

Chapitre C-VII

Dynamique relativiste.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Nous verrons dans ce chapitre que la nécessité d'écrire les lois de la physique à l'aide de quadrivecteurs nous impose de nouvelles définitions pour la quantité de mouvement et pour l'énergie .

Incidemment, nous étudierons le cas particulier du photon, particule nécessairement sans masse.

Nous verrons comment définir le quadrivecteur force et redémontrons, dans un cadre relativiste, le théorème de l'énergie.

Enfin, nous étudierons le lien entre force et accélération et montrerons qu'elles ne sont plus forcément colinéaires.

Au cours de l'exposé, nous montrerons qu'un point matériel ne peut atteindre la vitesse de la lumière et le vérifierons sur un exemple simple de mouvement.

Table des matières

C-VII Dynamique relativiste.	1
1 Quadrivecteur quantité de mouvement ou énergie-impulsion.	4
1.a Rappels.	4
1.b Les objectifs.	5
1.c Définition.	5
1.d Propriété.	7
1.e Le cas particulier du photon.	8
2 Quadrivecteur force.	8
2.a Définition.	8
2.b Théorème de l'énergie cinétique.	9
2.c Force et accélération.	9
2.d Un exemple : mouvement à force constante.	11

1 Quadrivecteur quantité de mouvement ou énergie-impulsion.

1.a Rappels.

Quelques rappels pour éviter d'avoir à relire tout le chapitre B-VI (cinématique relativiste).

- Le repérage dans l'espace et le temps se fait avec le quadrivecteur événement défini par $\underline{M} = (i c t, \vec{M}) = (i c t, x, y, z)$. On rappelle que la flèche bizarre est une écriture personnelle adaptée de celle de mon ami Louis C.
- L'intervalle entre deux événements, indicés par les lettres A et B , est défini par le carré de sa pseudo-norme

$$s_{AB}^2 = (i c t_B - i c t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

$$s_{AB}^2 = -(c t_B - c t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

- La pseudo-norme se conserve dans un changement de référentiel galiléen. Dans tout ce qui suit, les axes sont choisis de sorte que la vitesse d'entraînement soit parallèle et de même sens que l'axe des abscisses et l'on notera v son module.
- Dans un changement de référentiel galiléen, la formule de changement de coordonnées spatio-temporelles est gérée par la matrice de LORENTZ soit $(i c t, \vec{M}) = (\mathcal{L}) (i c t', \vec{M}')$ qui résume la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} i c t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-i \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i c t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

- Un processus élémentaire, lié à un point de vitesse v par rapport au référentiel galiléen où on l'étudie, qui dure dt_0 dans le référentiel lié au point (*durée propre*) a, dans le référentiel d'étude, une durée $dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
- Pour que les lois de la physique soient les mêmes dans tous les référentiels galiléens (*principe de relativité*), il faut qu'elles soient formulées avec des quadrivecteurs qui se transforment par l'intermédiaire de la matrice de LORENTZ.
- Un événement élémentaire $d\underline{M} = (i c dt, d\vec{M})$, différence de deux quadrivecteurs, est un quadrivecteur ; mais, par contre, $\frac{d\underline{M}}{dt}$ n'en est pas un car le temps n'est pas absolu et dt dépend du référentiel où l'on se place. Pour définir un quadrivecteur vitesse, l'on ne peut que diviser par le temps propre $dt_0 = \sqrt{1-(v^2/c^2)} dt$ dont la définition

est indépendante du référentiel. On définit donc le quadrivecteur vitesse par $\overleftarrow{v} = \frac{d\overleftarrow{M}}{dt_0}$ soit $\overleftarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\overleftarrow{M}}{dt}$ et finalement :

$$\overleftarrow{v} = \left(\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

- Le carré de la pseudo-norme d'un quadrivecteur vitesse est toujours égal à la constante $\overleftarrow{v}^2 = -c^2$

1.b Les objectifs.

Comprenons bien d'abord que nous n'utiliserons plus la matrice de LORENTZ explicitement, mais son ombre planera sur tout ce chapitre en imposant de formuler dans un référentiel galiléen les lois de la physique uniquement à l'aide de quadrivecteurs.

Ce que nous cherchons à faire, c'est remplacer la loi¹ classique de la dynamique du point, soit $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ où $\vec{p} = m \vec{v}$, par une loi quadrivectorielle, ainsi que ses corollaires, le théorème du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique, soit $\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE}{dt}$ avec $E = \frac{1}{2} m v^2$.

A quatre dimensions, le produit vectoriel n'existe pas et il faut se lancer dans une démarche en terme de tenseurs pour définir un moment cinétique. On a choisi délibérément de faire l'impasse sur ce point dans ce chapitre.

1.c Définition.

On postulera, comme en mécanique classique, que la masse d'un point matériel est une constante immuable²; on ajoutera qu'elle ne dépend pas du référentiel dans lequel on étudie le point, c'est l'hypothèse de travail la plus simple et comme d'habitude en physique, c'est l'expérience qui la validera.

La seule façon simple de définir le quadrivecteur quantité de mouvement, c'est, par analogie avec la définition classique, de multiplier le quadrivecteur vitesse par cette masse, soit :

$$\overleftarrow{p} = m \overleftarrow{v} = \left(\frac{imc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

1. Je dis « loi » pour ne pas déranger le lecteur dans ses habitudes, mais je le renvoie au chapitre B-II (dynamique du point en mécanique classique), où j'explique pourquoi je considère cette relation comme une *définition* de la force.

2. sauf dans le cas d'une désintégration où le point matériel se scinde en deux autres particules.

Le terme vectoriel $\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, est au second ordre en v/c près égal à $m \vec{v}$ aux petites

vitesses, c'est à dire que l'on retrouve la définition classique de la quantité de mouvement. Nous définirons donc la quantité de mouvement dans le cadre de la théorie de la relativité par :

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Reste à interpréter le terme scalaire $\frac{i m c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, notons-le $i \frac{E}{c} = \frac{i m c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, d'où l'on tire

$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ où, pour l'instant, E n'est qu'une notation. Aux vitesses v faibles devant c ,

on a, au second ordre en v/c près, $E = m c^2$ qui ne m'évoque absolument rien du tout³; si l'on pousse le développement limité un peu plus loin, on a :

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx m c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

On retrouve l'énergie cinétique dans le second terme du développement et si l'on se souvient bien, en mécanique classique, l'énergie cinétique est apparue sous forme différentielle dans le théorème de l'énergie cinétique $\frac{d(\frac{1}{2} m v^2)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ et l'on aurait pu tout aussi bien introduire une constante E_0 , poser $E = E_0 + \frac{1}{2} m v^2$ et l'on aurait $\frac{d(E_0 + \frac{1}{2} m v^2)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, c'est-à-dire que l'énergie est définie à une constante additive près. En mécanique classique, on a pris arbitrairement $E_0 = 0$ par commodité; en mécanique relativiste, on *doit* prendre $E_0 = m c^2$ que l'on appelle *énergie de repos*. Pour résumer, on définit l'énergie d'un point de masse m et de vitesse $\vec{v}$ par :

$$\boxed{E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Remarque : si l'on fait tendre v vers c , E devient infinie (et $\vec{p}$ aussi), c'est-à-dire qu'il faudrait fournir une énergie infinie pour parvenir à la vitesse de la lumière; un point matériel ne peut donc pas atteindre ni a fortiori la dépasser⁴.

3. Je me place naïvement dans l'esprit de celui qui découvre les choses.

4. C'est pour cela que les auteurs de science-fiction ont été obligés d'inventer le saut à travers l'hyper-espace pour le déplacement de leurs héros

On peut définir l'énergie cinétique par $E_{\text{cin.}} = E - E_0 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m c^2$ mais cela n'apporte pas grand-chose.

Si l'on revient au quadrivecteur quantité de mouvement, sachant qu'un synonyme de quantité de mouvement, un peu tombé en désuétude, est *impulsion*, on le rebaptisera, au vu de ce qui vient d'être dit, quadrivecteur énergie-impulsion. Résumons :

$$\overleftarrow{p} = \left(i \frac{E}{c}, \vec{p} \right) = m \overleftarrow{v} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (i c, \vec{v}) = \left(\frac{i m c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Remarque : Certains nostalgiques de la mécanique classique ont introduit la notion de masse variable donnée par la formule $m(v) = \dots$ et je ne vais pas plus loin, car c'est une erreur pédagogique d'écrire quelque chose de faux, même en le disant ; soyez sûr que ce serait la seule chose que les élèves retiendraient ! Définir une masse variable, c'est sous-entendre qu'il suffit dans *toutes* les formules classiques de remplacer m par $m(v)$; comme c'est faux, on jette cette notion aux oubliettes de l'histoire des sciences.

1.d Propriété.

Puisque $\overleftarrow{v}^2 = -c^2$ (voir rappels) et que $\overleftarrow{p} = m \overleftarrow{v}$, on a $\overleftarrow{p}^2 = -m^2 c^2$, soit puisque $\overleftarrow{p} = (i \frac{E}{c}, \vec{p})$ et en notant $\|\vec{p}\| = p$

$$\left(i \frac{E}{c} \right)^2 + \vec{p}^2 = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -m^2 c^2$$

Le fait que $\overleftarrow{p}^2$ soit constant permettra ci-après de retrouver le théorème de l'énergie et, par ailleurs, il est bon de retenir le résultat ci-dessus (après multiplication par c^2 et réarrangement des termes, uniquement pour alléger l'écriture) qui sera bien utile dans la gestion de chocs relativistes (chapitre B-XI). Retenons donc :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Remarque : L'école russe, avec LANDAU et LIFSHITZ, utilise un système d'unités tacite dans lequel $\varepsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$ et donc $c = 1$ et n'hésite pas à écrire $E^2 = p^2 + m^2$, rendant de facto masse, quantité de mouvement et énergie homogènes. A consommer avec modération et uniquement quand on domine son sujet.

1.e Le cas particulier du photon.

L'aspect corpusculaire de la lumière introduit le photon, particule se déplaçant à la vitesse de la lumière. Si $v = c$ dans les formules $p = \frac{m v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (en module) et $E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, alors (cf supra), a priori, $p = \frac{m v}{0} = \infty$ et $E = \frac{m c^2}{0} = \infty$, ce qui n'est pas envisageable. La seule façon de sortir de cette absurdité est d'admettre que le photon a une masse nulle ; en contrepartie, les formules ci-dessus donnent les formes indéterminées $p = \frac{0}{0}$ et $E = \frac{0}{0}$ et sont donc inutilisables.

Avec $m = 0$, la formule $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ devient $E^2 = p^2 c^2$, d'où $E = p c$ ou $p = \frac{E}{c}$

L'explication par EINSTEIN de l'effet photoélectrique (1905) et celle du rayonnement du corps noir (1917) conduisent à donner au photon une énergie proportionnelle à sa fréquence ν ou à sa pulsation $\omega = 2\pi\nu$, la constante de proportionnalité est appelée constante de PLANCK et est notée h ; on note aussi traditionnellement $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (constante de PLANCK réduite, on lit « h barre »), soit

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{avec} \quad h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

La formule $p = \frac{E}{c}$ donne en introduisant le nombre d'onde $\sigma = \frac{\nu}{c}$ et le vecteur d'onde (en module) $k = \frac{\omega}{c}$ de l'onde électromagnétique⁵ associée :

$$p = h\sigma = \hbar k$$

2 Quadrivecteur force.

2.a Définition.

On conviendra de continuer à appeler force appliquée à un point matériel la dérivée temporelle de sa quantité de mouvement, soit $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, mais ce ne peut pas être une loi relativiste car ce n'est pas formulé en termes de quadrivecteurs, ce n'est qu'une notation. On n'oublie pas que $\vec{p} = m \vec{v} / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$.

Si entre deux instants élémentaires, le quadrivecteur énergie-impulsion passe de $\vec{p}$ à $\vec{p} + d\vec{p}$, alors $d\vec{p}$, différence de deux quadrivecteurs est un quadrivecteur. Par contre, si on le divise par dt pour obtenir la dérivée temporelle $\frac{d\vec{p}}{dt}$, on n'obtient pas un quadrivecteur car dt n'est pas invariant dans un changement de référentiel ; on retrouve la problématique évoquée dans les rappels et on la résout de la même façon en divisant par le temps propre $dt_0 = \sqrt{1 - (v^2/c^2)} dt$ dont la définition est indépendante du référentiel. On ne peut donc définir le quadrivecteur force qu'ainsi :

5. Voir ces notions dans n'importe quel cours sur les ondes électromagnétiques.

$$\overleftarrow{F} = \frac{d\overleftarrow{p}}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\overleftarrow{p}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(i \frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(i \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

2.b Théorème de l'énergie cinétique.

On a vu plus haut que le carré de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion est une constante, soit $\overleftarrow{p}^2 = -m^2 c^2$. En prenant la différentielle, on tire $2 \overleftarrow{p} \cdot d\overleftarrow{p} = 0$ d'où $\overleftarrow{p} \cdot d\overleftarrow{p} = 0$. On en déduit, en divisant par le temps propre, que $\overleftarrow{p} \cdot \frac{d\overleftarrow{p}}{dt_0} = 0$ soit $\overleftarrow{p} \cdot \overleftarrow{F} = 0$, qu'on pourrait formuler en terme de pseudo-orthogonalité. Développons le pseudo-produit scalaire :

$$\begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (i c, \vec{v}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(i \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{m}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (i c, \vec{v}) \cdot \left(i \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) &= 0 \\ (i c, \vec{v}) \cdot \left(i \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) &= 0 \\ -\frac{dE}{dt} + \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on appelle, comme convenu plus haut, force $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (ce qui suit justifie ce choix) on retrouve le théorème de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \mathcal{P}}$$

en définissant encore la puissance par $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

On peut donc réécrire ainsi le quadrivecteur force

$$\boxed{\overleftarrow{F} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(i \frac{\mathcal{P}}{c}, \vec{F} \right)}$$

2.c Force et accélération.

La formulation relativiste de la loi⁶ de la dynamique réside donc dans la confrontation des deux écritures du quadrivecteur force :

6. voir note 1 p.5

$$\boxed{\overleftarrow{F} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(i \frac{\mathcal{P}}{c}, \vec{F} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{i}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right)}$$

d'où il résulte, après simplification par $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, que l'on a, comme en mécanique classique, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ mais avec $\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ soit :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)}$$

Développons, en utilisant des exposants fractionnaires négatifs :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{d}{dt} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \vec{v} \right] \\ \vec{F} &= m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + m \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2v}{c^2} \frac{dv}{dt} \right) \vec{v} \\ \vec{F} &= m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{v}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} \vec{v} \end{aligned}$$

où l'on veillera à ne pas confondre $\vec{v}$ et $v = \|\vec{v}\|$. On peut aller plus loin en projetant sur la tangente à la trajectoire de vecteur unitaire $\vec{\tau}$ et sur la normale dans le plan qui contient $\vec{F}$ et $\vec{v}$, de vecteur unitaire $\vec{\nu}$. On sait⁷ que

$$\vec{v} = v \vec{\tau} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{\nu}$$

où R est le rayon de courbure.

Posons de même $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_n = F_t \vec{\tau} + F_n \vec{\nu}$ et projetons la relation précédente.

Sur $\vec{\tau}$, la projection donne :

$$\begin{aligned} F_t &= m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dv}{dt} + m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} \\ F_t &= m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} + m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

7. Voir en mécanique classique le chapitre B-I (cinétique du point) au paragraphe relatif à l'abscisse curviligne et à la courbure.

$$F_t = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right]$$

$$F_t = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt}$$

soit, en multipliant par $\vec{\tau}$

$$\boxed{\vec{F}_t = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \vec{a}_t}$$

Sur $\vec{\nu}$, la projection donne :

$$F_n = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{v^2}{R}$$

soit, en multipliant par $\vec{\nu}$

$$\boxed{\vec{F}_t = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \vec{a}_n}$$

Les coefficients qui lient $\vec{F}_t$ et $\vec{a}_t$ d'une part et $\vec{F}_n$ et $\vec{a}_n$ d'autre part diffèrent (par leurs exposants); $\vec{F}$ et $\vec{a}$ ne sont donc pas colinéaires, contrairement à la mécanique classique.

Ceci complique singulièrement la résolution d'un problème de mécanique relativiste et rares sont les cas où l'on peut trouver une solution explicite.

2.d Un exemple : mouvement à force constante.

Un cas simple est celui d'un point matériel sans vitesse initiale de masse m soumis à une force constante $\vec{F}_0$; en choisissant l'axe Ox parallèle à la force, on peut noter $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_x = m a_0 \vec{e}_x$.

On peut donc affirmer grâce à ce qui précède :

$$\vec{F}_0 = m a_0 \vec{e}_x = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$a_0 \vec{e}_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

En intégrant avec une vitesse nulle à l'instant initial, on tire :

$$a_0 t \vec{e}_x = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ce qui prouve que $\vec{v}$ est parallèle à Ox ; on pose alors $\vec{v} = v \vec{e}_x$ et l'on projette la relation précédente :

$$a_0 t = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$a_0 t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v$$

$$a_0^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = v^2$$

$$a_0^2 t^2 = a_0^2 t^2 \frac{v^2}{c^2} + v^2 = v^2 \left(1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}\right)$$

$$v^2 = \frac{a_0^2 t^2}{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}$$

$$v = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}$$

$$v = c \frac{a_0 t}{\sqrt{c^2 + a_0^2 t^2}}$$

On n'oublie pas de remarquer que quand t tend vers l'infini, v tend vers c , car pour $a_0 t \gg c$, on a $\sqrt{c^2 + a_0^2 t^2} \sim a_0 t$, et l'on retrouve, dans ce cas particulier que c est une vitesse limite infranchissable.

L'intégration de $v(t)$ donne, avec un peu d'habitude :

$$x(t) = \frac{c}{a_0} \sqrt{c^2 + a_0^2 t^2}$$

Nous verrons d'autres applications des concepts introduits ici, d'une part dans le chapitre sur les chocs classiques ou relativistes (B-XI), d'autre part dans le chapitre sur le mouvement classique ou relativiste de charges (C-IX).