélération d'entraînement aussi (car la vitesse relative des référentiels est constante); alors

$$m \overrightarrow{a}_{\text{rel.}} = \overrightarrow{F}$$

Dire que tout se passe dans le second référentiel comme dans le premier serait passer totalement à côté de la double conclusion essentielle qui y est contenue. Comme Alcofribas Nozier ⁴, extravons-en la quintessence.

^{4.} pseudonyme de François Rabelais auteur de La vie inestimable du grand Gargantua, père de Pantragruel, jadis composée par l'abstracteur de quinte essence (je cite ici la note aux lecteurs du texte original)

Première conclusion : le second référentiel est lui aussi galiléen et plus généralement tous les référentiels galiléens sont en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

Seconde conclusion : la force est inchangée dans le changement de référentiel et plus généralement, une loi de force est valable dans tous les référentiels galiléens ; on dit qu'une force est un *invariant galiléen*.

3 Moment cinétique.

3.a Définition et propriétés.

Soit un point matériel A (isolé ou en interaction avec un point B, voire d'autres) de masse m_A , de vitesse \overrightarrow{v}_A et donc de quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_A = m_A \overrightarrow{v}_A$. Soit un point M immobile. On définit le moment cinétique de A, calculé en M par :

$$\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{p}_A$$

Plus exactement le moment cinétique est le champ vectoriel $\overrightarrow{\sigma}_A$ que l'expression cidessus définit par sa valeur en chaque point M.

Remarque : de cette formule résulte une « formule de changement de point », qui peut être utile, permettant de lier les valeurs du champ de moment cinétique en deux points différents, disons M et M'. On a :

$$\overrightarrow{\sigma}_{A}(M') - \overrightarrow{\sigma}_{A}(M) = \overrightarrow{M'A} \wedge \overrightarrow{p}_{A} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{p}_{A} = (\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{MA}) \wedge \overrightarrow{p}_{A} = (\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AM}) \wedge \overrightarrow{p}_{A} = \overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{p}_{A}$$

Retenons:

$$\overrightarrow{\sigma}_A(M') = \overrightarrow{\sigma}_A(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{p}_A$$

Attention : le moment cinétique de A, calculé en M, fait référence à deux points et là où j'écris $\overrightarrow{\sigma}_A(M)$, d'autres écrivent $\overrightarrow{\sigma}_M(A)$. Ma notation semble minoritaire, mais j'ai de sérieuses raisons de m'y tenir et les auteurs les plus sérieux l'utilisent, c'est pourquoi je persiste. Mon argument est le suivant : dans un référentiel donné et pour un point matériel donné, noté A, $\overrightarrow{\sigma}_A(M)$ n'est pas une grandeur intrinsèque au point matériel, car il dépend du point M, par contre la fonction (on dit aussi le champ) $\overrightarrow{\sigma}_A$ qui à tout point M associe $\overrightarrow{\sigma}_A(M)$ est intrinsèque au point A.

3.b Moment dynamique.

Dérivons $\overrightarrow{\sigma}_A(M,t) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{p}_A$ par rapport au temps, le point M étant fixe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{p}_A + \overrightarrow{MA}\wedge\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{p}_A$$

soit avec $d\overrightarrow{MA}/dt = \overrightarrow{v_A}$ car M est un point fixe :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_{A}(M) = \overrightarrow{v_{A}} \wedge \overrightarrow{p}_{A} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_{A}$$

soit puisque $\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{p_A}$ sont parallèles

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_A$$

Par analogie avec le moment cinétique, on appelle moment dynamique exercé sur le point A le champ dont la valeur en un point M est :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_A$$

On remarque, de la même façon que pour le moment cinétique, la formule de changement de point :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{A}(M') = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{A}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \overrightarrow{F}_{A}$$

Retenons surtout le théorème du moment cinétique, valable pour un point M fixe :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_A(M) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_A(M)}$$

Plus fondamentalement, appuyons-nous sur la notion de dérivée temporelle d'un champ. Pour un champ $\overrightarrow{\sigma}_A$ qui a tout point M associe à l'instant t $\overrightarrow{\sigma}_A(M,t)$, sa dérivée temporelle, notée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{\sigma}_A$ est un champ qui à M associe $\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\sigma}_A(M,t)$, dérivée partielle par rapport au temps de $\overrightarrow{\sigma}_A(M,t)$, définition exprimée tout naturellement en terme de dérivée partielle, impliquant donc par essence le fait que M est fixe et ne nécessitant plus qu'on l'y contraigne. En introduisant le moment dynamique comme un champ $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_A$, le théorème du moment cinétique est une relation entre des champs vectoriels (c'est-à-dire, rappelons-le encore une fois, des fonctions des points de l'espace) :

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{\sigma}_A = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_A \right|$$

C'est par paresse qu'on énonce le théorème en un point et non en terme de champ (ou plutôt, avec plus d'indulgence, pour permettre d'avancer le cours de physique sans perdre du temps à introduire la notion de champ)... mais on a tort.

3.c Conservation du moment cinétique.

Soit un système isolé de deux points matériels A et B en interaction, son moment cinétique est la somme des moments cinétiques des deux points, d'où pour tout point M:

$$\overrightarrow{\sigma}(M) = \overrightarrow{\sigma}_A(M) + \overrightarrow{\sigma}_B(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{p}_A + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{p}_B$$

On postule que le moment cinétique d'un système isolé de deux points en interaction se conserve.

Voyons-en la conséquence :

$$\overrightarrow{0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{\sigma}(M) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{\sigma}_A(M) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{\sigma}_B(M) = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_A(M) + \overrightarrow{\mathfrak{M}}_B(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_{B \to A} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{F}_{A \to B}$$

soit en tenant compte du théorème d'action et réaction :

$$\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{F}_{A \to B} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{F}_{A \to B} = (-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{F}_{A \to B} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{F}_{A \to B} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F}_{A \to B}$$

On en déduit que $\overrightarrow{F}_{A\to B}$ est parallèle à \overrightarrow{AB} ; dans cette axiomatique, la force d'interaction entre deux points est toujours parallèle 5 à la droite qui les joint.

4 Energie cinétique.

4.a Définition.

Soit un point matériel A (isolé ou en interaction avec un point B, voire d'autres) de masse m_A , de vitesse \overrightarrow{v}_A , on définit l'énergie cinétique de A par :

$$E_{cin\,A} = \frac{1}{2} \, m_A \, \overrightarrow{v}_A^2$$

Au XVIIIe siècle et un peu au delà, cette grandeur, d'abord sans puis avec le facteur 1/2, était appelée forces vives.

4.b Puissance.

Dérivons par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin\,A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m_A\,\overrightarrow{v}_A^2\right) = m_A\,\overrightarrow{v}_A.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{v}_A = \overrightarrow{v}_A.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{p}_A = \overrightarrow{v}_A.\overrightarrow{F}_A$$

^{5.} Ici aussi l'on peut permuter le rôle de l'axiome et du théorème entre ce parallélisme et la loi de conservation.

On appelle puissance exercée par \overrightarrow{F}_A sur A la quantité :

$$\mathcal{P}_A = \overrightarrow{F}_A . \overrightarrow{v}_A$$

On en déduit le théorème de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin\,A} = \mathcal{P}_A}$$

Au XVIIIe siècle et un peu au delà, bien sûr, ce théorème était appelé théorème des forces vives.

4.c Energie potentielle.

Soit un système isolé de deux points matériels A et B en interaction, son énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des deux points, soit :

$$E_{cin} = E_{cin A} + E_{cin B} = \frac{1}{2} m_A \overrightarrow{v}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \overrightarrow{v}_B^2$$

Dérivons par rapport au temps en tenant compte du théorème d'action et réaction :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = \mathcal{P}_A + \mathcal{P}_B = \overrightarrow{F}_{B\to A}.\overrightarrow{v}_A + \overrightarrow{F}_{A\to B}.\overrightarrow{v}_B = \overrightarrow{F}_{A\to B}.(\overrightarrow{v}_B - \overrightarrow{v}_A)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = \overrightarrow{F}_{A\to B}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{F}_{A\to B}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{AB}$$

La suite va nous prouver que, contrairement à la quantité de mouvement et au moment cinétique, l'énergie cinétique n'est pas une grandeur conservative. Posons $\overrightarrow{AB} = r \overrightarrow{u}$ où $r = ||\overrightarrow{AB}||$ et \overrightarrow{u} est unitaire; et, puisque $\overrightarrow{F}_{A \to B}$ est parallèle à \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{F}_{A \to B} = F \overrightarrow{u}$, d'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = F\overrightarrow{u}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\overrightarrow{u}) = F\overrightarrow{u}.(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u} + r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}) = F\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}^2 + Fr\overrightarrow{u}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}$$

Or \overrightarrow{u} est unitaire, d'où $\overrightarrow{u}^2=1$ et en dérivant cette relation $2\overrightarrow{u}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}=0$, donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = F\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

L'énergie cinétique ne se conserve donc que si la distance r entre les points est constante (ce sera important pour la mécanique du solide). Pour les autres cas, on essaie le plus possible de remplacer les équations différentielles de la mécanique par des lois de conservation, plus aisées à manipuler. C'est possible si la loi d'interaction est isotrope c'est-à-dire si F

ne dépend que de r mais pas de la direction de \overrightarrow{u} . Dans ce cas, et dans ce cas seulement, F = F(r) et :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = F(r)\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Si l'on note $U_{AB}(r)$ l'opposé de la primitive ⁶ de F(r), qu'on appelera énergie potentielle (et on dira que \overrightarrow{F} dérive du potentiel U_{AB}), on aura :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{cin} = -\frac{\mathrm{d}U_{AB}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{AB}(r(t))$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[E_{cin}(t) + U_{AB}(r(t)) \right] = 0$$

Ainsi, la quantité $E = E_{cin} + U_{AB}$ se conserve, on l'appelle énergie mécanique. Attention! Ceci n'est vrai que dans le cas où les forces sont conservatives, c'est-à-dire dérivent d'une énergie potentielle.

5 Limites du modèle.

Ce modèle donne de bons résultats pour les interactions gravitationnelles et, sous certaines conditions ⁷, pour les interactions électro-magnétiques. Son défaut essentiel est qu'elle suppose que les interactions soient instantanées, ce qui n'est pas le cas entre particules électriquement chargées, car les équations de MAXWELL ont pour solutions des phénomènes propagatifs. On peut toutefois rétablir des lois de conservation en donnant au champ électro-magnétique une quantité de mouvement, un moment cinétique et une énergie; démarche qui, du reste, sera utilisée pour établir la relation de POYNTING en électro-magnétisme (voir le livre C de ce cours). Mais ceci déborde largement de notre champ d'étude.

Une autre critique à envisager est celle de l'existence de points matériels, en effet, la matière n'est pas divisible à l'infini et même très petits, un atome, un noyau, un électron ne sont pas des points. Malgré cela, c'est en général une bonne approximation que de considérer un système matériel comme un assemblage de points matériels; toutefois, seule la thermodynamique permettra une discussion fine et pertinente sur la validité de cette approximation.

Par ailleurs et c'est fondamental, la suite du cours de mécanique démontrera que le centre de gravité d'un système se comporte comme un point matériel et c'est pour cela que la mécanique du point reste pertinente même si les points matériels n'existent pas vraiment.

 $^{6.\,}$ Il n'y a que des fonctions très exotiques qui n'aient pas de primitives

^{7.} Dans le cadre des régimes quasi-stationnaires, voir le cours d'électro-magnétisme.

6 Exemples de mouvements.

L'objet n'est pas ici de donner une culture que vous avez déjà (chute libre, éventuellement avec frottement, oscillateur harmonique, etc.) mais de dégager des pistes mathématiques de résolution ou de présenter l'outil de l'espace des phases. D'autres chapitres de ce cours exploreront plus en détail le référentiel non galiléen qu'est le référentiel terrestre, les lois de gravitation, les oscillateurs, les frottement fluides, etc.

6.a Mouvements unidirectionnels avec une force dépendant de la position.

Typiquement, il s'agit de résoudre une équation de la forme :

$$m \ddot{x} = F(x)$$

La loi de force est supposée connue mais non précisée ici, donc aussi l'énergie potentielle qui lui correspond.

Dans le cas particulier où F(x) est un polynôme du premier degré (oscillateur harmonique dans un champ de pesanteur uniforme), l'équation est linéaire et la résolution est spécifique, le terrain est suffisamment balisé pour taire la suite. Je rappelle que ce cours est un cours de synthèse a posteriori des connaissances et non un cours d'apprentissage.

Dans le cas général, on commence par utiliser le théorème de l'énergie cinétique, ou le redémontrer en multipliant par la vitesse \dot{x} , ce que nous faisons ici

$$m \ddot{x} \dot{x} = F(x) \dot{x}$$

Appelons U(x) l'opposé d'une primitive de F(x), nous avons donc que F = -dU/dx et

$$m \ddot{x} \dot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U[x(t)]}{\mathrm{d}t}$$

d'où l'on tire aisément par intégration membre à membre

$$\frac{1}{2} m v^2 + U[x(t)] = Cte$$

où la constante d'intégration dépend des conditions initiales. Pour fixer les idées, plaçons nous dans le cas d'un lancer sans vitesse initiale et notons $U_0 = U[x(0)]$, alors

$$\frac{1}{2} m v^2 + U[x(t)] = U_0$$

Le mouvement, au sens de la solution x(t), n'est toujours pas trouvé, mais nous avons ici, une relation qui donne la vitesse en fonction de la position (en plus de l'équation de

départ qui donne l'accélération en fonction de la position) et ce n'est pas si mal : on ne sait pas encore quand on passera à tel endroit, mais on saura, quand on y passe, à quelle vitesse ce sera.

En isolant v^2 puis en prenant la racine, on tire

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm \sqrt{\frac{2\left[U_0 - U(x)\right]}{m}}$$

L'ambiguïté sur le signe est levée aisément : supposons qu'à t=0, F(x(0)] soit positif, alors l'accélération est positive et la vitesse croît à partir de sa valeur initiale, nulle dans notre exemple ; donc le signe de la vitesse au début du mouvement est connu, positif dans notre exemple. On peut alors séparer les variables

$$\sqrt{\frac{m}{2\left[U_0 - U(x)\right]}} \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

d'où, par intégration à partir de l'instant initial donne, sous forme intégrale 8 (on dit aussi sous forme d'une quadrature)

$$t = \int_{x(0)}^{x} \sqrt{\frac{m}{2[U_0 - U(x)]}} \, \mathrm{d}x$$

Ce qui donne, en théorie, le temps t en fonction de la position x, puis en prenant la fonction inverse la position x en fonction du temps t. Inutile de dire que si la loi de force est un tant soit peu compliquée, l'intégration est impossible explicitement et si par miracle elle l'est, inverser la relation obtenue n'est pas chose gagnée d'avance. De nos jours ce n'est plus un problème avec les logiciels de calcul formel et numérique et avec la puissance et la rapidité de travail des ordinateurs. Si l'intégration explicite est possible, le logiciel la trouve en général, sinon, les mathématiciens ont développé des algorithmes de calcul permettant de trouver une solution numérique fiable.

6.b Visualisation graphique du cas précédent.

Toutefois, avant de mener des calculs plus ou moins arides, éventuellement assistés par ordinateur, il est bon de visualiser quelques caractéristiques qualitatives du mouvement. Une première piste est le tracé de la courbe donnant l'énergie potentielle en fonction de la position.

Considérons donc un point matériel de masse m mobile dans un champ de force dérivant de l'énergie potentielle U(x). Le théorème de l'énergie mécanique permet d'affirmer que $(1/2) m \dot{x}^2 + U(x) = E$ où E est l'énergie mécanique constante calculée à partir des

^{8.} Les mathématiciens rechignent, à raison, de donner le même nom à une borne d'intégration et au nom de la variable dans l'intégrale; ils introduisent une variable muette dans l'intégrale en ajoutant un tilde : $t = \int_{x(0)}^{x} \sqrt{m/2 \left(U_0 - U(\tilde{x})\right)} \, \mathrm{d}\tilde{x}$

conditions initiales. Le tracé sur un même graphe de la fonction U (l'exemple est celui d'une énergie potentielle en $1/2 k x^2$ correspondant à une force de rappel élastique en -k x) et de la fonction constante E (la droite la plus en haut du graphe ci-dessous) permet de connaître les limitation du mouvement; en effet l'énergie cinétique est par essence positive donc, dans le cas d'une fonction U à minimum unique (on parle alors de puits de potentiel), seuls sont accessibles les points tels que E > U(x), soit dans l'exemple du graphe 1 p.14 les points entre x_{min} et x_{max} .

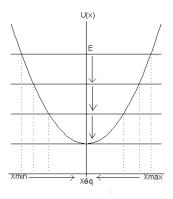


FIGURE 1 – Utilisation graphique de l'énergie potentielle.

Si, de plus, existe un faible phénomène dissipatif, par exemple une force de frottement fluide en $-\lambda v = -\lambda \dot{x}$, il y a alors diminution lente de E. En effet, on a dans ce cas

$$\begin{split} m \, \ddot{x} &= F(x) - \lambda \, \dot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} - \lambda \, \dot{x} \\ m \, \ddot{x} \, \dot{x} &= -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \, \dot{x} - \lambda \, \dot{x}^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \frac{1}{2} \, m \, \dot{x}^2 + U[x(t)] \right\} &= -\lambda \, \dot{x}^2 < 0 \end{split}$$

La droite représentative descendra progressivement, l'amplitude du mouvement diminuera jusqu'à échouer sur le point le plus bas de la courbe qui est donc une position d'équilibre puisque plus aucun mouvement ne sera possible (figure ci-dessus où l'on a figuré des niveaux de l'énergie E de plus en plus faibles.).

Voyons maintenant le cas d'un potentiel à deux puits (figure 2 p.15).

Pour une valeur initiale E_0 de l'énergie assez grande, rien n'est fondamentalement différent. Mais quand, du fait des dissipations, l'énergie descend à une valeur E_1 inférieure à la valeur U_m du maximum relatif de U(x), alors le mouvement se fait soit autour du minimum U_1 , soit autour du minimum U_2 , selon la valeur de x(t) au moment précis où E passe sous U_m . Dès lors l'évolution se fera vers X_1 ou vers X_2 . L'état (X_1, U_1) d'énergie la plus basse est un équilibre stable et l'état (X_2, U_2) est dit métastable (et l'état U_m est

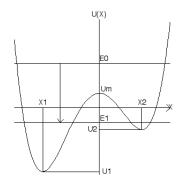


Figure 2 – Potentiel à deux puits.

instable). Remarquons aussi que si le point se retrouve à l'état métastable, il ne peut passer à l'état stable que si on lui fournit l'énergie $\Delta U = U_m - U_2$, on retrouve la notion chimique d'énergie d'activation ⁹. On a affaire à un système dont l'état final n'est pas aisément prédictible parce qu'il peut prendre deux valeurs et qu'une faible variation des conditions initiales peut modifier cet état final; on effleure ici la notion de chaos déterministe qui est développée dans le chapitre A-VII.

6.c Une autre visualisation graphique du cas précédent : l'espace des phases.

Prenons l'exemple d'un mouvement harmonique sous l'action d'une force de rappel élastique :

$$m \ddot{x} = -k x$$
 avec $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

Par intégration, après multiplication par \dot{x} (cf supra), on retrouve le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2 = E = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + \frac{1}{2}\,k\,x_0^2$$

Fondamentalement, on l'a vu, le théorème de l'énergie cinétique conduit à une relation entre position et vitesse qu'on peut visualiser en traçant le graphe des points de coordonnées x et \dot{x} (cette représentation s'appelle l'espace des phases) compatibles avec cette dernière relation. Il s'agit d'une ellipse passant par le point (x_0, v_0) (voir figure figure 3 p. 16). Dans l'exemple de cette figure, la vitesse initiale est positive donc x commence par croître à partir de sa valeur initiale, ce qui donne ici un déplacement vers la droite et le point

^{9.} Signalons enfin qu'en mécanique quantique, si la masse de la particule est très faible (un électron par exemple) et si l'énergie d'activation pas trop élevée, la particule a une probabilité faible mais non nulle de passer *spontanément*, c'est-à-dire sans apport d'énergie de l'état métastable à l'état stable, il s'agit de l'effet tunnel qui explique le fonctionnement de certaines diodes et transistors.

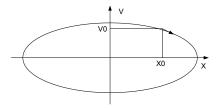


FIGURE 3 – Espace des phases.

représentatif de la position et de la vitesse se déplace, lorsque le temps passe, dans le sens horaire, ce qu'indique la petite flèche.

Cette représentation indique clairement que le mouvement est borné par deux valeurs opposées de x, les deux extrémités de l'axe horizontal de l'ellipse.

Un point important à ne pas rater est que la courbe est fermée. Après un tour le point représentatif repasse par les mêmes valeurs de la position et de la vitesse, donc le second tour se fera dans les mêmes conditions que le premier, en particulier pendant la même durée, et ainsi de suite pour le troisième tour, le quatrième etc. On en déduit, bien sûr, que le mouvement est périodique.

Dans le cas d'un faible frottement fluide, l'énergie décroîtra progressivement (cf supra) et l'ellipse se transformera en spirale elliptique convergeant lentement mais sûrement vers le point (0,0) traduisant le repos à l'équilibre.

6.d Mouvements unidirectionnels avec une force dépendant de la vitesse.

Typiquement, il s'agit de résoudre une équation de la forme :

$$m \ddot{x} = F(\dot{x})$$

soit, en notant $v = \dot{x}$

$$m \dot{v} = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(v)$$

Les variables se séparent en

$$m \frac{\mathrm{d}v}{F(v)} = \mathrm{d}t$$

et, en notant $v_0 = v(0)$

$$t = m \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{F(v)}$$

qui donne t en fonction de v, d'où v en fonction de t et par intégration 10 x en fonction de t... tout cela avec les mêmes réserves que plus haut, c'est-à-dire à condition que les calculs soient explicitement possibles, faute de quoi il faudra se rabattre vers des résolutions numériques assistées par ordinateur.

Précisons les choses sur l'exemple d'une chute libre verticale dans un champ de pesanteur uniforme avec une force de frottement réaliste proportionnelle au carré de la vitesse (voir mécanique des fluides aux grands nombres de REYNOLDS). On a donc, avec un axe des z vertical descendant, et en notant $v=\dot{z}$

$$m\dot{v} = ma - kv^2$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que la vitesse qui annule l'accélération est putativement la vitesse limite, notée v_{∞} , qui vérifie donc

$$0 = m g - k v_{\infty}^2$$

on peut donc réécrire ainsi l'équation du mouvement

$$m\,\dot{v} = k\,(v_\infty^2 - v^2)$$

La séparation des variables, puis une décomposition en éléments simples de la fraction obtenue, conduit à

$$dt = \frac{m}{k} \frac{1}{v_{\infty}^2 - v^2} dv = \frac{m}{2kv_{\infty}} \left[\frac{dv}{v_{\infty} + v} + \frac{dv}{v_{\infty} - v} \right]$$

En reportant dans le facteur initial la valeur de v_{∞} et en intégrant avec, pour fixer les idées, v(0) = 0

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k g}} \left[\ln \frac{v_{\infty} + v}{v_{\infty}} - \ln \frac{v_{\infty} - v}{v_{\infty}} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k g}} \ln \left(\frac{v_{\infty} + v}{v_{\infty} - v} \right)$$

La suite est sensiblement simplifiée si l'on se souvient que

$$\operatorname{argth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad \operatorname{donc} \qquad \frac{1}{2} \ln \left(\frac{v_{\infty} + v}{v_{\infty} - v} \right) = \ln \sqrt{\frac{1+v/v_{\infty}}{1+v/v_{\infty}}} = \operatorname{argth}(v/v_{\infty})$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{m}{k g}} \operatorname{argth}(v/v_{\infty})$$
 donc $v = v_{\infty} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{k g}{m}} t\right)$

Plutôt que d'intégrer ce résultat (encore faut-il penser que, par analogie avec tg qui a une primitive en ln cos, la fonction th a une primitive en ln ch et bien gérer le coefficient

^{10.} L'exemple qui suit propose une autre voie pour trouver la fonction x(t), en général plus simple.

 $\sqrt{\frac{k\,g}{m}}$, source potentielle d'erreur), une méthode consiste dans un premier temps à exprimer x en fonction de v en revenant à

$$\mathrm{d}t = \frac{m}{k} \frac{1}{v_{\infty}^2 - v^2} \,\mathrm{d}v$$

d'où, en prenant l'origine à la position initiale du point (x(0) = 0) et toujours dans l'hypothèse v(0) = 0 pour fixer les idées et puisque $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$

$$x = \int_0^v v \, dt = \frac{m}{k} \int_0^v \frac{v}{v_\infty^2 - v^2} \, dv = \dots = \frac{m}{2 \, k} \ln \left(\frac{v_\infty^2}{v_\infty^2 - v^2} \right)$$

C'est astucieux, car c'est plus simple et qu'il suffit désormais de reporter l'expression de v en fonction de t pour avoir x en fonction de t.

6.e Mouvements pluridirectionnels.

Prenons l'exemple d'une force dépendant de la position

$$m \frac{\mathrm{d}^2 \overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}(M) = \overrightarrow{F}(x, y, z)$$

la projection sur les trois axes donne trois équations couplées

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F_x(x, y, z)$$
$$m \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = F_y(x, y, z)$$
$$m \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = F_z(x, y, z)$$

Inutile de dire que rares sont les cas où l'on arrive à sortir vivant de ce bourbier. Un de ces cas miraculeux est le cas linéaire d'une chute libre avec frottement fluide proportionnel à la vitesse, possible avec un petit corps dans un fluide très visqueux (voir mécanique des fluides aux petits nombres de REYNOLDS au chapitre B-XIII).

Supposons qu'à t = 0 la vitesse soit horizontale de module v_0 et orientons l'axe vertical vers le bas et prenons pour origine la position initiale du point

$$m \frac{\mathrm{d}^2 \overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = m \overrightarrow{g} - \lambda \overrightarrow{v}$$
 avec $M(0) = O$ et $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{v}_0$

En projection sur les axes

$$m \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda \dot{x}$$
 avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

$$m\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda\,\dot{y}$$
 avec $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$
$$m\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = m\,g - \lambda\,\dot{z}$$
 avec $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$

Une première intégration donne

$$\dot{x} = v_0 \exp\left(-\frac{\lambda t}{m}\right)$$

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{z} = \frac{m g}{\lambda} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda t}{m}\right)\right]$$

Une seconde intégration donne

$$x = \frac{m v_0}{\lambda} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda t}{m}\right) \right]$$
$$y = 0$$
$$z = \frac{m g}{\lambda} \left\{ t + \frac{m}{\lambda} \left[\exp\left(-\frac{\lambda t}{m}\right) - 1 \right] \right\}$$

ce qui est l'équation horaire (ou paramétrique) de la trajectoire. Si l'on veut l'équation cartésienne, on peut ici éliminer aisément le temps t entre x et z avec

$$\left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda t}{m}\right)\right] = \frac{\lambda x}{m v_0}$$

et donc

$$t = -\frac{m}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{\lambda x}{m v_0} \right)$$

On reporte ces deux dernières relations aux deux endroits de l'expression de z(t)

$$z = \frac{m g}{\lambda} \left[-\frac{m}{\lambda} \ln \left(1 - \frac{\lambda x}{m v_0} \right) - \frac{x}{v_0} \right]$$

Mais attention, ce n'est pas une méthode, c'est un miracle; en général, on doit se retourner vers des méthodes numériques.