

Chapitre B-III

Référentiel géocentrique ou héliocentrique ?

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On montrera dans ce chapitre comment le modèle géocentrique de Ptolémée, compliqué par la méthode des épicycles pour expliquer la rétrogradation des planètes, a été remplacé par le modèle héliocentrique de Copernic.

On étudiera ensuite en quoi les référentiels de Foucault et terrestre, peuvent être en pratique considérés comme galiléens bien qu'il ne le soient pas, au contraire du référentiel de Copernic. On en profitera pour expliquer le phénomène des marées, définir le champ de pesanteur et étudier les conséquences de la rotation de la Terre.

Le seul pré-requis mathématique est un peu d'aisance dans la résolution des équations différentielles linéaires pour le dernier paragraphe.

Table des matières

B-III Référentiel géocentrique ou héliocentrique ?	1
1 Le modèle de Ptolémée.	4
2 La rétrogradation et la méthode des épicycles.	5
3 Le modèle de Copernic.	6
4 Indications sur la loi de gravitation universelle.	7
5 Du référentiel de Copernic à celui de Foucault ; les marées.	9
5.a Le référentiel de Foucault.	9
5.b Ordres de grandeur.	10
5.c Les marées.	11
6 Du référentiel de Foucault au référentiel terrestre ; le champ de pesanteur. 14	
6.a Jour sidéral et jour solaire.	15
6.b La pesanteur.	16
6.c Loi de la dynamique dans le référentiel terrestre.	18
7 Mise en évidence de la force de Coriolis.	19
7.a Déviation vers l'est dans une chute libre.	20
7.b Le pendule de Foucault.	23

1 Le modèle de Ptolémée.

Le monde antique a accumulé et transmis un corpus de connaissances astronomiques, issu de l'observation du soleil, de la lune et du ciel nocturne :

- Les étoiles dans le ciel sont fixes les unes par rapport aux autres et la voûte céleste tourne autour de la Terre.
- Le soleil tourne autour de la terre en un jour et se déplace par rapport à la voûte céleste dont il fait le tour en un an.
- La lune tourne autour de la Terre en un peu plus d'un jour et se déplace par rapport à la voûte céleste dont elle fait le tour en un mois ; la lune est plus proche de la Terre que le Soleil puisqu'elle arrive à l'occulter lors des éclipses.
- En outre cinq astres (l'un d'eux, Mercure, est difficilement observable car toujours très près du Soleil) se déplacent par rapport à la voûte céleste ; on les appelle planètes (qui veut dire «errant» en grec) ; outre Mercure, ce sont Venus, Mars, Jupiter et Saturne.

Bien sûr, on place la Terre au centre de l'univers et elle ne tourne pas sur elle-même¹.

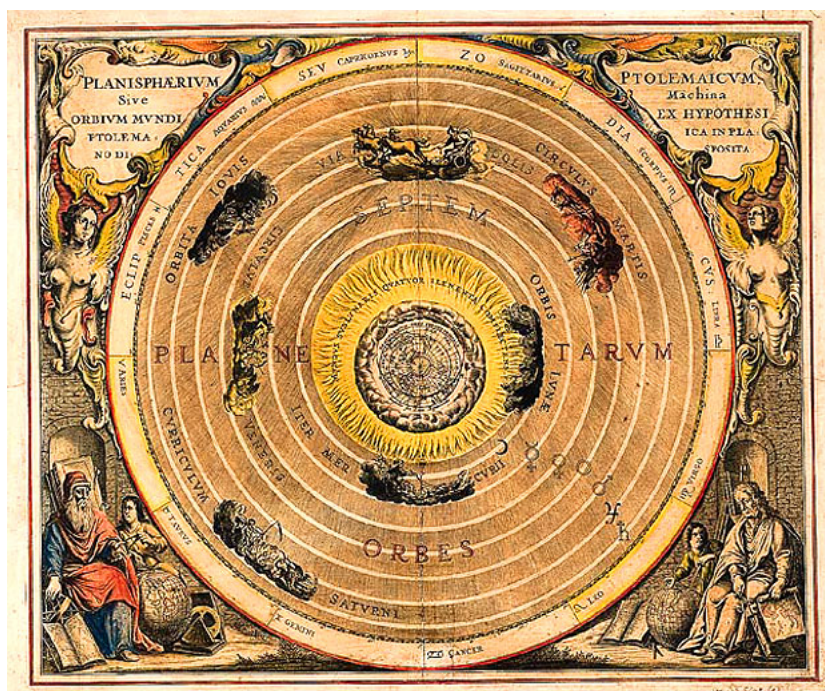


FIGURE 1 – Le modèle de Ptolémée.

1. Le grec HÉRACLIDE DU PONT (IVe siècle avant J.C.) a certes très tôt prédit la rotation de la Terre, mais dans le monde grec circulaient de nombreuses théories très diverses ; la sienne n'a pas été retenue par la suite.

Le document 1 p. 4 est une représentation du monde, dans le système transmis par PTOLÉMÉE (IIe siècle après J.C.) et dont il reste une version arabe, l'Almageste. La Terre est une sphère contenant le feu central et enchâssée, telle une poupée gigogne, dans diverses sphères portant, dans cet ordre, les orbites de la Lune, de Mercure, de Vénus, du Soleil, de Mars, de Jupiter, de Saturne et enfin la sphère des étoiles.

2 La rétrogradation et la méthode des épicycles.

Dans la vision d'un monde créé parfait, on pensait que les planètes devaient avoir un mouvement circulaire uniforme. Or, très tôt, dès l'Antiquité, l'observation des positions par rapport aux étoiles successivement occupées d'un jour à l'autre par une même planète fait apparaître régulièrement un mouvement rétrograde se faisant en sens inverse du mouvement habituel.

Voici une photographie (document 2 p. 5) qui superpose les positions de Mars dans le ciel à l'une de ces périodes.



FIGURE 2 – La rétrogradation de Mars.

Pour concilier la perfection du mouvement circulaire et les observations astronomiques, on a alors proposé un modèle, certes un peu tordu, où chaque planète a un mouvement

circulaire² uniforme autour d'un centre qui a lui-même un mouvement circulaire³ uniforme autour de la Terre ; la trajectoire est alors ce que les géomètres appellent une épicycloïde. En voici une idée sur la figure 3 p. 6.

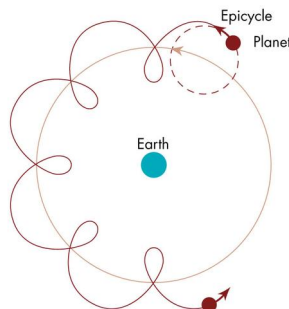


FIGURE 3 – La théorie des épicycles.

3 Le modèle de Copernic.

Il faut bien comprendre qu'on avait ni dans l'Antiquité, ni au Moyen-Âge les moyens de mesurer la distance de la Terre à une planète⁴, par contre il était aisé de mesurer sa direction par rapport aux étoiles. Or si l'on multiplie par un même facteur les rayons du déférent et de l'épicycle, on ne modifie pas cette direction et donc, on ne modifie en rien la théorie de l'époque.

Copernic s'est aperçu⁵ qu'hormis pour la Lune, la direction des centres des épicycles était à peu près identiques, pratiquement celle du Soleil. Au lieu de prendre arbitrairement les rayons des déférents, il les choisit tous égaux au rayon de l'orbite solaire ; dès lors le Soleil devenait le centre de tous les épicycles.

Les réticences théologiques sont rudes et l'on présente officiellement les choses ainsi : la Lune et le Soleil tournent autour de la Terre et les planètes autour du Soleil ; néanmoins dans les esprits l'héliocentrisme est né.

Remarque : La direction Terre-Mars (par exemple) par rapport à la voûte céleste ne dépend pas du choix de l'origine. Puisque dans le point de vue géocentrique, les épicycles expliquent qualitativement la rétrogradation de Mars, dans le point de vue héliocentrique, le mouvement épicycloïdal, devenu composition des mouvements de la Terre et de Mars autour du Soleil, l'explique aussi sans qu'il soit besoin d'une quelconque redémonstration.

2. Ce premier cercle est l'épicycle.

3. Ce second cercle est le déférent.

4. Hormis celle de la Lune, assez proche pour faire de la triangulation à partir de deux endroits de la Terre très éloignés l'un de l'autre.

5. J'abrège et simplifie considérablement les choses, bien sûr.

4 Indications sur la loi de gravitation universelle.

Pour l'interaction entre la Terre et le Soleil, remarquons que le rayon solaire (695 000 km) et *a fortiori* celui de la Terre (6 400 km) sont très petits devant la distance Terre-Soleil (150 000 000 km), ce qui permet de leur appliquer la mécanique du point. Du reste, ces deux astres sont presque sphériques et il se trouve que pour une interaction en $1/r^2$ (en anticipant ce qui suit), une sphère se comporte comme une masse ponctuelle située en son centre (ce résultat sera démontré en électrostatique objet du chapitre C-I).

Le chapitre B-II (dynamique du point) indique que pour faire de la mécanique, il nous faut un référentiel galiléen et une loi de force. Les observations et lois de KEPLER ont permis à NEWTON de donner une réponse à ces deux questions qui soit compatible avec les faits expérimentaux, c'est à dire les mouvements des planètes dans le système solaire.

Le référentiel dit de COPERNIC, dont l'origine est au centre du Soleil⁶ (ou plutôt au centre de gravité du système solaire, ce qui ne fait pas une grande différence car la masse du Soleil est très grande devant celle des planètes, mille fois plus grande, par exemple, que celle de Jupiter, la plus grosse des planètes) et dont les axes pointent dans des directions fixes par rapport à la voûte céleste, est réputé galiléen, tout au moins pour les mouvements des planètes du système solaire et sa proche banlieue.

Enfin NEWTON postule⁷ en 1684 une loi d'attraction universelle : deux corps (ponctuels dans l'approximation détaillée ci-dessus) A et B exercent l'un sur l'autre une force parallèle à la droite qui les joint (voir B-II : c'est lié à la conservation du moment cinétique), attractive et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Si l'on appelle r cette distance et $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|AB\|}$ le vecteur unitaire de la droite AB , dirigé de A vers B , la force $F_{A \rightarrow B}$ exercée par A sur B est de la forme :

$$F_{A \rightarrow B} = -Cte \frac{\vec{u}}{r^2}$$

ou encore

$$F_{A \rightarrow B} = -Cte \frac{\vec{AB}}{\|AB\|^3}$$

Par ailleurs, la constante dépend du corps en A , d'autant plus grande qu'il est plus gros et/ou plus dense. On introduit donc un coefficient caractéristique du corps A , notée M_A , appelée *masse gravitationnelle* de A , tel que :

$$F_{A \rightarrow B} = -Cte M_A \frac{\vec{AB}}{\|AB\|^3}$$

6. Pour le mouvement des étoiles de notre galaxie, la Voie Lactée, il faudra prendre un référentiel centré sur le centre de masse de la galaxie et pointant vers des galaxies suffisamment lointaines pour qu'elles semblent à peu près fixes les unes par rapport aux autres, créant ainsi une voûte galactique remplaçant la voûte céleste)

7. Le chapitre B-IV (mouvement à force centrale) expliquera comment Newton est arrivé à cette conclusion.

la proportionnalité étant une façon de définir⁸ la masse gravitationnelle.

Mais par symétrie, l'on peut dire aussi, en introduisant la masse gravitationnelle de B , que :

$$F_{B \rightarrow A} = -Cte M_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\|BA\|^3} = Cte M_B \frac{\overrightarrow{AB}}{\|AB\|^3}$$

Or le théorème d'action et de réaction affirme que $F_{B \rightarrow A} = -F_{A \rightarrow B}$ donc si les deux formules sont vraies, ce ne peut être que parce que $F_{A \rightarrow B}$ est proportionnel à la fois à M_A et à M_B et l'on peut donc écrire :

$$F_{A \rightarrow B} = -G M_A M_B \frac{\overrightarrow{AB}}{\|AB\|^3}$$

où G est une constante universelle dont la valeur dépend du choix des unités.

A ce stade, un corps possède une masse gravitationnelle qui intervient dans la loi de gravitation et une masse inertielle qui lie force subie et accélération et il n'y a strictement aucune raison⁹ *a priori* pour que ces deux masses soient identiques.

L'étude du mouvement des planètes (lois de KEPLER) est compatible avec une proportionnalité entre ces deux masses, et bien sûr, on se presse de choisir le même corps-étalon comme unité de masse inertielle et de masse gravitationnelle, ce qui revient à confondre ces deux masses. Dans le cadre de la mécanique classique, on ne peut expliquer cette identité qui doit donc être postulée ; seule la seconde théorie de relativité d'EINSTEIN, le relativité générale (voir le chapitre B-XXII), propose une explication¹⁰.

La suite de ce chapitre est donc fondée sur trois postulats :

- **Le référentiel de COPERNIC est galiléen** (voir sa description ci-dessus).
- **Les corps s'attirent selon la loi de gravitation universelle**, énoncée ci-dessus.
- **Il y a identité entre masse inertielle et masse gravitationnelle** (on parlera donc de masse, tout court).

Dans le système international, les unités de longueur, de masse, de temps et de force sont respectivement le mètre, le kilogramme, la seconde et le Newton, unité composée équivalente à 1 kg m s^{-2} . Dans ce système la constante de gravitation universelle vaut :

$$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} = 6,673 \cdot 10^{-11} \cdot \text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Nous n'allons pas plus loin ici ; d'autres développements (avec des redites pour que

8. On procède théoriquement ainsi : on place une masse unité $\mathcal{U}$ en un point A et l'on mesure le module F_U de la force qu'exerce $\mathcal{U}$ sur un corps $\mathcal{B}$ placé en un point B puis l'on place un corps $\mathcal{A}$ au même point A et l'on mesure le module F_A de la force qu'il exerce sur le même corps $\mathcal{B}$ situé au même point B ; par définition, la masse de $\mathcal{A}$ est le rapport F_A/F_U

9. J'en veux pour preuve que, pour l'interaction électrique, elle aussi en $\overrightarrow{u}/r^2$, les coefficients sont les charges électriques et non les masses inertielles.

10. En simplifiant, il n'y a pas d'attraction mais un corps A déforme l'espace et en courbe les droites ; un point B se déplace tout droit mais sur une droite courbée et semble donc attiré.

les différents chapitres puissent être lus indépendamment les uns des autres) apparaîtront ailleurs dans ce cours.

5 Du référentiel de Copernic à celui de Foucault ; les marées.

5.a Le référentiel de Foucault.

Si le référentiel de COPERNIC s'impose pour l'étude du système solaire, il n'est cependant pas adapté pour ce qui se passe à proximité de la Terre (mouvements de la Lune et des satellites artificiels). On lui substitue le référentiel de FOUCAULT qui a pour origine le centre de gravité de la Terre dont les axes pointent dans les mêmes directions que celles du référentiel de COPERNIC. Il est donc en translation par rapport à ce dernier puisqu'il n'y a pas de rotation relative des axes. Mais attention, ce n'est pas une translation uniforme car le centre de la Terre n'a pas un mouvement rectiligne dans le référentiel de COPERNIC donc le référentiel de FOUCAULT n'est pas galiléen. Par ailleurs, notons que la Terre tourne en un jour par rapport aux étoiles donc par rapport au référentiel de FOUCAULT.

Considérons un point matériel de masse m , situé en un point mobile M , soumis aux attractions de gravitation de la Terre de masse M_T et de centre T , de la Lune de masse M_L et de centre L et du soleil de masse M_S de centre S (les autres planètes sont trop loin et pas assez lourdes, comparées au Soleil) et d'éventuelles autres forces (frottements dans l'air, forces de contact avec le sol, etc.) dont la somme est notée $\vec{F}$. Dans le référentiel de COPERNIC, galiléen, pris comme référentiel absolu, l'on a :

$$m \vec{a}_{\text{abs.}} = \vec{F} - G m M_T \frac{\vec{TM}}{\|\vec{TM}\|^3} - G m M_L \frac{\vec{LM}}{\|\vec{LM}\|^3} - G m M_S \frac{\vec{SM}}{\|\vec{SM}\|^3}$$

Dans le changement de référentiel, le référentiel de FOUCAULT étant pris comme référentiel relatif, il n'y a pas de rotation donc d'une part il n'y a pas d'accélération de CORIOLIS et d'autre part l'accélération d'entraînement est uniforme et se confond avec l'accélération de l'origine du référentiel relatif, le centre de la Terre dans ce cas, par rapport au référentiel absolu (voir le chapitre B-II sur la dynamique du point). La loi de la dynamique, appliquée à la Terre, centrée en T , soumise aux attractions de la Lune et du Soleil (on néglige celle de la masse m supposée ridiculement petite par rapport à celle de la Terre), en admettant provisoirement que, puisque la Terre est quasiment sphérique, les forces de gravitation se calculent comme si elle était ponctuelle en T (résultat démontré au chapitre C-I, rappelons-le), permet de calculer l'accélération de T qui est l'accélération d'entraînement :

$$M_T \vec{a}_{\text{entr.}} = -G M_T M_L \frac{\vec{LT}}{\|\vec{LT}\|^3} - G M_T M_S \frac{\vec{ST}}{\|\vec{ST}\|^3}$$

Revenons au point de masse m , puisque l'accélération de CORIOLIS est nulle, on a :

$$m \vec{a}_{rel.} = m \vec{a}_{abs.} - m \vec{a}_{entr.} = m \vec{a}_{abs.} - \frac{m}{M_T} (M_T \vec{a}_{entr.})$$

En y reportant les deux relations précédentes, l'on en déduit :

$$m \vec{a}_{rel.} = \vec{F} - G m M_T \frac{\overrightarrow{TM}}{\|TM\|^3} + G m M_L \left(\frac{\overrightarrow{LT}}{\|LT\|^3} - \frac{\overrightarrow{LM}}{\|LM\|^3} \right) + G m M_S \left(\frac{\overrightarrow{ST}}{\|ST\|^3} - \frac{\overrightarrow{SM}}{\|SM\|^3} \right)$$

Les influences de la Lune et du Soleil n'apparaissent plus que par la différence de deux termes qui sont assez proches car M est proche de T vis-à-vis des distances Terre-Lune et Terre-Soleil. En bonne approximation, ces différences sont négligeables devant l'attraction de la Terre et l'on peut écrire :

$$m \vec{a}_{rel.} = \vec{F} - G m M_T \frac{\overrightarrow{TM}}{\|TM\|^3}$$

On peut donc, puisque la loi de la dynamique se formule de façon apparemment normale, je veux dire apparemment sans forces d'inertie, considérer le référentiel de FOUCAULT comme un référentiel galiléen à la condition expresse de ne plus du tout tenir compte des attractions de la Lune et du Soleil ; comme cette condition nous simplifie la vie, on ne la considérera pas comme une entrave mais comme une libération.

5.b Ordres de grandeur.

On se propose ici de vérifier la validité de l'approximation concluant le précédent paragraphe. L'attraction de la Terre sur le corps en M , supposé voisin de la surface terrestre est, en module, de l'ordre de grandeur de :

$$F_T = \frac{G m M_T}{R_T^2}$$

Appelons R_T le rayon de la Terre et D_L la distance Terre-Lune.

Considérons les deux termes de l'influence *différentielle* de la Lune, à savoir :

$$G m M_L \left(\frac{\overrightarrow{LT}}{\|LT\|^3} - \frac{\overrightarrow{LM}}{\|LM\|^3} \right)$$

Les deux termes ont à peu près la même direction et le module de la différence est alors à peu près la différence des modules ; il est maximal lorsque les distances TL et ML sont les plus écartées, soit quand T , M et L sont alignés (on s'aidera de la figure du paragraphe

suivant si l'on visualise mal les choses). Pour un point proche de la surface, le maximum est alors :

$$F_{L\max} = G m M_L \left(\frac{1}{D_L^2} - \frac{1}{(D_L + R_T)^2} \right)$$

$$F_{L\max} = \frac{G m M_L}{D_L^2} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{R_T}{D_L})^2} \right)$$

soit, après un développement limité classique :

$$F_{L\max} \approx \frac{G m M_L}{D_L^2} \left[1 - \left(1 - 2 \frac{R_T}{D_L} \right) \right]$$

$$F_{L\max} \approx \frac{2 G m M_L R_T}{D_L^3}$$

Effectuons le rapport du terme lunaire au terme terrestre :

$$\frac{F_{L\max}}{F_T} = 2 \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{D_L} \right)^3$$

Les données astronomiques conduisent à $R_T/D_L = 1/60$ et $M_L/M_T = 1/81$ d'où $F_{L\max}/F_T = 1,1 \cdot 10^{-7}$

De la même façon, le rapport du terme solaire au terme terrestre est :

$$\frac{F_{S\max}}{F_T} = 2 \frac{M_S}{M_T} \left(\frac{R_T}{D_S} \right)^3$$

Les données astronomiques donnent $R_T/D_S = 1/(2,3 \cdot 10^4)$ et $M_S/M_T = 3,3 \cdot 10^5$ d'où $F_{S\max}/F_T = 0,54 \cdot 10^{-7}$, soit la moitié du terme lunaire.

Au vu de ces ordres de grandeur, l'approximation qui considère que le référentiel de FOUCAULT est galiléen est donc fondée.

Remarque : Pour Jupiter la plus grosse des planètes, on a $M_J/M_T = 318$ et la distance Terre-Jupiter est variable, celle Soleil-Jupiter, plus ou moins la distance Soleil-Terre, donc en moyenne la première des deux distances ce qui donne $D_J/R_T = 1,22 \cdot 10^5$ et conduit à $F_{J\max}/F_T = 3,5 \cdot 10^{-13}$, soit quelque chose de parfaitement indécélable en comparaison des termes lunaire et solaire.

5.c Les marées.

On verra, dans le cours d'hydrostatique (chapitre B-XII), que la surface de l'eau est perpendiculaire au champ de forces. Même si les composantes lunaire et solaire sont faibles

par rapport à la composante terrestre, elles peuvent générer, si la géométrie s'y prête, des pentes dont l'ordre de grandeur (10^{-7}) a été calculé ci-dessus et, sur une circonférence terrestre de l'ordre de grandeur 10^7 m, elles peuvent potentiellement générer des dénivélés de l'ordre du mètre donc décelables.

La figure 4 p. 12 montre, en différents points de la surface terrestre, la composante lunaire qui comporte un terme attractif (en vert, figure du haut) valant $-G m M_L \frac{\vec{LM}}{\|\vec{LM}\|^3}$ dépendant, en direction et module, de la position du point M , d'autant plus grand que M est plus proche de la Lune et d'un terme répulsif (en bleu, figure du haut), indépendant du point M , opposé à l'attraction lunaire au centre de la Terre, à la distance moyenne, valant $G m M_L \frac{\vec{LT}}{\|\vec{LT}\|^3}$

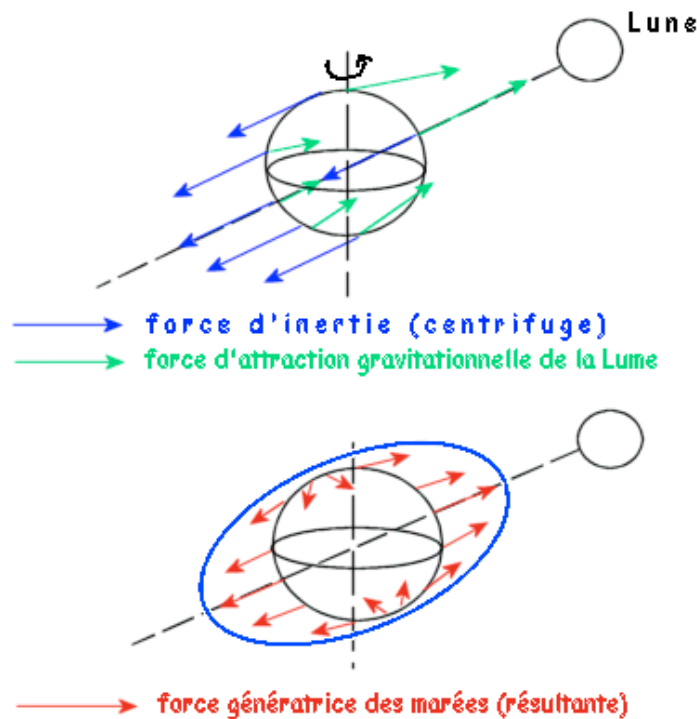


FIGURE 4 – Les marées.

Sur la même figure, en bas, dessinée en rouge, la somme vectorielle des deux termes. On y voit clairement que la somme est attractive sous la Lune, répulsive à l'opposé et plutôt faible à 90° de la Lune, ce qui peut déformer l'océan en créant deux bourrelets l'un sous la Lune, l'autre diamétralement opposé. Bien évidemment, pour rendre les choses lisibles, la Lune a été rapprochée de la Terre et les différences entre modules des deux termes accentuées.

Pendant une journée, la Terre fait un tour sur elle-même alors que la Lune ne bouge

pas trop ; un point donné de la Terre, en cette journée passe sous les deux bourrelets et voit donc deux marées par jour. Si la lune ne bougeait pas, deux marées hautes seraient séparées de 12 heures ; comme la Lune tourne dans le même sens que la Terre, entraînant avec elle le bourrelet de marée, après un demi-tour le bourrelet de marée opposé a pris de l'avance et deux marées hautes successives sont séparées d'un peu plus de 12 heures.

Sur la seconde image de la figure précédente, en notant que l'axe de rotation de la Terre est incliné par rapport au plan de l'orbite lunaire, imaginez un point près du pôle nord décrivant, avec la rotation de la Terre, un petit cercle. Quand il en est à l'extrême gauche, il n'est pas sous le bourrelet de marée à gauche qui est bien plus bas ; il est dans la zone de marée basse et quand il en est à l'extrême droite, il est du côté du bourrelet de marée haute à droite en haut. Dans les régions polaires, il y a donc théoriquement une marée haute et une basse par jour.

La réalité est plus complexe à cause de la rotation terrestre. En un point donné de l'océan, selon les endroits, la force de marée est périodique, semi-diurne ou diurne. On a donc affaire à une problématique typique d'oscillateur excité par une sollicitation périodique qui génère des phénomènes de résonance, de déphasage, etc. Dans la pratique, la marée haute est très en retard par rapport au passage de la Lune dans le méridien du point où l'on se trouve ; la figure ci-dessus est donc fausse... mais par nécessité pédagogique. Par ailleurs, le bourrelet de marée haute qui tourne sous la Lune par rapport à la Terre, dans le sens opposé à la rotation de celle-ci, rencontre les obstacles que sont les continents, formant par endroits des effets d'entonnoir, comme dans la baie du Mont-Saint-Michel ¹¹.

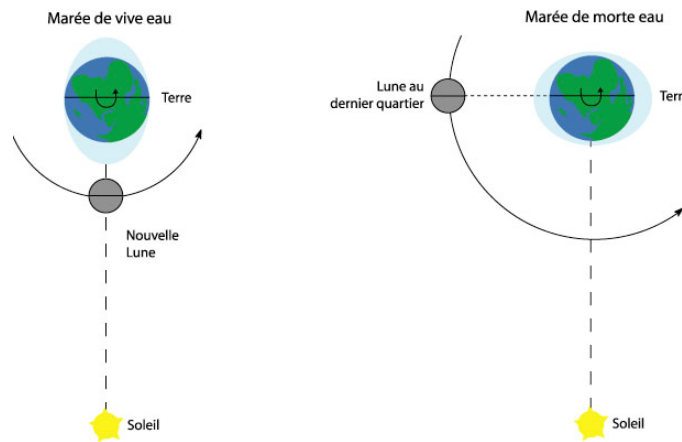


FIGURE 5 – Vive eau et morte eau.

Une complication supplémentaire : l'eau des océans est soumise aussi à une force dif-

11. ou la baie de Fundy, plus proche de nos amis québécois.

férentielle due au Soleil dont on a vu qu'elle avait une influence à peu près moitié de l'influence lunaire. La géométrie Terre-Lune-Soleil se modifie à une période mensuelle. A la pleine lune et à la nouvelle Lune, les trois astres sont alignés (on dit qu'il y a *syzygie*¹²), les influences s'ajoutent et les marées ont une forte amplitude, on les appelle marées de *vive eau* ; au contraire, au premier et au dernier quartier, les astres sont en quadrature et les influences se contrarient et les marées ont une faible amplitude, on les appelle marées de *morte eau*. Aux effets d'excitation-oscillation près, il y a potentiellement un facteur trois entre les deux ($1 + 0,5 = 1,5$ pour la vive eau et $1 - 0,5 = 0,5$ pour la morte eau, avec une influence lunaire comptée pour 1 et une solaire comptée pour 0,5). Tout ceci est visualisé sur la figure 5 p. 13.

Et ce n'est pas tout ! Les mouvements apparents du Soleil et de la Lune ne se font pas dans le même plan ; il y a donc addition vectorielle des influences. Cette addition a un module maximal quand les astres sont presque alignés près de la droite intersection des plans des deux orbites ce qui se passe deux fois par an, près des équinoxes, et donne lieu aux célèbres marées d'équinoxe au début de l'automne et au début du printemps.

Il ne faut pas perdre de vue que ces phénomènes de marée sont la preuve que c'est bien le référentiel de COPERNIC et non celui de FOUCAULT qui est galiléen sinon, l'action de la Lune sur un corps de masse m au point M ne serait pas le terme différentiel étudié ci-dessus valant au maximum $F_L = \frac{2GmM_LR_T}{D_L^3}$ (*cf supra*) mais tout simplement $-GmM_L \frac{\vec{LM}}{\|LM\|^3}$ de module $F'_L = \frac{GmM_L}{D_L^2}$ ne générant qu'une marée par jour, sous la Lune, au déphasage excitant-excité près, et valant $F'_L/F_L = D_L/(2R_T) = 30$ fois plus, ce qui ne saurait rester inaperçu.

Signalons enfin qu'il n'y a pas que la mer qui soit sensible aux forces de marée ; la terre ferme se déforme elle aussi mais moins. On ne s'en aperçoit pas parce qu'on est dessus et qu'au contraire de l'eau, le sol n'est pas fluide et ne se déplace pas latéralement comme la marée montante qui envahit les baies.

6 Du référentiel de Foucault au référentiel terrestre ; le champ de pesanteur.

Si le référentiel de FOUCAULT s'impose pour l'étude des satellites artificiels de la terre, il n'est cependant pas adapté pour ce qui se passe sur la terre ferme, au laboratoire de physique. On lui substitue le référentiel terrestre qui a pour origine le centre de gravité de la Terre qu'on notera désormais O dont les axes sont fixes par rapport au sol. Comme on a pris soin¹³ de choisir parmi les trois directions communes des axes des référentiels de COPERNIC et FOUCAULT celle de l'axe de rotation de la Terre par rapport aux étoiles, pointant approximativement vers l'étoile polaire et qu'on notera désormais Oz , le référentiel

12. Comme deux boeufs ensemble (sy(n)- en grec) sous le même joug (zyg(os) en grec) ; le rêve au Scrabble.

13. Il était inutile que je le disse (par pitié, ne supprimez pas le second "s", j'y tiens beaucoup) jusqu'ici

terrestre a donc, par rapport au référentiel de FOUCAULT, un mouvement de rotation autour de l'axe Oz , avec une vitesse angulaire remarquablement constante à nos échelles de temps.

6.a Jour sidéral et jour solaire.

Attention toutefois à ne pas dire que la Terre tourne en un jour de 24 heures soit 86 400 secondes. Il s'agit là du jour solaire (et encore moyen, car celui-ci n'est pas régulier, comme on le verra au chapitre B-IV « problème à deux points, mouvements à force centrale ») entre deux passages du soleil au méridien. Ce qui nous intéresse, c'est la rotation de la Terre par rapport aux étoiles. Aidons-nous de la figure 6 p. 15.

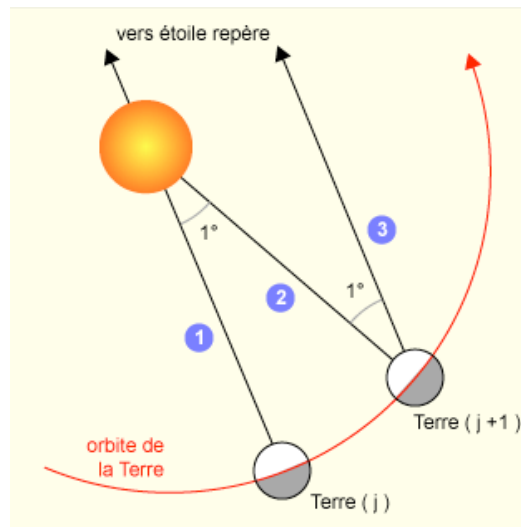


FIGURE 6 – Jour sidéral, jour solaire.

A midi au jour j , l'on repère l'étoile derrière le Soleil (en pratique, on téléphone aux antipodes et l'on repère l'étoile diamétralement opposée... ou quelque chose de ce style). Comme la Terre se déplace sur son orbite dans le même sens que sa rotation sur elle-même, le jour suivant $j + 1$ à midi, par rapport à l'étoile repérée la veille, la Terre a fait un peu plus qu'un tour d'à peu près un degré (360° en 365 jours!) donc :

un jour solaire = un jour sidéral¹⁴ plus environ 1°

Si par la pensée, on dessine sur la même figure ce qui se passe à midi le jour $j + 2$, on se convainc aisément que le décalage a doublé donc :

deux jours solaires = deux jours sidéraux plus environ 2°

Et ainsi de suite ; au bout de l'année, 365 jours plus tard, la somme des décalages fait exactement 360° et l'on revient au même point de l'orbite sur la figure donc par rapport

14. Du latin sidus, sideris, n. qui signifie l'astre, l'étoile.

aux étoiles, ce qui fait un jour sidéral, donc :

365 jours solaires=365 jours sidéraux plus un jour sidéral en plus

En fait en tenant compte des années bissextiles et de la correction grégorienne 365,2425 jours solaires=366,2425 jours sidéraux

ce qui met le jour sidéral à $T_{\text{sid.}} = 86\,164$ secondes et la vitesse angulaire de rotation sidérale de la Terre à :

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{T_{\text{sid.}}} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

6.b La pesanteur.

Résumons : l'origine du référentiel terrestre est le centre O de la Terre, son axe Oz , de vecteur unitaire $\vec{e}_z$, est l'axe des pôles c'est-à-dire l'axe de rotation de la Terre dans le référentiel de FOUCAULT, rotation associée au vecteur rotation $\vec{\Omega}_T = \Omega_T \vec{e}_z$ de module (ou norme) $\Omega_T = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$; les deux autres axes Ox et Oy , dans le plan équatorial sont fixes par rapport au sol.

Dans le changement de référentiel entre celui de FOUCAULT, jouant cette fois-ci le rôle de référentiel absolu, galiléen dans l'approximation justifiée plus haut, et le terrestre jouant le rôle de référentiel, non galiléen, l'accélération d'entraînement en un point M se projetant en H sur l'axe Oz est, dans le cadre d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe (voir chapitre B-II sur la dynamique du point) :

$$\vec{a}_{\text{entr.}} = -\Omega_T^2 \overrightarrow{HM}$$

La loi de la dynamique, appliquée à un point matériel situé M , de masse m , soumis à l'attraction de la Terre et d'éventuelles autres forces (frottements dans l'air, forces de contact avec le sol, etc.) dont la somme est notée $\vec{F}$, s'écrit, compte tenu des forces d'inertie :

$$m \vec{a}_{\text{rel.}} = -G \frac{m M_T \overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} + \vec{F} - m \vec{a}_{\text{entr.}} - m \vec{a}_{\text{Cor.}}$$

$$m \vec{a}_{\text{rel.}} = -G \frac{m M_T \overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} + \vec{F} + m \Omega_T^2 \overrightarrow{HM} - 2 m \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}_{\text{rel.}}$$

Désormais, on ne parlera plus que du référentiel terrestre et l'on peut alors sous-entendre l'indice « relatif »

$$m \vec{a} = -G \frac{m M_T \overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} + \vec{F} + m \Omega_T^2 \overrightarrow{HM} - 2 m \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}$$

Imaginons que l'on veuille mesurer la direction de l'attraction terrestre, on pense hâtivement qu'il suffit d'accrocher un corps à un fil et à noter la direction du fil. Si l'on veut

mesurer l'intensité de cette attraction, on accroche un corps à un ressort et l'on pense, tout aussi hâtivement, qu'il suffit de noter l'allongement du ressort. Dans les deux cas, on attend l'équilibre du corps qui a donc une vitesse et une accélération nulles ; l'équation ci-dessus devient :

$$\vec{0} = -G \frac{m M_T \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} + \vec{F} + m \Omega_T^2 \vec{HM}$$

La force $\vec{F}$ exercée par le fil ou le ressort que l'on croyait opposée à l'attraction terrestre est en fait opposée à la somme vectorielle de celle-ci et d'un terme d'entraînement centrifuge, notons donc :

$$-\vec{F} = -G \frac{m M_T \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} + m \Omega_T^2 \vec{HM}$$

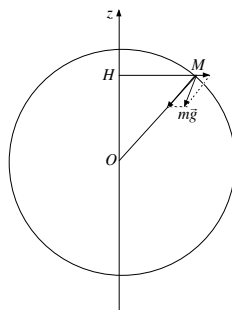


FIGURE 7 – Les deux composantes de la gravité.

Comment faire pour ne mesurer que l'attraction terrestre ? C'est bien simple : c'est tout à fait impossible et l'on est bien obligé de considérer que le fil ou le ressort exerce une force opposée à la force globale qu'est cette somme vectorielle et c'est elle que l'on appellera force de pesanteur (ou poids du corps), proportionnelle à la masse m ce qui permet de faire apparaître la notion de *champ de pesanteur* $\vec{g}$. On note donc, dans l'expérience de mesure ci-dessus :

$$-\vec{F} = m \vec{g} = m \left[-G \frac{M_T \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} + \Omega_T^2 \vec{HM} \right]$$

$$\vec{g} = -G \frac{M_T \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} + \Omega_T^2 \vec{HM}$$

La figure 7 p. 17 schématise les deux composantes du poids d'un corps.

Bien entendu, les choses sont toujours plus compliquées qu'on vient de le dire¹⁵ ; la composante centrifuge, d'autant plus importante que l'on est loin de l'axe, donc, pour les

15. Et donc un cours de physique est fatalement incomplet.

points au niveau du sol, maximale à l'équateur, provoque un renflement équatorial de la Terre (et donc un aplatissement aux pôles) qui n'est plus sphérique mais ellipsoïdale, à des aspérités près. Le calcul de la force d'attraction gravitationnelle devient dès lors plus complexe.

Remarque : Par définition, la verticale en un point M a la direction de $\vec{g}(M)$ et par définition, le plan horizontal lui est orthogonal. La verticale ne passe donc pas par le centre de la Terre !

Ordres de grandeur : Le terme $-G \frac{M_T \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$ de module $\frac{G M_T}{\|\vec{OM}\|^2}$, avec OM variable car la Terre est aplatie aux pôles, mais de l'ordre du rayon équatorial de la Terre $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m, avec $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg et $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ a pour ordre de grandeur $9,8 \text{ m s}^{-2}$. Quant à $\Omega_T^2 \vec{HM}$, nul aux pôles, maximal à l'équateur (où $HM = R_T$), avec (cf supra) $\Omega_T = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$, il varie de 0 à 0,034 ; c'est faible par rapport au premier terme (0,3% au maximum), mais parfaitement mesurable. Expérimentalement, on a aux pôles $g = 9,83 \text{ m s}^{-2}$, à l'équateur $g = 9,78 \text{ m s}^{-2}$ et $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ à Paris ¹⁶.

6.c Loi de la dynamique dans le référentiel terrestre.

Revenons maintenant à la loi de la dynamique dans le référentiel terrestre pour un point matériel de masse m , situé en M mobile ; nous avons établi plus haut que :

$$m \vec{a} = -G \frac{m M_T \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} + \vec{F} + m \Omega_T^2 \vec{HM} - 2 m \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}$$

où $\vec{F}$ est la somme des forces autres que celle de gravitation et d'inertie.

Par ailleurs, nous avons défini le poids du point matériel par :

$$m \vec{g} = m \left[-G \frac{M_T \vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} + \Omega_T^2 \vec{HM} \right]$$

En reportant cette définition dans l'équation précédente, on en arrive à :

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F} - 2 m \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}$$

La faible valeur de Ω_T nous incite à penser que la force de CORIOLIS est peut-être négligeable devant le poids et pourrait donc être omise ; pour valider cette hypothèse effectuons le rapport des module et n'oublions pas que le module d'un produit vectoriel est inférieur au produit des modules.

$$\frac{\| -2 m \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} \|}{\| m \vec{g} \|} \leq \frac{2 \|\vec{\Omega}_T\| \|\vec{v}\|}{\|\vec{g}\|}$$

¹⁶. Pour celui qui suit et qui a donc remarqué que l'écart est plus grand que les 0,034 calculés précédemment : à l'équateur le terme centrifuge est maximal ET le terme gravitationnel minimale car la Terre y est renflée et l'on est plus loin du centre.

Introduisons une vitesse caractéristique définie par $v_c = \frac{\|\vec{g}\|}{2\|\vec{\Omega}_T\|}$ de valeur numérique $v_c = 9,8/(2 \times 7,3 \cdot 10^{-5}) = 67 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1} \approx 240 \cdot 10^3 \text{ km h}^{-1}$. D'où :

$$\frac{\| -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} \|}{\|m\vec{g}\|} \leq \frac{\|\vec{v}\|}{v_c}$$

Ceci montre que pour un TGV à sa vitesse commerciale de 240 km/h, la force de CORIOLIS est mille fois plus petite que son poids. Inutile de dire que rares sont les cas où il faille en tenir compte. Du reste le résultat précédent permet de savoir, avant de se lancer dans les calculs, s'il faut ou non faire l'approximation.

Dans le cas le plus courant, l'on peut donc affirmer que :

$$m\vec{a} \approx m\vec{g} + \vec{F}$$

On mémorise ce résultat en disant que l'on peut considérer le référentiel terrestre comme galiléen, à condition de remplacer l'attraction gravitationnelle terrestre par le poids (ce qui n'est pas une contrainte, bien au contraire car seul le poids est mesurable, comme on l'a vu plus haut).

Dans le cas où la force de CORIOLIS n'est pas négligeable, ou si l'on en tient compte pour chiffrer son influence, puisque la dernière fois que l'on aura relu son cours sera bien lointaine, la tentation sera forte, puisqu'on ajoute une force d'inertie, d'ajouter l'autre, la force d'inertie d'entraînement. C'est oublier que celle-ci est déjà contenue dans le poids. On ne jettera pas la première pierre à celui qui commettra cette erreur car il faut oublier dix fois dans sa vie que le poids contient la force d'inertie d'entraînement avant de le retenir à jamais ; c'est un peu comme la grammaire grecque¹⁷.

Remarque : Le mythique « référentiel du laboratoire », dont l'origine est quelque part sur votre paillasse et dont les axes seront vraisemblablement choisis parallèles aux arêtes de la pièce, est totalement immobile par rapport à la terre et au référentiel terrestre ; il n'y a pas de forces d'inertie dans le passage de l'un à l'autre et ce qui est vrai dans l'un est vrai dans l'autre. Donc le référentiel du laboratoire peut être considéré comme galiléen lui aussi. Rappelons le point de vue justifié au chapitre B-I : on peut considérer que deux repères immobiles l'un par rapport à l'autre définissent le même référentiel : le « référentiel du laboratoire » et le « référentiel terrestre », c'est le même référentiel (je parle bien sûr d'un laboratoire au sol, pas du laboratoire spatial).

7 Mise en évidence de la force de Coriolis.

Voici maintenant deux exemples classiques de l'influence de la force de CORIOLIS sur des mouvements normalement simples. Commençons à l'aide la figure 8 p. 20 par choisir

17. que je n'ai oubliée qu'une seule fois, imaginez le résultat !

les axes ; en un point O de la surface terrestre, la verticale ascendante est prise comme axe Oz , de vecteur unitaire $\vec{e}_z$, elle ne passe pas tout à fait par le centre C de la terre, mais pas loin, dans le plan horizontal de O , on choisit l'axe Ox pointant vers le nord dans le plan méridien (celui qui passe par l'axe des pôles et le point O) et l'axe Oy orthogonal à Ox dans le plan horizontal, pointant vers l'ouest pour que le trièdre $Oxyz$ soit direct.

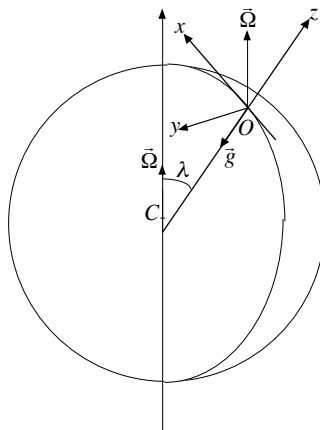


FIGURE 8 – Déviation vers l'est.

De par ce choix, le champ de pesanteur en O est vertical descendant et l'on note $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. Par ailleurs, le vecteur rotation de la Terre, parallèle à l'axe des pôles et dirigé vers le nord se trouve par ce même choix dans le plan Ozx ; si l'on appelle *co-latitude*¹⁸, notée λ , l'angle compté positivement de Oz vers Ox entre l'axe des pôles et la verticale Oz et Ω_T la norme de $\vec{\Omega}_T$, l'on a :

$$\vec{\Omega}_T = \Omega_T (\cos \lambda \vec{e}_z + \sin \lambda \vec{e}_x)$$

Sur la figure, $\vec{\Omega}_T$ a été dessiné une fois sur l'axe polaire car c'est plus naturel et une fois au point O car c'est plus lisible pour en calculer les composantes. Que cela ne vous trouble pas ; ce vecteur rotation n'est pas « localisé » en quelque point que ce soit, il concerne la Terre dans son ensemble.

7.a Déviation vers l'est dans une chute libre.

Considérons la chute libre d'un corps de masse m lancé à $t = 0$ du point O avec une vitesse nulle et tenons compte de la force de CORIOLIS ; le corps est supposé suffisamment dense et gros pour que les forces de frottement dans l'air soient négligeables. On a donc :

$$m \vec{a} = m \vec{g} - 2m \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}$$

18. Les géographes comptent la latitude à partir de l'équateur et positivement vers le pôle, mais pour eux aussi compte l'angle de l'axe polaire avec la verticale et non CO , rayon terrestre arrivant en O , pour la simple raison, déjà évoquée, qu'en O la direction de la verticale est mesurable et pas celle de CO .

$$m (\ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z) = -m g \vec{e}_z - 2 m \Omega_T (\cos \lambda \vec{e}_z + \sin \lambda \vec{e}_x) \wedge (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z)$$

Après développement et projection, l'on en déduit les trois équations suivantes :

$$\ddot{x} = 2 \Omega_T \dot{y} \cos \lambda$$

$$\ddot{y} = -2 \Omega_T \dot{x} \cos \lambda + 2 \Omega_T \dot{z} \sin \lambda$$

$$\ddot{z} = -g - 2 \Omega_T \dot{y} \sin \lambda$$

On a vu plus haut que le terme $\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}$ est négligable devant $\vec{g}$, ce qui permet de simplifier la dernière équation en :

$$\ddot{z} = -g$$

dont la solution, compte tenu des conditions initiales est le classique :

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$

En reportant dans les deux autres équations ce résultat, l'on tire :

$$\ddot{x} = 2 \Omega_T \dot{y} \cos \lambda$$

$$\ddot{y} = -2 \Omega_T \dot{x} \cos \lambda - 2 \Omega_T g t \sin \lambda$$

Utilisons l'astuce classique dès qu'apparaît un produit vectoriel par un vecteur constant : on multiplie la seconde par i et l'on ajoute à la première :

$$(\ddot{x} + i \ddot{y}) = +2 \Omega_T \cos \lambda (\dot{y} - i \dot{x}) - 2 i \Omega_T g t \sin \lambda$$

que l'on peut réécrire astucieusement ainsi :

$$(\ddot{x} + i \ddot{y}) = -2 i \Omega_T \cos \lambda (+i \dot{y} + \dot{x}) - 2 i \Omega_T g t \sin \lambda$$

On introduit la variable à valeurs complexes $\zeta(t) = \dot{x} + i \dot{y}$ et l'on arrive à l'équation linéaire :

$$\dot{\zeta} + 2 i \Omega_T \cos \lambda \zeta = -2 i \Omega_T g t \sin \lambda$$

On résout l'équation homogène, on cherche une solution particulière du premier degré comme le second membre et l'on adapte aux conditions initiales ($\dot{x}$ et $\dot{y}$ donc ζ nuls en $t = 0$) ; on finira bien par arriver à :

$$\dot{x} + i \dot{y} = \zeta = -g t \tan \lambda + i \frac{\sin \lambda}{2 \Omega_T \cos^2 \lambda} g [\exp(-2 i \Omega_T \cos \lambda t) - 1]$$

En décomposant en partie réelle et imaginaire

$$\dot{x} = -g t \tan \lambda + \frac{\sin \lambda}{2 \Omega_T \cos^2 \lambda} g \sin (2 \Omega_T \cos \lambda t)$$

$$\dot{y} = \frac{\sin \lambda}{2 \Omega_T \cos^2 \lambda} g [\cos (2 \Omega_T \cos \lambda t) - 1]$$

Comme Ω_T est de l'ordre de l'inverse d'un jour, pour des chutes de quelques secondes, l'on peut remplacer, en notant ici pour faciliter la lecture $\varphi = 2 \Omega_T \cos \lambda t$, le $(1 - \cos \varphi)$ par $\varphi^2/2$ et le $\sin \varphi$ par $(\varphi - \varphi^3/6)$ (deux termes car le premier se simplifiera) ce qui conduit à :

$$\dot{x} = -\frac{2}{3} \Omega_T^2 \cos \lambda \sin \lambda g t^3$$

$$\dot{y} = -\Omega_T \sin \lambda g t^2$$

On intègre et l'on tient compte des conditions initiales ($x = y = 0$ en $t = 0$)

$$x = -\frac{1}{6} \Omega_T^2 \cos \lambda \sin \lambda g t^4$$

$$y = -\frac{1}{3} \Omega_T \sin \lambda g t^3$$

Fixons les idées par une chute libre d'une hauteur h de $z = 0$ à $z = -h$; comme $z = -(1/2) g t^2$, le temps de chute est $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ et horizontalement, par rapport à la verticale ($x = y = 0$), à l'arrivée le corps s'est dévié de :

$$X = -\frac{2}{3} \Omega_T^2 \cos \lambda \sin \lambda \frac{h^2}{g}$$

$$Y = -\frac{1}{3} \Omega_T \sin \lambda g \left(\frac{2h}{g} \right)^{\frac{3}{2}}$$

On remarque que Y est négatif, donc une déviation vers l'est et que X est négatif donc une déviation vers le sud. Faisons une application numérique pour une chute de $h = 180 \text{ m}$ à une co-latitude de 45° , arrondissons g à 10 m s^{-2} et $\Omega_T \cos(45^\circ) = \Omega_T \sin(45^\circ)$ à $5 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$.

Le temps de chute est alors $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6 \text{ s}$.

La déviation vers l'est est $\frac{1}{3} \Omega_T \sin \lambda g t^3 = 36 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 36 \text{ mm}$.

La déviation vers le sud est $\frac{1}{6} \Omega_T^2 \cos \lambda \sin \lambda g t^4 = 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 5,4 \mu\text{m}$, ce qui est totalement indétectable.

Tout ceci ressemble étrangement à une expérience de pensée totalement irréalisable. Que le lecteur se détrompe, elle a été menée par Ferdinand REICH, exécuteur testamentaire de NEWTON, professeur de physique et assistant à la direction des Mines, dans un puits de mine à Freiberg, près de Dresde en Allemagne en 1831 et a donné un bon accord avec les résultats prévus.

7.b Le pendule de Foucault.

Il s'agit d'une expérience publique réalisée en 1851 au Panthéon de Paris (à cause de la hauteur de la voûte sous le dôme) par FOUCAULT pour prouver que c'est la Terre qui tourne par rapport aux étoiles et non l'inverse, ce qui valide une fois de plus qu'un référentiel galiléen a ses axes fixes par rapport aux étoiles.

Le pendule est constitué d'une masse m suspendue à un fil inextensible de longueur ℓ accroché au point A ; à l'équilibre, le fil est vertical et la masse m en O , pris comme origine (donc le point A est à l'altitude ℓ). On envisage le mouvement de la masse le plus général, pas forcément dans un plan vertical, et l'on note x , y et z les coordonnées de M (voir la figure 9 p.23).

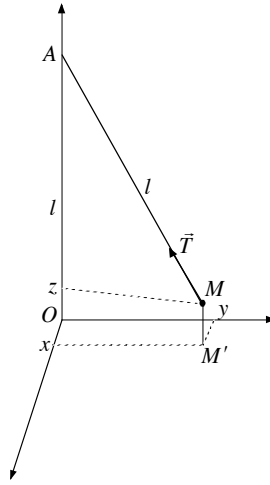


FIGURE 9 – Pendule de Foucault.

La distance $\|\overrightarrow{AM}\|$ est ℓ et l'on peut donc affirmer, en passant au carré :

$$x^2 + y^2 + (\ell - z)^2 = \ell^2$$

$$x^2 + y^2 = 2\ell z - z^2 \approx 2\ell z$$

car, pour des mouvements de faible amplitude, z est petit devant ℓ , d'où, en faisant intervenir M' projection de M sur le plan OXY et la distance $r = OM' = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$z = \frac{r^2}{2\ell}$$

$$\frac{z}{r} = \frac{r}{2\ell}$$

Cette seconde formulation montre que si r est petit devant ℓ , alors z est petit devant r , c'est-à-dire petit d'ordre deux et donc négligeable : on peut dès lors confondre M et sa projection M' et considérer que z est pratiquement nul.

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &\approx x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \\ \vec{v} &\approx \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y \\ \vec{a} &\approx \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y\end{aligned}$$

La tension $\vec{T}$ du fil de module T est parallèle à $\overrightarrow{MA}$ de longueur $\|\overrightarrow{MA}\| = \ell$ d'où :

$$\vec{T} = T \frac{\overrightarrow{MA}}{\|\overrightarrow{MA}\|} = T \frac{-x \vec{e}_x - y \vec{e}_y + (\ell - z) \vec{e}_z}{\ell} \approx T \frac{-x \vec{e}_x - y \vec{e}_y + \ell \vec{e}_z}{\ell}$$

Le poids est :

$$m \vec{g} = -m g \vec{e}_z$$

Et rappelons (*cf supra*) que le vecteur rotation de la Terre est, avec Ox orienté vers le nord et Oy vers l'ouest :

$$\overrightarrow{\Omega_T} = \Omega_T (\cos \lambda \vec{e}_z + \sin \lambda \vec{e}_x)$$

Il n'y a plus qu'à reporter tout cela dans la loi de la dynamique appliquée à m :

$$\begin{aligned}m \vec{a} &= m \vec{g} + \vec{T} - 2m \overrightarrow{\Omega_T} \wedge \vec{v} \\ m (\ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y) &= -m g \vec{e}_z + T \frac{-x \vec{e}_x - y \vec{e}_y + \ell \vec{e}_z}{\ell} - 2m \Omega_T (\cos \lambda \vec{e}_z + \sin \lambda \vec{e}_x) \wedge (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y)\end{aligned}$$

Projetons, après développement sur les trois axes :

$$\begin{aligned}m \ddot{x} &= -T \frac{x}{\ell} + 2m \Omega_T \cos \lambda \dot{y} \\ m \ddot{y} &= -T \frac{y}{\ell} - 2m \Omega_T \cos \lambda \dot{x} \\ 0 &= -m g + T - 2m \Omega_T \sin \lambda \dot{y}\end{aligned}$$

Dans la troisième relation, l'on peut comme dans le cas de la chute libre, négliger le terme de CORIOLIS devant le poids, d'où $T = m g$ que l'on reporte dans les deux autres, ce qui donne après simplification par m :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{g}{\ell} x + 2 \Omega_T \cos \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{\ell} y - 2 \Omega_T \cos \lambda \dot{x}\end{aligned}$$

Utilisons à nouveau l'astuce classique¹⁹ dès qu'apparaît un produit vectoriel par un vecteur constant : on multiplie la seconde par i et l'on ajoute à la première :

$$(\ddot{x} + i \ddot{y}) = -\frac{g}{\ell} (x + i y) + 2 \Omega_T \cos \lambda (\dot{y} - i \dot{x})$$

19. Rappelons qu'une astuce utilisée plus d'une fois s'appelle une méthode.

$$(\ddot{x} + i \ddot{y}) = -\frac{g}{\ell} (x + i y) - 2 i \Omega_T \cos \lambda (+i \dot{y} + \dot{x})$$

On introduit la variable à valeurs complexes $\zeta(t) = x + i y$ et l'on arrive à l'équation linéaire homogène :

$$\ddot{\zeta} + 2 i \Omega_T \cos \lambda \dot{\zeta} + \frac{g}{\ell} \zeta = 0$$

L'équation résolvante a pour discriminant $\Delta = -4 (\Omega_T^2 \cos^2 \lambda + g/\ell) \approx -4 g/\ell$ et pour solutions $-i \Omega_T \cos \lambda \pm i \sqrt{g/\ell}$; on reconnaît dans $\sqrt{g/\ell}$, la pulsation classique du pendule pesant, notons-la ω_0 , et dans $\Omega_T \cos \lambda$ la composante verticale du vecteur rotation de la Terre, notons-la Ω_z . Les solutions de l'équation différentielle sont :

$$\zeta(t) = x(t) + i y(t) = A \exp [i (-\Omega_z + \omega_0) t] + B \exp [i (-\Omega_z - \omega_0) t]$$

où A et B sont deux constantes complexes dépendant de la position et de la vitesse initiales. Il serait très maladroit de décomposer en partie réelle et imaginaire, factorisons plutôt en :

$$\zeta(t) = x(t) + i y(t) = [A \exp (i \omega_0 t) + B \exp (-i \omega_0 t)] \exp (-i \Omega_z t)$$

Le premier facteur s'il était seul donnerait, par projection, des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sinusoïdales de pulsation ω_0 , donnant classiquement un mouvement elliptique de centre O de pulsation ω_0 , c'est-à-dire le mouvement que l'on obtiendrait sans la force de CORIOLIS.

Par ailleurs multiplier un complexe par $\exp (i \varphi)$ fait tourner son image dans le plan complexe d'un angle φ et donc multiplier par $\exp (-i \Omega_z t)$ fait tourner à la vitesse angulaire $-\Omega_z$; on peut donc décrire le mouvement du pendule de FOUCAULT comme un mouvement selon une ellipse qui tourne lentement dans le sens rétrograde avec une vitesse angulaire $\Omega_z = \Omega_T \cos \lambda$; on se convainc aisément que cela correspond à une période de $(1/\cos \lambda)$ mesurée en jour sidéral. Est-il utile de dire que le résultat expérimental obtenu par FOUCAULT a été conforme à la prédiction théorique ?

La réalisation pratique conduit à beaucoup de complications qu'il serait trop long de détailler ici ; si cela vous intéresse, une série de trois articles très riches a été publiée en mars 1983 dans le bulletin n° 652 de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie, articles que l'on peut se procurer facilement sur le site : <http://www.udppc.asso.fr/bupdoc/>