

Chapitre B-X

Introduction à la théorie de l'élasticité.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On commence par définir les matrices (ou tenseurs) symétriques des déformations et des contraintes et l'on traduit la loi de Hooke qui les relie de façon linéaire en introduisant les deux coefficients de Lamé. On donne une formulation volumique de l'équilibre d'un corps élastique et l'on établit l'expression de l'énergie libre volumique de déformation.

On illustre ce qui précède par l'étude, entre autres, de la traction ou de la torsion d'un fil, de la flexion d'une poutre et l'on introduit dans chaque cas des coefficients spécifiques.

On termine en évoquant diverses formes d'ondes : longitudinales ou transversales en milieu infini, ondes de Rayleigh en milieu semi-infini, onde de torsion, cordes vibrantes avec raideur et vibrations d'une poutre.

Table des matières

B-X Introduction à la théorie de l'élasticité.	1
1 Les ambitions modestes de ce chapitre.	5
2 Déformations d'un solide.	5
2.a Déformations élastiques et inélastiques.	5
2.b Etude locale des déformations.	5
3 Tenseur des contraintes.	9
3.a Définition de la contrainte.	9
3.b Première approche géométrique.	9
3.c Symétrie de la matrice des contraintes.	12
3.d Condition d'équilibre, approches surfacique et volumique.	13
4 Lois de l'élasticité.	15
4.a Conséquences de la linéarité. Notation de Voigt.	15
4.b Conséquence de l'isotropie. Coefficients de Lamé.	16
4.c Energie libre de déformation.	22
4.d Lien entre thermodynamique et élasticité.	24
5 Les grands classiques.	26
5.a Solide soumis à une pression uniforme.	26
5.b Fil soumis à une traction.	27
5.c Lien entre cisaillement et glissement.	28
5.d Torsion d'un fil.	30
5.e Ressort hélicoïdal.	32
5.f Flexion d'une poutre. Flambage d'une poutre.	33

6 Ondes élastiques.	39
6.a Ondes élastiques longitudinales et transversales dans un milieu continu homogène.	40
6.b Ondes surfaciques de Rayleigh dans un milieu continu homogène semi-infini.	43
6.c Ondes de torsion.	47
6.d Cordes vibrantes avec raideur, vibration des poutres.	47

1 Les ambitions modestes de ce chapitre.

L'objectif global de mon cours est de permettre à qui est arrivé au niveau Bac+2 ou Bac+3 avec l'impression d'être souvent allé trop vite de reprendre systématiquement ce qu'il a appris afin de consolider ses bases avant d'aller plus loin.

Ce chapitre-ci ne procède pas de cette logique ; c'est une incitation à aborder la théorie de l'élasticité. Il se concentre sur la mise en place des concepts fondamentaux et de la loi d'élasticité dans un cadre isotrope, puis donne quelques exemples des applications qu'on peut en faire. Si je réussis ainsi à intéresser le lecteur, ce sera à lui de se donner les moyens d'aller plus loin car je n'en connais pas plus qu'il n'en connaîtra alors.

2 Déformations d'un solide.

2.a Déformations élastiques et inélastiques.

Considérons l'expérience simple suivante : on accroche un fil métallique au plafond et on exerce sur lui une force de traction de module (de norme) F en lui accrochant une masse M (avec $F = Mg$), le fil s'allonge et l'on peut noter son allongement $\Delta\ell$. En faisant varier F , on peut étudier le lien entre $\Delta\ell$ et F .

Si F n'est pas trop grand, il y a proportionnalité entre force de traction et allongement et dans ce cas, si l'on supprime la force de traction, le fil reprend sa longueur initiale et donc un allongement nul ; c'est le domaine linéaire dit aussi domaine *élastique*.

Au delà d'une certaine limite, notée F_e , l'allongement se met à croître plus vite que ne le prévoit le domaine linéaire et quand on supprime la force, le fil conserve un allongement résiduel d'autant plus grand qu'on s'est plus éloigné de la *limite élastique*. C'est le domaine *plastique*.

Enfin, il existe une valeur de la force de traction, notée F_m , pour laquelle le fil se rompt.

En général le domaine de linéarité ou d'élasticité $[0, F_e]$ occupe une proportion importante du domaine d'intégrité (de non-rupture) $[0, F_m]$ (le rapport $\frac{F_e}{F_m}$ dépasse souvent $\frac{2}{3}$). La suite de ce chapitre se place uniquement dans le cadre de la linéarité.

On appelle traditionnellement loi de HOOKE la loi de proportionnalité entre les déformations et les forces qui les provoquent, initialement proposée en 1678 dans le cadre d'une étude sur les ressorts par Robert HOOKE, scientifique anglais.

2.b Etude locale des déformations.

Considérons un solide de forme donnée que l'on pourra déformer en exerçant sur lui toutes sortes de forces. On prend comme référence le solide immobile, soumis à aucune force, que l'on considère comme un assemblage peu déformable de points matériels M

repérés par leurs coordonnées x , y et z . Soumis à diverses forces, chacun de ses points M se déplace vectoriellement d'une petite grandeur notée ici $\vec{u}$ et appelée *déplacement* ou *déformation* qui est naturellement fonction de M , donc de ses coordonnées, on notera donc le déplacement $\vec{u}(M)$ ou $\vec{u}(x, y, z)$.

Comparons le déplacement d'un point quelconque noté M_0 et le déplacement d'un point M proche de M_0 (on prendra M_0 comme origine et l'on notera x , y et z les coordonnées de M) et ce pour un champ des déplacements $\vec{u}(M) = \vec{u}(x, y, z)$ donné (expérimentalement par exemple).

Pour M assez proche de O , on peut confondre la variation de déplacement avec la différentielle, soit :

$$\vec{u}(M) - \vec{u}(O) \approx d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} dz$$

Par projection sur les trois axes, on a alors :

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz$$

et analogues pour du_y et du_z (les dérivées partielles étant calculées au point O), soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

que nous noterons $(d\vec{u}) = (D) (\overrightarrow{OM})$

On peut classiquement considérer la matrice (D) des dérivées partielles des composantes du déplacement comme somme de la matrice antisymétrique $(A) = \frac{1}{2} [(D) - {}^t(D)]$ et de la matrice symétrique $(S) = \frac{1}{2} [(D) + {}^t(D)]$ où ${}^t(D)$ est la matrice transposée de (D) . La différentielle $d\vec{u}$ est ainsi formellement somme de deux termes.

Le premier peut être réécrit en terme de produit vectoriel (voir le chapitre A-IX consacré à l'analyse vectorielle) :

$$(A) (\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

que l'on peut mettre sous la forme $\vec{\Theta} \wedge \overrightarrow{OM}$ en reconnaissant dans $\vec{\Theta}$ le demi-rotationnel du champ des déplacements $\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot } u}$. Cette contribution au champ de déplacement a la même type d'expression que pour le champ des vitesses d'un solide en rotation et décrit donc une rotation locale sans déformation d'un angle¹ $\|\vec{\Theta}\|$ dans le sens donné par la règle

1. Ici un angle et non une vitesse de rotation.

du tire-bouchon autour d'un axe orienté passant par M_0 et parallèle à $\vec{\Theta}$. Elle n'est donc pas pertinente pour les lois de l'élasticité puisque cette rotation en bloc ne s'accompagne d'aucune déformation ; seule importe donc la matrice symétrique S rebaptisée matrice ou plus fréquemment *tenseur*² des déformations et notée désormais (ε) (et ses coefficients ε_{ij} où i et j prendront les « valeurs » x, y ou z), donnée par la formule :

$$(\varepsilon) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Il sera judicieux de faire abstraction de la rotation en passant du repère de la position de référence à un repère centré sur M_0 et dont les axes ont tourné de la même façon que le solide. Les déformations se réduisent ainsi au seul effet de la matrice (ε) .

Remarque 1 : cette analyse n'est valable qu'au voisinage de M_0 , la matrice dépend a priori des coordonnées de ce point. En pratique, sauf cas particulier, les déformations sont faibles (termes correctifs d'ordre 1) et les termes d'ordre 2 gérant la variation de (ε) avec la position peuvent être négligés en bonne première approximation.

Remarque 2 : comme toute matrice symétrique, (ε) est diagonalisable dans un repère orthonormé bien choisi³ et dans ce repère, nous aurons donc :

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Un parallélépipède rectangle de côté dx, dy et dz voit ses cotés s'allonger algébriquement⁴, de $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ et analogues donc devenir $dx' = dx \left[1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right]$ et analogues. Ces termes diagonaux traduisent donc des déformations de type *dilatation* sans déformation angulaire. Remarquons en outre que le volume passe de $dV = dx dy dz$ à $dV' = dx' dy' dz'$, soit, en se limitant au premier ordre :

$$dV' = dV (1 + \text{div } \vec{u})$$

où l'on rappelle (voir le chapitre A-IX sur l'analyse vectorielle) que la divergence d'un champ est invariante dans un changement de référentiel orthonormé direct. Selon que la divergence de $\vec{u}$ est nulle ou non, le volume varie ou non ; l'incompressibilité est donc gérée par $\text{div } \vec{u}$ (qui est aussi la trace de la matrice (ε)).

Remarque 3 : la diagonalisation ne permet pas de se rendre compte de l'influence des termes non diagonaux dans les situations où les axes géométriquement pertinents ne sont pas les axes de la diagonalisation. Prenons l'exemple d'une barre allongée dans la direction

2. On va éviter dans ce chapitre l'utilisation de l'algèbre tensorielle.

3. La suite prouvera que cette diagonalisation n'est pas forcément pertinente pour l'étude de l'élasticité.

4. On fait confiance au lecteur pour qu'il s'en convainque aisément.

de Oz et de section carrée de côté a ; il est raisonnable de choisir Ox et Oy parallèles aux côtés de ce carré et de placer l'origine en un sommet. Supposons que dans le repère $Oxyz$, la matrice (ε) ait tous ses coefficients nuls sauf $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ (on appellera ε la valeur de ce coefficient). Un point de coordonnées de référence x, y et z s'est donc déplacé vers une nouvelle position de coordonnées $x' = x + \varepsilon y$, $y' = y + \varepsilon x$ et $z' = z$. La figure 1 p. 8 montre ce qui se passe dans un plan $z = Cte$ (on ne mentionne plus cette coordonnée) : le sommet $A(0,0)$ du carré reste en place, le sommet $B(0,a)$ va en $B'(\varepsilon a, a)$, le sommet $C(a,a)$ va en $C'(a + \varepsilon a, a + \varepsilon a)$ et le sommet $D(a,0)$ va en $D'(a, \varepsilon a)$.

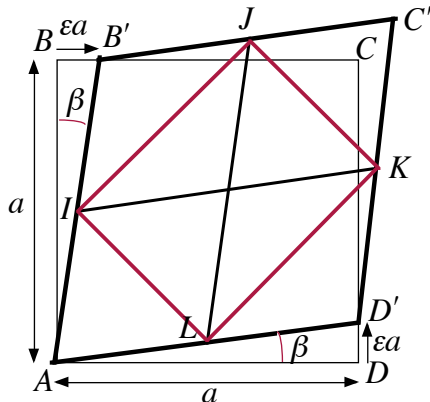


FIGURE 1 – Déformation de type glissement.

On voit clairement que le carré $ABCD$ est devenu le losange $AB'C'D'$ et que l'angle $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$ est devenu $\widehat{B'AD'} = \frac{\pi}{2} - 2\beta$ avec $\tan \beta = \frac{\varepsilon a}{a}$ soit en pratique (ε est petit) $\beta \approx \varepsilon$

Si l'on compare les positions initiales des cotés AD , BC et celle (non dessinée) du segment joignant les milieux de AB et DC et leurs positions AD' , $B'C'$ et IK , on constate que ces segments sont restés parallèles les uns aux autres, dans une direction légèrement modifiée, mais que dans cette direction, ils se sont déplacés les uns par rapport aux autres ; c'est pourquoi ce type de déformation est qualifié de *glissement*.

Remarque 4 : les remarques 2 et 3 semblent contradictoires, mais il est aisé de lever le paradoxe. Dans la position initiale, les milieux de AB , BC , CD et DA forment un carré (non dessiné) ; il est devenu un rectangle $IJKL$, un coté s'est allongé, un autre rétréci mais il n'y a pas eu de déformation angulaire, il n'a subi que des dilatations. Mais si l'on observe les diagonales IK et JL , leur angle a varié. La conclusion de ces remarques est que la distinction dilatation/glissement dépend de ce à quoi on s'intéresse et sont toujours présentes concomitamment.

Remarque 5 : si l'on note, pendant la phase de déformation, les petits déplacements $\vec{u}(t)$ au lieu de $\vec{u}$ et que l'on dérive par rapport au temps (on note par un point au dessus de la fonction) à positions de départ identiques ($\vec{OM}$ indépendant de t) la relation matricielle $(d\vec{u}(t)) = (D) \left(\vec{OM} \right)$, en prenant conscience que, dans cette phase la matrice

(D) dépend du temps, on arrive à $(d\vec{u}(t)) = (\dot{D}) (\overrightarrow{OM})$, soit en reconnaissant dans $\dot{u}(t)$ la vitesse $\vec{v}$ de déplacement, $(d\vec{v}(t)) = (\dot{D}) (\overrightarrow{OM})$. Dans le cas d'un solide, c'est rarement intéressant, mais dans le cas d'un fluide, c'est fondamental et c'est ainsi qu'on a procédé en mécanique des fluides (voir les chapitres B-XIII et B-XIV). Il ne faudra donc pas s'étonner de trouver de fortes analogies entre élasticité des solides et viscosité des fluides et du reste ce serait maladroit de ne pas les rechercher au lieu les découvrir par hasard.

3 Tenseur des contraintes.

3.a Définition de la contrainte.

On considère, dans un solide déformé (ou encore un liquide à l'équilibre ou en mouvement) un volume V limité par une surface fermée S , à l'extérieur duquel on peut trouver soit le même solide (V est alors une partie du solide étudié), soit autre chose (V contient alors tout le fluide étudié). Toute surface élémentaire d'aire dS prise sur S , de vecteur surface $d\vec{S} = dS \vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à S orienté vers l'extérieur de V , est soumise de la part de l'extérieur à une force élémentaire $d\vec{F}$. En hydrostatique, $d\vec{F}$ est normal à la surface mais pour un fluide visqueux en mouvement ou un solide déformé, il n'en est rien a priori.

Par un raisonnement classique, pour une surface dS suffisamment petite pour qu'elle soit quasiment plane et que les choses soient homogènes dans son voisinage, si on la coupe en deux parties égales, chaque moitié sera soumise à la moitié de la force ; localement la force est donc proportionnelle à l'aire de la surface. On appellera donc *contrainte* et on notera $\vec{\sigma}$ le rapport $\frac{d\vec{F}}{dS}$ qui dépend a priori des coordonnées du point moyen de cette surface (mais, voir remarque 1 du paragraphe 2.b commençant p. 5, cette dépendance est généralement négligable) et aussi de l'orientation de cette surface, donc de son vecteur unitaire $\vec{n}$; nous noterons donc la contrainte $\vec{\sigma}(\vec{n})$.

Remarque : pour un solide d'extension spatiale finie, les contraintes à sa surface, créées par des actions surfaciques provoquent des déformations près de la surface, lesquelles exercent des contraintes un peu plus loin, qui provoquent à ce niveau de nouvelles déformations et ainsi de suite. D'origine externe, la contrainte devient ainsi interne.

3.b Première approche géométrique.

Imaginons, au sein d'un solide, un petit tétraèdre, infiniment petit, dont trois des faces soient en forme de triangle rectangle. Avec un choix convenable des axes, ses sommets et leurs coordonnées seront notées respectivement $O(0,0,0)$, $A(dx,0,0)$, $B(0,dy,0)$ et $C(0,0,dz)$ ainsi que les présente la figure 2 p. 10. En faisant varier par la pensée dx , dy et dz , on donne à $\vec{n}$, vecteur unitaire normal de la face ABC toutes les orientations possibles, ce qui permet d'étudier la dépendance de la contrainte vis-à-vis de $\vec{n}$.

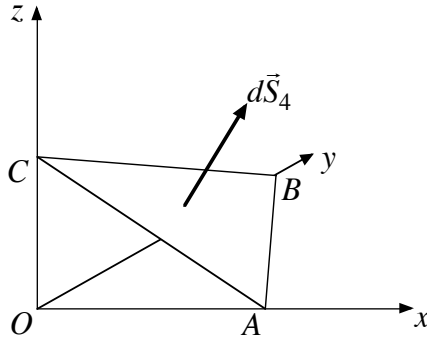


FIGURE 2 – Élément tétraédrique de solide.

Le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de la face OBC est $-\vec{e}_x$, l'aire de cette face triangulaire est $\frac{1}{2} dy dz$; si l'on note $\vec{\sigma}_x = -\vec{\sigma}(-\vec{e}_x)$ la contrainte dans la direction du vecteur unitaire $-\vec{e}_x$, la force exercée sur cette face est donc :

$$d\vec{F}_1 = \vec{\sigma}(-\vec{e}_x) dS_1 = -\vec{\sigma}_x dS_1 = -\frac{1}{2} \vec{\sigma}_x dy dz$$

De la même façon, les forces pressantes exercées sur les faces OCA et OAB sont respectivement :

$$d\vec{F}_2 = \vec{\sigma}(-\vec{e}_y) dS_2 = -\vec{\sigma}_y dS_2 = -\frac{1}{2} \vec{\sigma}_y dz dx$$

$$d\vec{F}_3 = \vec{\sigma}(-\vec{e}_z) dS_3 = -\vec{\sigma}_z dS_3 = -\frac{1}{2} \vec{\sigma}_z dx dy$$

Enfin, pour la dernière face ABC de vecteur normal $\vec{n}$, on a certes $d\vec{F}_4 = \vec{\sigma}(\vec{n}) dS_4$, mais comment calculer dS_4 ? On commence par calculer $d\vec{S}_4$ et on en prend la norme, mais comment calculer $d\vec{S}_4$?

Le plus simple est de se souvenir⁵ que la somme des vecteurs surfaces d'une surface fermée est nulle et l'on en déduit élégamment que

$$d\vec{S}_4 = -d\vec{S}_1 - d\vec{S}_2 - d\vec{S}_3 = \frac{1}{2} dy dz \vec{e}_x + \frac{1}{2} dz dx \vec{e}_y + \frac{1}{2} dx dy \vec{e}_z$$

Remarque : si l'on ne se souvient pas que le vecteur surface total d'une surface fermée est nul, on peut se servir des propriétés du produit vectoriel en contrôlant l'orientation par la « règle des trois doigts de la main droite » et affirmer que :

$$d\vec{S}_4 = \frac{1}{2} \vec{CA} \wedge \vec{CB} = etc.$$

5. Voir le chapitre A-IX d'analyse vectorielle.

En prenant la norme on arrive successivement à :

$$dS_4 = \frac{1}{2} \sqrt{dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2 + dx^2 dy^2}$$

$$d\vec{F}_4 = \frac{1}{2} \vec{\sigma}(\vec{n}) \sqrt{dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2 + dx^2 dy^2}$$

Aux forces surfaciques, il faut ajouter la force *volumique* qu'est le poids $dm \vec{g}$, soit en introduisant la masse volumique ρ , en choisissant Oz vertical ascendant (d'où $\vec{g} = -g \vec{e}_z$) et sachant que le volume du tétraèdre est $\frac{1}{6} dx dy dz$, un poids égal à :

$$dm \vec{g} = -\frac{1}{6} \rho g \vec{e}_z dx dy dz$$

Enfin, en appelant $\vec{a}$ l'accélération du centre de gravité, le théorème dit « du centre de gravité »⁶ donne, en passant le poids dans l'autre membre :

$$\frac{1}{6} \rho (\vec{a} + g \vec{e}_z) dx dy dz = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} \vec{\sigma}(\vec{n}) \sqrt{dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2 + dx^2 dy^2} - \frac{1}{2} \vec{\sigma}_x dy dz - \frac{1}{2} \vec{\sigma}_y dz dx - \frac{1}{2} \vec{\sigma}_z dx dy$$

Les longueurs élémentaires dx , dy et dz sont supposées infiniment petites de sorte que le second membre est un infiniment petit d'ordre deux et le premier d'ordre trois et que ce dernier devient négligeable dans le passage à la limite où les trois longueurs tendent vers zéro ; d'où successivement, en simplifiant par $\frac{1}{2}$:

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) \sqrt{dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2 + dx^2 dy^2} = \vec{\sigma}_x dy dz + \vec{\sigma}_y dz dx + \vec{\sigma}_z dx dy$$

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2 + dx^2 dy^2}} (\vec{\sigma}_x dy dz + \vec{\sigma}_y dz dx + \vec{\sigma}_z dx dy)$$

On constate que $\vec{\sigma}(\vec{n})$ est combinaison linéaire de $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$ et $\vec{\sigma}_z$; reste à donner du sens aux trois coefficients. Puisque (cf supra) $2 d\vec{S}_4 = dy dz \vec{e}_x + dz dx \vec{e}_y + dx dy \vec{e}_z$ et de module (cf supra) $2 dS_4 = \sqrt{dy^2 dz^2 + dz^2 dx^2 + dx^2 dy^2}$, ces coefficients sont les composantes du vecteur $\frac{d\vec{S}_4}{dS_4}$, c'est à dire du vecteur $\vec{n}$, que l'on notera n_x , n_y et n_z .

Si l'on note σ_{xx} , σ_{yx} et σ_{zx} les composantes de $\vec{\sigma}_x$, σ_{xy} , σ_{yy} et σ_{zy} celles de $\vec{\sigma}_y$ et σ_{xz} , σ_{yz} et σ_{zz} celles de $\vec{\sigma}_z$, on déduit de ce qui précède les expressions des composantes de $\vec{\sigma}(\vec{n})$:

$$\begin{cases} \sigma_x(\vec{n}) = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z \\ \sigma_y(\vec{n}) = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z \\ \sigma_z(\vec{n}) = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{cases}$$

6. On rappelle que seules y figurent les forces extérieures donc les contraintes en surface.

que l'on peut bien évidemment noter de façon matricielle :

$$(\vec{\sigma}) = (\sigma) (\vec{n})$$

où la matrice (σ) de coefficients σ_{ij} est appelée *matrice (ou tenseur) des contraintes*.

Remarque : sur toute surface dS de vecteur normal $\vec{n}$, $\vec{\sigma}(\vec{n})$ peut être décomposée en une composante normale (parallèle à $\vec{n}$) que l'on appelle tout simplement *contrainte normale* (et qui pour un fluide parfait s'identifie à la pression, au sens près) et une composante tangentielle (orthogonale à $\vec{n}$) que l'on appelle *contrainte de cisaillement* (et qui pour un fluide visqueux s'identifie à la force surfacique de viscosité).

3.c Symétrie de la matrice des contraintes.

Imaginons un petit cube de côté a petit devant la distance caractéristique sur laquelle (σ) varie de façon significative ; en conséquence (σ) peut-être considérée comme une matrice constante. On prendra l'origine du repère sur un sommet et les trois axes selon les arêtes.

Sur toute face, par exemple la face $x = a$, le vecteur normal est constant ($\vec{e}_x$ sur l'exemple) donc la contrainte $(\sigma)(\vec{e}_x)$ aussi, les forces surfaciques $(\sigma)(\vec{e}_x)dS$ sont donc uniformément réparties et l'on sait (voir les chapitres de mécanique du point) qu'on peut alors les remplacer par une force unique qui en est la somme soit $(\sigma)(\vec{e}_x)a^2$, appliquée à l'isobarycentre de la face, donc en son milieu J . En calculant explicitement $(\sigma)(\vec{e}_x)$, on a donc au centre J de la face $x = a$, une force $\vec{F} = \sigma_{xx}a^2\vec{e}_x + \sigma_{yx}a^2\vec{e}_y + \sigma_{zx}a^2\vec{e}_z$.

De même pour la face opposée ($x = 0$) de vecteur unitaire $-\vec{e}_x$, on a en son centre I une force opposée $-\vec{F} = -(\sigma_{xx}a^2\vec{e}_x + \sigma_{yx}a^2\vec{e}_y + \sigma_{zx}a^2\vec{e}_z)$.

La figure 3 p. 12 résume la situation (les forces $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ y ont été décomposées en leurs trois composantes).

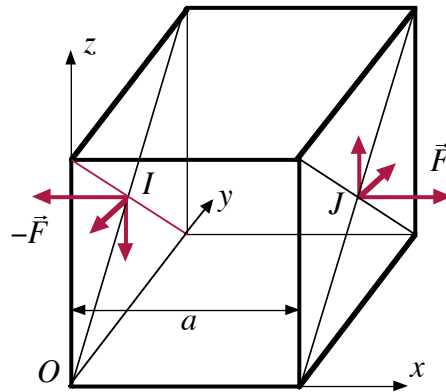


FIGURE 3 – Élément cubique de solide.

On sait (voir les chapitres de mécanique du point) que deux forces opposées en des points différents (disons $\vec{F}$ en J et $-\vec{F}$ en I) constituent un couple dont le moment est $\vec{I} \vec{J} \wedge \vec{F}$; on a donc ici pour ce couple de faces, avec $\vec{IJ} = a \vec{e}_x$ un premier moment (calcul de routine) :

$$\vec{I}_1 = \sigma_{yx} a^3 \vec{e}_z - \sigma_{zx} a^3 \vec{e}_y$$

Les deux autres couples de faces conduisent de même (inutile d'effectuer les calculs, une permutation circulaire des indices est plus rapide) à deux autres moments :

$$\vec{I}_2 = \sigma_{zy} a^3 \vec{e}_x - \sigma_{xy} a^3 \vec{e}_z$$

$$\vec{I}_3 = \sigma_{xz} a^3 \vec{e}_y - \sigma_{yz} a^3 \vec{e}_x$$

d'où un moment total :

$$\vec{I} = (\sigma_{zy} - \sigma_{yz}) a^3 \vec{e}_x + (\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) a^3 \vec{e}_y + (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) a^3 \vec{e}_z$$

Appliquons le théorème des moment au centre de gravité G du cube ; le moment du poids y est appliqué, il est donc nul. L'isotropie du cube entraîne (voir comment s'en convaincre⁷ au chapitre B-VIII ce qui concerne la cinétique du solide) que le moment cinétique est de la forme $J \vec{\omega}$ avec $J = \frac{1}{6} M a^2 = \frac{1}{6} \mu a^5$ en introduisant la masse volumique μ . Là encore seuls les moments extérieurs, donc ceux des contraintes en surfaces sont à prendre en ligne de compte et l'on a donc :

$$(\sigma_{zy} - \sigma_{yz}) a^3 \vec{e}_x + (\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) a^3 \vec{e}_y + (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) a^3 \vec{e}_z = \frac{1}{6} \mu a^5 \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Le coté a du cube est très petit, le terme en a^5 est donc négligeable devant celui en a^3 , on a donc en pratique :

$$(\sigma_{zy} - \sigma_{yz}) a^3 \vec{e}_x + (\sigma_{xz} - \sigma_{zx}) a^3 \vec{e}_y + (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) a^3 \vec{e}_z = \vec{0}$$

d'où en projection sur les axes $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ et $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$; la matrice des contraintes est donc elle aussi symétrique.

3.d Condition d'équilibre, approches surfacique et volumique.

Soit un solide ou une partie d'un solide, limité par la surface S d'intérieur V . Il est soumis à des forces volumiques comme les forces de pesanteur ; le volume élémentaire dV est soumis à la force notée $\vec{f} dV$ ($\vec{f}$ est une densité volumique de force, en général connue). Il est soumis à des forces surfaciques qui ne sont autres que celles qu'on vient d'étudier ; la

⁷. Si l'on n'y arrive pas, ce n'est pas grave : ce terme sera d'ordre supérieur (voir juste après) donc négligeable.

surface élémentaire de vecteur surface $\vec{dS} = dS \vec{n}$ est soumise à une force que nous avons notée $dF = \vec{\sigma}(\vec{n}) dS$.

A l'équilibre, la somme de forces est nulle, donc :

$$\vec{0} = \iiint_V \vec{f} dV + \oint_S \vec{\sigma}(\vec{n}) dS$$

Essayons maintenant de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume ; avec la relation matricielle $(\vec{\sigma}) = (\sigma)(\vec{n})$, on ne voit guère comment faire. Projetons d'abord sur les trois axes et travaillons sur la première, les autres seront traités par analogie. On part de :

$$0 = \iiint_V f_x dV + \oint_S \sigma_x(\vec{n}) dS = \iiint_V f_x dV + \oint_S (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) dS$$

L'expression $\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z$ est le produit scalaire de $\vec{n}$ par un vecteur dont les composantes sont données par la première ligne de la matrice (σ) et par symétrie de sa première colonne, que l'on avait noté $\vec{\sigma}_x$ plus haut. On a donc, en utilisant le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI :

$$0 = \iiint_V f_x dV + \oint_S \vec{\sigma}_x \cdot \vec{n} dS = \iiint_V f_x dV + \oint_S \vec{\sigma}_x \cdot \vec{dS} = \iiint_V (f_x + \text{div } \vec{\sigma}_x) dV$$

Ceci étant vrai quel que soit le volume V choisi, la loi locale d'équilibre s'écrit :

$$\begin{cases} f_x + \text{div } \vec{\sigma}_x = 0 \\ f_y + \text{div } \vec{\sigma}_y = 0 \\ f_z + \text{div } \vec{\sigma}_z = 0 \end{cases}$$

On trouve souvent dans la littérature une notation de divergence vectorielle d'une matrice dont les composantes sont les divergences classiques (scalaires) des lignes de la matrice, ici, ce serait $\vec{\text{div}} \vec{\sigma}$. Avec cette notation, qui prend moins de place mais n'apprend rien de plus, on peut écrire :

$$\vec{f} + \vec{\text{div}} \vec{\sigma} = \vec{0}$$

C'est un système d'équations aux dérivées partielles dont on ne connaît que les conditions aux limites, à savoir les valeurs de $\vec{\sigma}(\vec{n})$ en surface du solide. Sauf dans des cas extrêmement simples (on en verra plus loin), on ne peut résoudre ce problème que par des méthodes numériques opérées par de puissants ordinateurs (méthode dite des *éléments finis*).

Remarque : dans le cas de la viscosité on verra un peu plus loin (remarque en fin du paragraphe 4.b commençant p. 16) que l'on a :

$$\begin{cases} \text{si } i \neq j & \sigma_{ij} = 2\eta \varepsilon_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \sigma_{ii} = 2\eta \left[\varepsilon_{ii} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\varepsilon) \right] = 2\eta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \eta (\text{div } \vec{v}) \end{cases}$$

La composante sur Ox de l'équivalent volumique des forces de viscosité est, comme ci-dessus, en développant (avec le théorème de SCHWARTZ) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{\sigma}_x &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \dots \\
\dots &= \eta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) = \dots \\
\dots &= \eta \left[2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \right] - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) = \dots \\
\dots &= \eta \left[\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) \right] - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) = \dots \\
\dots &= \eta \left[\Delta v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) \right] - \frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) = \eta \left[\Delta v_x + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) \right]
\end{aligned}$$

d'où un équivalent volumique $\eta \left[\Delta v_x + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) \right]$ pour la composante sur Ox et analogues sur Oy et Oz , que l'on regroupe vectoriellement en $\eta \left[\Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{v}) \right]$ dont le second terme passe inaperçu dans les écoulements de fluides incompressibles ou les écoulements incompressibles de fluides compressibles (voir les chapitres de mécanique des fluides B-XIII et B-XIV).

4 Lois de l'élasticité.

4.a Conséquences de la linéarité. Notation de Voigt.

Pour les faibles déformation, la loi de HOOKE⁸, y a un lien linéaire entre la matrice des déformations (ε) de coefficients ε_{ij} et la matrice des contraintes (σ) de coefficients σ_{kl} , chaque coefficient de la seconde est donc combinaison linéaire des *tous* les coefficients de la première; l'ennuyeux, c'est que ça fait intervenir une bestiole à quatre indices et une sommation double, quelque chose comme :

$$\sigma_{kl} = \sum_i \sum_j a_{ijkl} \varepsilon_{ij}$$

Une telle bestiole s'appelle un tenseur, à trois dimensions, elle a $3^4 = 81$ composantes et c'est donc lourd à manipuler.

Par ailleurs nous savons que les deux matrices concernées sont symétriques, ce qui doit apporter certaines contraintes au tenseur mais pas faciles à mettre en évidence sous cette forme. Une astuce est de remarquer qu'une matrice symétrique n'a, en trois dimensions, que six coefficients indépendants, par exemple pour (σ), ce sont σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} sur la diagonale

8. qui n'est qu'un développement limité à l'ordre 1 qui, par chance pour nous, a un large domaine dans lequel c'est une bonne approximation.

et $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ et $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$ en dehors ; elle appartient donc à un espace vectoriel à 6 dimensions dont la base est formée des six matrices pour lesquelles un et un seul de ces coefficients est égal à l'unité et les autres nuls ; les 6 coefficients susnommés sont ainsi les coefficients de la matrice dans cet espace vectoriel.

La notation de VOIGT consiste à noter dans cette base, par exemple pour (σ) , σ_1 , σ_2 et σ_3 les termes diagonaux de la présentation matricielle (respectivement σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}) et σ_4 , σ_5 et σ_6 les valeurs communes des termes non-diagonaux de la présentation matricielle (représentées respectivement par σ_{yz} , σ_{zx} , σ_{xy}). Avec cette notation, la relation linéaire entre contraintes et déformation s'écrira :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{i=6} a_{ij} \varepsilon_j$$

La symétrie des matrices des déformations et des contraintes est automatiquement gérée et les coefficients de la relation linéaire forment ici une classique matrice carrée dans un espace à 6 dimensions ; elle a $6^2 = 36$ termes, ce qui est un gain appréciable par rapport aux 81 précédemment évoqués.

Remarque : on peut éventuellement noter les 6 valeurs de l'indice non par un entier de 1 à 6 mais par 6 chaînes de caractères "xx", "yy", "zz", "yz", "zx" et "xy", ce qui est plus parlant. Par exemple a_{24} devient alors $a_{yy\ yz}$ mais il faut bien comprendre qu'il n'y a que deux indices respectivement sur cet exemple "yy" et "yz".

4.b Conséquence de l'isotropie. Coefficients de Lamé.

Ce cours est une initiation, aussi ne nous occuperons nous que du cas le plus simple, celui d'un matériau isotrope, ce qui va apporter énormément de simplifications parmi les 36 coefficients de la matrice (a) . Nous allons pour cela envisager successivement trois séries de changements d'axes qui doivent laisser la matrice invariante, isotropie oblige.

• Première série.

Considérons une rotation d'un demi-tour autour de Oz les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont remplacés par $-\vec{e}_x$ et $-\vec{e}_y$; la matrice de passage (et son inverse) est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice des déformations, qui, en présentation classique, est $\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$ devient :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & -\varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

(inutile d'effectuer les calculs : la multiplication à droite par la matrice de passage change le signe des colonnes 2 et 3 et celle à gauche les lignes 2 et 3 ; les termes qui changent deux fois de signe reprennent leurs valeurs initiales.)

En notation de VOIGT, les coefficients ε_5 et ε_6 changent donc de signe et les autres sont inchangés ; il en va de même pour la matrice (σ) .

Si l'on développe une ligne de la relation $\sigma_i = \sum a_{ij} \varepsilon_j$, si i est entre 1 et 4 (prenons 1 pour exemple) on doit avoir après la rotation :

$$\sigma_1 = a_{11} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2 + a_{13} \varepsilon_3 + a_{14} \varepsilon_4 - a_{15} \varepsilon_5 - a_{16} \varepsilon_6$$

qui ne peut être identique à son expression avant la rotation que si $-a_{15} = a_{15}$ donc $a_{15} = 0$ et de même $a_{16} = 0$; de même aussi pour les lignes 2 à 4.

Par contre si l'indice de la ligne est 5 ou 6 (prenons 5 pour exemple) on doit avoir :

$$-\sigma_5 = a_{51} \varepsilon_1 + a_{52} \varepsilon_2 + a_{53} \varepsilon_3 + a_{54} \varepsilon_4 - a_{55} \varepsilon_5 - a_{56} \varepsilon_6$$

soit

$$\sigma_5 = -a_{51} \varepsilon_1 - a_{52} \varepsilon_2 - a_{53} \varepsilon_3 - a_{54} \varepsilon_4 + a_{55} \varepsilon_5 + a_{56} \varepsilon_6$$

et cette fois on a $a_{51} = a_{52} = a_{53} = a_{54} = 0$ et de même pour la ligne 6.

L'allure de la matrice (a) est donc celle-ci, en notant 0 les termes nuls et "?" les non nuls :

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

En réitérant le raisonnement avec une rotation d'un demi-tour autour de Ox , on obtient des termes nuls supplémentaires puis avec une rotation d'un demi-tour autour de $Oy...$ qui n'apprend rien de plus, on arrive à :

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

On est passé de 36 termes à 12 non nuls. Allons plus loin.

• Deuxième série.

Considérons une rotation d'un quart de tour autour de Oz , les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont remplacés par $\vec{e}_y$ et $-\vec{e}_x$; la matrice de passage est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice

inverse⁹ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (pour une rotation d'un quart de tour dans l'autre sens, on permute les deux matrices) et la matrice des déformations devient :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} & -\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{zy} & -\varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

(inutile d'effectuer les calculs : la multiplication à droite change les signes de la colonne 1 puis permute les colonnes 1 et 2 et celle à gauche change les signes de la ligne 1 puis permute les lignes 1 et 2 ; les termes qui changent deux fois de signe reprennent leurs valeurs initiales.)

En notation de VOIGT, ε_1 , ε_2 et ε_3 deviennent respectivement ε_2 , ε_1 et ε_3 et de même pour la matrice des contraintes. En ce qui concerne les trois premières lignes obtenues par la relation $\sigma_i = \sum a_{ij} \varepsilon_j$ soit :

$$\begin{cases} \sigma_1 = a_{11} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2 + a_{13} \varepsilon_3 \\ \sigma_2 = a_{21} \varepsilon_1 + a_{22} \varepsilon_2 + a_{23} \varepsilon_3 \\ \sigma_3 = a_{31} \varepsilon_1 + a_{32} \varepsilon_2 + a_{33} \varepsilon_3 \end{cases}$$

deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_2 = a_{11} \varepsilon_2 + a_{12} \varepsilon_1 + a_{13} \varepsilon_3 \\ \sigma_1 = a_{21} \varepsilon_2 + a_{22} \varepsilon_1 + a_{23} \varepsilon_3 \\ \sigma_3 = a_{31} \varepsilon_2 + a_{32} \varepsilon_1 + a_{33} \varepsilon_3 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} \sigma_1 = a_{22} \varepsilon_1 + a_{21} \varepsilon_2 + a_{23} \varepsilon_3 \\ \sigma_2 = a_{12} \varepsilon_1 + a_{11} \varepsilon_2 + a_{13} \varepsilon_3 \\ \sigma_3 = a_{32} \varepsilon_1 + a_{31} \varepsilon_2 + a_{33} \varepsilon_3 \end{cases}$$

ce qu'on aurait pu trouver plus rapidement en comprenant qu'il suffisait de permuter les deux premières colonnes puis les deux premières lignes. L'invariance de la matrice entraîne que $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{13}$ et $a_{32} = a_{31}$. L'étude ultérieure de rotations d'un quart

9. l'inverse d'une matrice unitaire, qui passe d'un repère orthonormé à un autre, n'est rien d'autre que sa transposée ; inutile donc de se lancer dans les calculs.

de tour autour de Oy puis de Oz montre que pour le quart supérieur gauche de la matrice (a), les termes diagonaux sont tous égaux et les termes non diagonaux tous égaux. L'étude du quart inférieur droit, qui est diagonal, se mène de même et plus aisément et montre que ces termes sont tous égaux.

A ce stade la matrice (a) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

On est passé de 12 à 3 termes indépendants. Allons un peu plus loin encore.

• Ultime série.

Les deux premières idées étaient, somme toute, assez naturelles ; celle-ci est un peu plus subtile mais a les conséquences finalement les plus importantes. Imaginons une rotation d'un huitième de tour autour de l'axe Oz , les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont remplacés

par $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_y - \vec{e}_x)$; la matrice de passage est $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice

inverse¹⁰ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (pour une rotation d'un quart de tour dans l'autre sens, on

permuter les deux matrices) et la matrice des déformations devient, compte tenu de sa symétrie :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} - 2\varepsilon_{xy}}{2} & \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} & \frac{\varepsilon_{zx} - \varepsilon_{yz}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} & \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + 2\varepsilon_{xy}}{2} & \frac{\varepsilon_{zx} + \varepsilon_{yz}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\varepsilon_{zx} - \varepsilon_{yz}}{\sqrt{2}} & \frac{\varepsilon_{zx} + \varepsilon_{yz}}{\sqrt{2}} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

(inutile d'effectuer les calculs : la multiplication à droite remplace les colonnes 1 et 2 respectivement par leur demi-différence et leur demi-somme divisée par $\sqrt{2}$ et celle à gauche change de même avec les lignes.)

Nous n'en retiendrons que $\varepsilon_6 = \varepsilon_{xy}$ est remplacé par $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}$ (notation de Voigt et notation classique) et de même σ_6 par $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

10. Voir remarque précédente.

La relation $\sigma_6 = \gamma \varepsilon_6$ devient donc (après multiplication par 2) $\sigma_1 - \sigma_2 = \gamma (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, d'où en reportant les expressions de σ_1 et σ_2 :

$$\gamma (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (\alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2 + \beta \varepsilon_3) - (\beta \varepsilon_1 + \alpha \varepsilon_2 + \beta \varepsilon_3) = (\alpha - \beta) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

d'où $\alpha - \beta = \gamma$

Finalement, la matrice (a) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \beta + \gamma & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta + \gamma & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \beta + \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Dans un milieu isotrope, le tenseur initialement prévu avec 81 coefficients, ne dépend plus que de deux coefficients indépendants.

• **Réécriture matricielle.**

La matrice (a) est somme d'une matrice $\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ dont l'effet sur la ma-

trice (ε) est de multiplier tous ses coefficients par γ (donc une contribution $\gamma(\varepsilon)$ à (σ))

et d'une matrice $\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne donne comme résultat que des coefficients

diagonaux tous égaux au produit de β par $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ en notation de VOIGT, soit en notation classique $\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, c'est à dire la trace $Tr(\varepsilon)$ de la matrice (ε) (donc finalement une contribution à (σ) égale à $\beta Tr(\varepsilon) (Id)$ où (Id) est la matrice identité, diagonale avec les termes diagonaux égaux à l'unité).

On peut résumer la situation, dans le cas d'un milieu isotrope, rappelons-le, en affirmant que la linéarité se résume à deux coefficients β et γ tels que :

$$(\sigma) = \gamma(\varepsilon) + \beta Tr(\varepsilon) (Id)$$

Remarque 1 : dans certains ouvrages mathématiques, l'on affirme que cette expression est une conséquence d'une rare évidence de l'isotropie. Soit !

Remarque 2 : Il est d'usage¹¹ d'écrire :

$$(\sigma) = 2\mu(\varepsilon) + \lambda Tr(\varepsilon)(Id)$$

où λ et μ sont appelés *coefficients de LAMÉ*.

Remarque 3 : On peut inverser ainsi la relation, on l'applique successivement aux trois termes diagonaux de (σ) et l'on fait la somme membre à membre des égalités obtenus ; on calcule donc de cette façon la trace de (σ) :

$$Tr(\sigma) = 2\mu Tr(\varepsilon) + 3\lambda Tr(\varepsilon)$$

d'où l'on tire l'expression de $Tr(\varepsilon)$ en fonction de $Tr(\sigma)$ que l'on reporte dans la relation initiale pour en déduire aisément que :

$$(\varepsilon) = \frac{1}{2\mu} \left((\sigma) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} Tr(\sigma)(Id) \right)$$

Remarque 4 : la viscosité, pour les mêmes raisons doit être gérée par deux coefficients qui sont les pendants des coefficients de LAMÉ mais au lieu d'écrire $(\sigma) = 2\mu(\varepsilon) + \lambda Tr(\varepsilon)(Id)$, il s'avère pertinent d'écrire :

$$(\sigma) = 2\eta \left[(\varepsilon) - \frac{1}{3} Tr(\varepsilon)(Id) \right] + \zeta Tr(\varepsilon)(Id)$$

Ainsi $(\varepsilon) - \frac{1}{3} Tr(\varepsilon)(Id)$ a, par construction, une trace nulle et l'effet de la modification de volume lié (voir la remarque 2 du paragraphe 2.b commençant p. 5) à $Tr(\varepsilon)$ n'est géré que par le terme en ζ . Il se trouve que ζ est négligeable devant celui de η ; on l'appelle *seconde viscosité* et sa manifestation principale est le faible amortissement des ondes progressives longitudinales donc de compression/dilatation (c'est normal car ζ ne porte que sur les termes diagonaux des matrices) ; on a compris que l'on parle ici des ondes sonores et l'on sait bien qu'elle sont peu amorties. On a donc en bonne approximation (voir la définition de (ε) dans ce cadre) :

$$\begin{cases} \text{si } i \neq j & \sigma_{ij} = 2\eta \varepsilon_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \sigma_{ii} = 2\eta \left[\varepsilon_{ii} - \frac{1}{3} Tr(\varepsilon) \right] = 2\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \eta (\text{div } \vec{v}) \right) \end{cases}$$

En particulier pour un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x$, les seuls ε_{ij} sont :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\eta \varepsilon_{ij} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

ce qui donne sur les surfaces parallèles à zOx de vecteur normal $\vec{e}_y$ une force surfacique $\eta \frac{dv_x}{dy} \vec{e}_x$ ce qui est la formule la plus courante des cours sur la viscosité η .

11. Pourquoi a-t-on fait apparaître un facteur 2 dans cette expression ? Je hasarde l'hypothèse que c'est pour la simplification avec le $\frac{1}{2}$ de la définition de (ε) .

4.c Energie libre de déformation.

On sait (voir le chapitre E-V consacré aux potentiels thermodynamiques) que dans une transformation réversible (dans le cadre linéaire de l'élasticité, la réversibilité est acquise) monotherme (à température extérieure constante), la variation d'énergie libre est égale au travail des forces extérieures. On appelle énergie libre de déformation la variation d'énergie libre d'un solide, entre un état initial de référence sans contraintes donc non déformé et un état final où le solide a subi une déformation, gérée par une matrice des déformations (ε_f) , sous l'action de contraintes, gérées par une matrice des contraintes (σ_f) qui est liée à (ε_f) par une relation linéaire.

Nous nous proposons de calculer cette énergie libre de déformation par intégration¹² entre $\xi = 0$ et $\xi = 1$ de variations élémentaires entre un état où la matrice des déformations est $(\varepsilon) = \xi (\varepsilon_f)$ (la matrice (ε) multipliée par le scalaire ξ), donc la matrice des contraintes, linéarité oblige, $\xi (\sigma_f)$ et un état où la matrice des déformations est $(\xi + d\xi) (\varepsilon_f)$; entre les deux, la matrice des contraintes peut être considérée comme constante et on la note $(\sigma) = \xi (\sigma_f)$ et les déformations élémentaires notées $\vec{u}$ sont gérées par la matrice $d\xi (\varepsilon_f)$ notée $(d\varepsilon)$.

Je concède que la suite est un peu délicate mais il faut essayer de suivre. Toutefois, ô mon lecteur, si tu décroches, il ne t'en sera tenu aucune rigueur; par ailleurs sauter ce paragraphe et le suivant ne t'empêchera nullement d'aborder la suite du chapitre.

Soit un solide limité par la surface S d'intérieur V . Il est soumis, pendant cette déformation élémentaire, à des forces volumiques de densité volumique $\vec{f}$ et des forces surfaciques de contraintes (on reprend la notation $dF = \vec{\sigma}(\vec{n}) dS$) gérées par (σ) ; les déplacements élémentaires $\vec{u}$ d'un point de la surface ou de l'intérieur sont gérés par $(d\varepsilon)$ (cf supra). Le travail élémentaire et la variation élémentaire d'énergie libre notée¹³ sont donc :

$$d\mathcal{F} = \delta W = \iiint_V \vec{f} \cdot \vec{u} dV + \iint_S \vec{\sigma}(\vec{n}) \cdot \vec{u} dS$$

Chaque produit scalaire de forme $\vec{a} \cdot \vec{b}$ est somme de trois termes $a_x b_x$, $a_y b_y$ et $a_z b_z$, donc le travail élémentaire est somme des trois termes notés ici δW_x , δW_y et δW_z ; on va en expliciter un, les autres seront obtenus par analogie. On a donc, en reprenant le formalisme et les notations du paragraphe consacré à la formulation volumique de l'équilibre (cf paragraphe 3.d p. 13) et avec de grands classiques de l'analyse vectorielle (voir le chapitre

12. Bizarrement, je n'ai trouvé cette approche, pourtant classique, nulle part.

13. $\mathcal{F}$ et non F pour éviter la confusion avec une force.

A-IX qui lui est consacré) :

$$\begin{aligned}
\delta W_x &= \iiint_V u_x f_x dV + \oint_S u_x \sigma_x (\vec{n}) dS = \dots \\
&\dots = \iiint_V u_x f_x dV + \oint_S u_x \vec{\sigma}_x \cdot d\vec{S} = \iiint_V [u_x f_x + \text{div} (u_x \vec{\sigma}_x)] dV = \dots \\
&\dots = \iiint_V [f_x u_x + u_x \text{div} \vec{\sigma}_x + \overrightarrow{\text{grad}} u_x \cdot \vec{\sigma}_x] dV = \dots \\
&\dots = \iiint_V u_x [f_x + \text{div} \vec{\sigma}_x] dV + \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} u_x \cdot \vec{\sigma}_x dV
\end{aligned}$$

La condition d'équilibre, en formulation volumique, entraîne (cf supra) que $f_x + \text{div} \vec{\sigma}_x$ est nul ; la première intégrale est donc nulle. Evaluons le terme à intégrer de la seconde. Le déplacement $\vec{u}$ est somme d'un terme de rotation en bloc géré par le produit vectoriel d'un vecteur qu'on notera Θ et du vecteur position et d'un terme de déformation géré (voir la notation adoptée ici) par la matrice $(d\varepsilon)$, on a donc :

$$u_x = \Theta_y z - \Theta_z y + d\varepsilon_{xx} x + d\varepsilon_{xy} y + d\varepsilon_{xz} z$$

d'où l'on tire aisément :

$$\overrightarrow{\text{grad}} u_x = \Theta_y \vec{e}_z - \Theta_z \vec{e}_y + d\varepsilon_{xx} \vec{e}_x + d\varepsilon_{xy} \vec{e}_y + d\varepsilon_{xz} \vec{e}_z$$

Le produit scalaire par $\sigma_x = \sigma_{xx} \vec{e}_x + \sigma_{xy} \vec{e}_y + \sigma_{xz} \vec{e}_z$ donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} u_x \cdot \vec{\sigma}_x = \Theta_y \sigma_{xz} - \Theta_z \sigma_{xy} + d\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + d\varepsilon_{xy} \sigma_{xy} + d\varepsilon_{xz} \sigma_{xz}$$

Les termes correspondants dans δW_y et δW_z sont respectivement :

$$\overrightarrow{\text{grad}} u_y \cdot \vec{\sigma}_y = \Theta_z \sigma_{yx} - \Theta_x \sigma_{yz} + d\varepsilon_{yx} \sigma_{yx} + d\varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + d\varepsilon_{yz} \sigma_{yz}$$

et

$$\overrightarrow{\text{grad}} u_z \cdot \vec{\sigma}_z = \Theta_x \sigma_{zy} - \Theta_y \sigma_{zx} + d\varepsilon_{zx} \sigma_{zx} + d\varepsilon_{zy} \sigma_{zy} + d\varepsilon_{zz} \sigma_{zz}$$

Compte tenu de la symétrie de la matrice (σ) les termes de rotation s'éliminent deux à deux et il reste finalement :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{F} = \delta W &= \iiint_V (d\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + d\varepsilon_{xy} \sigma_{xy} + d\varepsilon_{xz} \sigma_{xz} \dots \\
&\dots + d\varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + d\varepsilon_{yz} \sigma_{yz} + d\varepsilon_{zx} \sigma_{zx} + d\varepsilon_{zy} \sigma_{zy} + d\varepsilon_{zz} \sigma_{zz}) dV
\end{aligned}$$

qui fait intervenir une variation d'énergie libre volumique :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{F}_{vol} &= d\varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + d\varepsilon_{xy} \sigma_{xy} + d\varepsilon_{xz} \sigma_{xz} \dots \\
&\dots + d\varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + d\varepsilon_{yz} \sigma_{yz} + d\varepsilon_{zx} \sigma_{zx} + d\varepsilon_{zy} \sigma_{zy} + d\varepsilon_{zz} \sigma_{zz} = \dots = \\
&\dots = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}
\end{aligned}$$

Si l'on considère $\mathcal{F}_{vol}$ comme fonction *formelle* des 9 coefficients ε_{ij} (on ne tient pas compte ici de la symétrie ni on utilise la notation de VOIGT sinon il y aurait pour les termes non diagonaux un fâcheux facteur 2), on peut alors affirmer que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}_{vol}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Enfin, avec $(\sigma) = \xi(\sigma_f)$ et $(d\varepsilon) = d\xi(\varepsilon_f)$, on a :

$$d\mathcal{F} = \delta W = \xi d\xi \iiint_V \sum_i \sum_j \sigma_{fij} \varepsilon_{fij} dV$$

d'où, par intégration de $\xi = 0$ à $\xi = 1$

$$\mathcal{F} = W = \frac{1}{2} \iiint_V \sum_i \sum_j \sigma_{fij} \varepsilon_{fij} dV$$

Remarque : puisque les σ_{fij} sont fonction linéaires des ε_{fij} , ceci justifie a posteriori l'affirmation précédente que $\mathcal{F}_{vol}$ comme fonction des ε_{ij} . Au sens thermodynamique, contrantes et déformations sont des *variables conjuguées*.

4.d Lien entre thermodynamique et élasticité.

Reportons dans l'expression précédente, utilisée sous la forme $\mathcal{F}_{vol} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{fij} \varepsilon_{fij}$, l'expression des σ_{fij} soit $2\mu \varepsilon_{fij}$ si $i \neq j$ et $2\mu \varepsilon_{fij} + \lambda(\varepsilon_{fxx} + \varepsilon_{fyy} + \varepsilon_{fzz})$ si $i = j$.

Calculons σ_{fxy} (les autres coefficients non diagonaux par analogie) par $\sigma_{fxy} = \frac{\partial \mathcal{F}_{vol}}{\partial \varepsilon_{fxy}}$ (cf supra, en adaptant la notation). Le seul terme en ε_{fxy} dans $\mathcal{F}_{vol}$ est $\frac{1}{2} \sigma_{fxy} \varepsilon_{fxy} = \mu \varepsilon_{fxy}^2$ d'où $\sigma_{fxy} = \frac{\partial \mathcal{F}_{vol}}{\partial \varepsilon_{fxy}} = 2\mu \varepsilon_{fxy}$; on retrouve ce dont on est parti : pour les termes non diagonaux, il y a bien cohérence entre les deux approches.

Calculons maintenant σ_{fxx} (les autres coefficients diagonaux par analogie). Les termes de $\mathcal{F}_{vol}$ contenant ε_{fxx} sont :

$$\frac{1}{2} (\sigma_{fxx} \varepsilon_{fxx} + \sigma_{fyy} \varepsilon_{fyy} + \sigma_{fzz} \varepsilon_{fzz}) = \dots = \mu (\varepsilon_{fxx}^2 + \varepsilon_{fyy}^2 + \varepsilon_{fzz}^2) + \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{fxx} + \varepsilon_{fyy} + \varepsilon_{fzz})^2$$

d'où $\sigma_{fxx} = \frac{\partial \mathcal{F}_{vol}}{\partial \varepsilon_{fxx}} = 2\mu \varepsilon_{fxx} + \lambda(\varepsilon_{fxx} + \varepsilon_{fyy} + \varepsilon_{fzz})$; là aussi, on retrouve ce dont on est parti et il y a bien cohérence entre les deux approches.

Remarque : Ne croyez pas que ce raisonnement où l'on retrouve ce qu'on y a mis au début soit vicieux. Supposons que nous n'ayons pas établi la forme que doit avoir la loi linéaire d'élasticité. La relation $\sigma_{fxy} = \frac{\partial \mathcal{F}_{vol}}{\partial \varepsilon_{fxy}}$ reste valable, elle n'a pas utilisé ce lien.

L'énergie libre volumique $\mathcal{F}_{vol}$, pour des déformations qui restent pratiquement extrêmement faibles pour la plupart des matériaux dont on utilise l'élasticité, peut être assimilée à son développement limité arrêté au premier ordre nul. L'ordre 0 est nul car c'est l'état de référence supposé, par définition, sans déformation ; l'ordre 1 aussi sinon au moins un des $\sigma_{f\,xy} = \frac{\partial \mathcal{F}_{vol}}{\partial \varepsilon_{f\,xy}}$ serait non nul et constant (dérivée d'un terme du premier degré) donc non nul dans l'état de référence supposé, par définition, sans contrainte. Donc l'énergie libre volumique est d'ordre 2. Elle est scalaire ; quels scalaires peut-on créer à partir de la matrice (ε) des déformations, dans un milieu isotrope, donc quels scalaires qui soient invariants dans un changement de base ? En algèbre tensorielle, on ne peut les obtenir que par contraction, c'est-à-dire par sommation sur toutes les valeurs possibles d'un ou plusieurs indices *muets*. Pour une matrice, il n'y en a que deux $\sum_i \sum_j \varepsilon_{f\,ij} \varepsilon_{f\,ij} = \sum_i \sum_j \varepsilon_{f\,ij}^2$ qui est d'ordre 2 et $\sum_i \varepsilon_{f\,ii} = Tr(\varepsilon_f)$ qui est d'ordre 1 mais qui, élevé au carré, passe à l'ordre 2. $\mathcal{F}_{vol}$ est donc de la forme :

$$\mathcal{F}_{vol} = Cte \sum_i \sum_j \varepsilon_{f\,ij}^2 + Cte \left(\sum_i \varepsilon_{f\,ii} \right)^2$$

Il suffit de noter les deux constantes respectivement μ et $\frac{\lambda}{2}$ pour retrouver les calculs du début de paragraphe. L'approche thermodynamique est donc pertinente¹⁴ pour établir les lois de l'élasticité.

Remarque : les lois de la thermodynamique (voir chapitre E-V sur les potentiels thermodynamiques) imposent que $\mathcal{F}_{vol}$ soit une forme quadratique (car c'en est une) positive afin qu'elle soit minimale à l'équilibre. Comme dans la remarque 4 du paragraphe 4.b commençant p. 16, à partir de la matrice de coefficients ε_{ij} (on laisse tomber l'indice f), associons la matrice de coefficients $\eta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} Tr(\varepsilon) \delta_{ij}$ qui est, par construction de trace nulle. En détaillant le carré de $\varepsilon_{ij} = \eta_{ij} + \frac{1}{3} Tr(\varepsilon) \delta_{ij}$ selon que i et j sont égaux ou non et en sommant, on montre, sans oublier que (η) a une trace nulle, que :

$$\sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2 = \sum_i \sum_j \eta_{ij}^2 + \frac{2}{3} Tr(\eta) Tr(\varepsilon) + 3 \left(\frac{1}{3} Tr(\varepsilon) \right)^2 = \sum_i \sum_j \eta_{ij}^2 + \frac{1}{3} Tr(\varepsilon)^2$$

d'où :

$$\mathcal{F}_{vol} = \mu \sum_i \sum_j \eta_{ij}^2 + \frac{2\mu + 3\lambda}{6} Tr(\varepsilon)^2$$

L'intérêt de cette réécriture est que si l'on prend une matrice (ε) de trace nulle, seul reste le premier terme et il faut que μ soit positif et si l'on prend une matrice de la forme $(\varepsilon) = a (Id)$, seul reste le second et il faut que $2\mu + 3\lambda$ soit lui aussi positif ; cette condition nécessaire est manifestement suffisante.

14. On peut certes vivre sans connaître la thermodynamique, mais tellement moins bien.

5 Les grands classiques.

Dans tout ce qui suit, les forces de pesanteur sont supposées négligeables. Cette hypothèse est raisonnable : un fil d'acier d'un mètre de longueur et d'un millimètre carré de section pèse quelques grammes et peut supporter le poids (sur Terre) d'une masse de quelques dizaines de kilogrammes.

5.a Solide soumis à une pression uniforme.

Soit un solide soumis en surface à une pression uniforme. En surface les forces sont donc de la forme $\vec{dF} = -p \vec{dS} = -p dS \vec{n}$ ce qui doit s'identifier à $\vec{\sigma}(\vec{n}) dS$, d'où l'on déduit que $\vec{\sigma}(\vec{n}) = -p \vec{n}$ pour tout $\vec{n}$, ce qui impose que la matrice des contraintes, à la surface, soit égale à
$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

La loi locale d'équilibre (voir plus haut), en volume, en négligeant les forces volumiques de pesanteur est

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{\sigma}_x = 0 \\ \operatorname{div} \vec{\sigma}_y = 0 \\ \operatorname{div} \vec{\sigma}_z = 0 \end{cases}$$

Elle est évidemment vérifiée par une matrice constante, ce qui milite pour que la matrice des contraintes soit uniforme et égale à celle connue en surface. Le lien entre la matrice des contraintes et celle des déformations, sous la forme (cf supra)

$$(\varepsilon) = \frac{1}{2\mu} \left((\sigma) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \operatorname{Tr}(\sigma) (Id) \right)$$

donne ici une matrice des déformation diagonale telle que :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \frac{1}{2\mu} \left(1 - 3 \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) (-p) = -\frac{1}{2\mu} \frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu} p = -\frac{1}{3\lambda + 2\mu} p$$

On notera ici ε_0 la valeur commune. Tout point M initialement à la distance $\overrightarrow{OM}$ de l'origine s'est déplacé de $\overrightarrow{MM'} = (\varepsilon)(\overrightarrow{OM}) = \varepsilon_0 \overrightarrow{OM}$, d'où $\overrightarrow{OM'} = (1 + \varepsilon_0) \overrightarrow{OM}$. Toutes les longueurs ont été multipliées par $(1 + \varepsilon_0)$, donc le volume par $(1 + \varepsilon_0)^3 \approx (1 + 3\varepsilon_0)$; la variation dV du volume V est donc $dV = 3\varepsilon_0 V$, d'où $\frac{dV}{V} = -\frac{3}{3\lambda + 2\mu} p$. En comparant avec la définition classique de la compressibilité, soit :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{dV}{V} = -\chi \frac{F}{S}$$

on en déduit que celle-ci est liée aux coefficients de LAMÉ par la relation :

$$\chi = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$$

Remarque 1 : on note souvent $\chi = \frac{1}{K}$ où K est appelé *module de compressibilité* ou de façon plus moderne *module d'élasticité isostatique*.

Remarque 2 : On a vu paragraphe 4.d remarque p. 26 que $2\mu + 3\lambda$ est forcément positif, donc χ aussi.

5.b Fil soumis à une traction.

Soit un fil cylindrique (pas forcément de révolution) de longueur L dans la direction de Ox dont les sections dans les plans parallèles à yOz ont une surface S . On exerce sur la face à l'extrémité $x = L$, de vecteur unitaire $\vec{e}_x$ une force $\vec{F} = F \vec{e}_x$, parallèle à l'axe et uniformément répartie en bonne approximation ; à cet endroit la matrice des contraintes est telle que $(\sigma)(\vec{e}_x) = \frac{F}{S} \vec{e}_x$. On exerce sur la face à l'extrémité opposée ($x = 0$), de vecteur unitaire $-\vec{e}_x$ la force opposée $-\vec{F} = -F \vec{e}_x$ (pour obtenir l'équilibre des forces et l'immobilité du fil), uniformément répartie en bonne approximation ; à cet endroit la matrice des contraintes est telle que $(\sigma)(-\vec{e}_x) = \frac{F}{S} (-\vec{e}_x)$. Sur la face latérale, la contrainte est partout nulle d'où $(\sigma)(\vec{n}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{n}$ orthogonal à Ox . Ces données sont compatibles avec

une matrice des contraintes égale, en tout point de la surface à $\begin{pmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme dans le paragraphe précédent, l'équation d'équilibre local (pesanteur négligée) est obtenu si la matrice des contraintes a cette même valeur non seulement en surface mais à l'intérieur.

Le lien entre la matrice des contraintes et celle des déformations, soit

$$(\varepsilon) = \frac{1}{2\mu} \left((\sigma) - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \text{Tr}(\sigma) (Id) \right)$$

donne ici une matrice des déformation diagonale telle que :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{F}{S} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \frac{F}{S} \right) = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{F}{S} \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \frac{1}{2\mu} \left(0 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \frac{F}{S} \right) = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{F}{S} \end{cases}$$

En raisonnant comme au paragraphe précédent, les longueurs selon Ox sont multipliées par $(1 + \varepsilon_{xx})$; en particulier L (la longueur à vide) augmente de dL (l'allongement) qui vaut :

$$dL = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{F}{S} L$$

On note traditionnellement :

$$\frac{dL}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

où E est appelé *module d'YOUNG* (ou *module de traction* ou *module d'élasticité longitudinale*) ; il est donc lié aux coefficients de LAMÉ par la relation :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

De la même façon, les longueurs selon Oy et Oz dans les plans parallèles à yOz sont multipliées par $(1 + \varepsilon_{yy})$; en particulier le rayon R d'un cylindre de révolution augmente algébriquement (il diminue en fait) de dR (l'allongement) qui vaut :

$$dR = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{F}{S} R$$

On pourrait définir un coefficient tel que $-\frac{dR}{R} = \frac{1}{E'} \frac{F}{S}$ et l'on aurait $E' = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda}$ mais l'usage qui prévaut consiste à comparer $-\frac{dR}{R}$ à $\frac{dL}{L}$ en posant :

$$-\frac{dR}{R} = \nu \frac{dL}{L}$$

où ν est le coefficient de POISSON ; il vaut $\frac{E}{E'}$ soit :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Remarque 1 : pour un acier de bonne qualité E peut atteindre 10 GPa et ν est voisin de 0,3

Remarque 2 : pour un cylindre dont rayon n'est pas trop petit par rapport à L , il est aisé de mesurer le module d'YOUNG E et le coefficient de POISSON ν et l'on peut en déduire les coefficients de LAMÉ λ et μ . On peut procéder ainsi : de $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$, on tire $\mu = \lambda(\frac{1}{2\nu} - 1)$ que l'on reporte dans l'expression de E qui ne fait plus dès apparaître que λ ; les calculs s'arrangent bien et l'on arrive rapidement à :

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

que l'on reporte dans $\mu = \lambda(\frac{1}{2\nu} - 1)$ pour arriver à :

$$\mu = E \frac{1}{2(1 + \nu)}$$

5.c Lien entre cisaillement et glissement.

Complétons la figure 1 p. 8 pour obtenir la figure 4 p. 29. Il s'agit de la section dans le plan médian parallèle à xOy d'un parallélépipède de centre O et d'axes parallèles à ceux



On peut espérer obtenir le glissement vers la droite (de la figure) de la face BC (de vecteur normal $\vec{e}_y$) en exerçant sur elle une force $\vec{F}_1 = F \vec{e}_x$ uniformément répartie et représentée par une force unique en son milieu (flèche vert foncé¹⁵ sur la figure) mais si l'on exerce que cette force, le solide se déplacera vers la droite au lieu de se déformer. On ajoute donc une force opposée $-\vec{F}_1 = -F \vec{e}_x$ sur la face AD (de vecteur normal $-\vec{e}_y$).

Là encore ça ne peut pas convenir, car le couple de forces $\vec{F}_1$ sur BC et $-\vec{F}_1$ sur AD exercerait sur le solide un moment qui le ferait tourner et non se déformer. On compense l'effet de ce couple par celui opposé créé par une force $\vec{F}_2 = F \vec{e}_y$ sur la face CD (de vecteur normal $\vec{e}_x$) et $-\vec{F}_2 = -F \vec{e}_y$ sur la face AB (de vecteur normal $-\vec{e}_x$), ce couple provoquant un glissement relatif de la face CD vers le haut (de la figure).

15. foncé pour insister sur le côté obscur de la force?

valeur, ici simple à calculer (pas de termes diagonaux), à savoir :
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{F}{2\mu S} & 0 \\ \frac{F}{2\mu S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer les déplacements, plaçons l'origine en A et reprenons les résultats du paragraphe commentant la figure 1 p. 8 (on y remplace ε par $\frac{F}{2\mu S}$). Le point B se déplace de $\frac{aF}{2\mu S}$ vers la droite, ce qui crée l'angle $\widehat{BAB'} = \beta$ confondu avec sa tangente $\frac{BB'}{AB} = \frac{F}{2\mu S}$ et le point D se déplace de $\frac{aF}{2\mu S}$ vers le haut, ce qui crée l'angle $\widehat{BAD'}$ de même valeur β . La déformation angulaire totale est $\gamma = 2\beta = \frac{F}{\mu S}$.

On note traditionnellement :

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S}$$

où G est appelée *module de cisaillement* ou *module de COULOMB*. En comparant avec ce qui précède, le module de cisaillement G s'identifie au second coefficient de LAMÉ μ . Il est positif (car μ l'est, cf paragraphe 4.d remarque p. 26).

Remarque 1 : comme sur la figure 1 p. 8, la figure 4 p. 29 présente à l'intérieur du solide une partie découpée en biais à 45° $IJKL$. La face JK par exemple de vecteur unitaire $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ subit une contrainte (on utilise la matrice des contraintes) $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F}{S} (\vec{e}_y + \vec{e}_x)$ (les deux vecteurs ont été permutés mais ce n'est pas significatif ici) et donc, puisque sa surface est $S\sqrt{2}$, une force $\vec{F}_3 = F(\vec{e}_y + \vec{e}_x)$, normale vers l'extérieur, dessinée en violet ; la face IL subit la force opposée. De même, la face IJ de vecteur unitaire $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ subit une contrainte $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F}{S} (-\vec{e}_y + \vec{e}_x)$ (ici la permutation est significative) et donc une force $\vec{F}_4 = -F(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, normale vers l'intérieur ; la face KL subit la force opposée. Les contraintes sont algébriquement des contraintes normales de traction, de traction ou de compression, et l'on retrouve des déformations normales de dilatation algébrique, dilatation ou compression, qui relèvent du paragraphe précédent. Répétons-nous la distinction dilatation/glissement et contrainte normale/contrainte de cisaillement dépend de ce à quoi l'on s'intéresse.

5.d Torsion d'un fil.

Soit un fil cylindrique de longueur L selon Oz de rayon R ; si l'on exerce sur l'une de ses extrémités un couple de moment $\vec{T}$ parallèle à l'axe (et sur l'autre extrémité un couple $-\vec{T}$, sinon il tournerait en bloc), il se tord d'un angle θ . On cherche ici le lien entre la norme T du couple et l'angle de torsion θ .

Une première remarque : si l'on coupe par la pensée le cylindre en deux cylindres au niveau d'une hauteur z quelconque, la loi d'action et réaction impose qu'au niveau de la coupure il y ait un couple identique aux précédents donc le couple d'interaction est uniforme. Coupons maintenant, toujours par la pensée, le cylindre en N tranches de hauteur identique $dz = \frac{L}{N}$, chaque tranche est soumise en haut à un couple $\vec{T}$ et en

bas à un couple $-\vec{\Gamma}$ et elles se tordent donc toutes d'un même angle $d\theta$ donc la somme reconstitue θ donc $d\theta = \frac{\theta}{N} = \frac{dz}{L} \theta$.

Coupons maintenant une telle tranche de hauteur dz en couronnes dont les rayons soient r et $r + dr$, puis ces couronnes en portions d'angle $d\varphi$ dans le sens orthoradial. La figure 5 p. 31 montre une telle couronne et une telle portion, en visualise la forme non tordue en pointillé et la forme tordue de $d\theta$ en traits pleins.

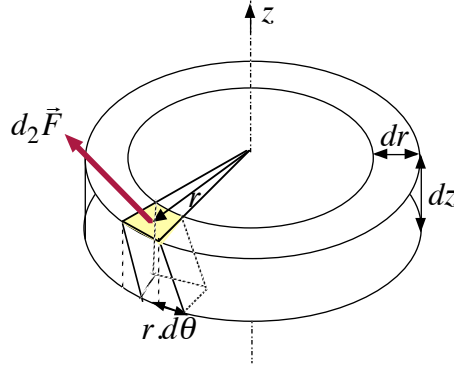


FIGURE 5 – Élément de fil tordu.

Les deux faces, supérieure (en jaune) et inférieure, de cette portion, d'aire $d_2S = r dr d\varphi$ distantes de dz se sont décalées dans le sens orthoradial de $r d\theta$; il s'agit d'une déformation de type glissement, étudié dans le paragraphe précédent, dont l'angle de déformation, confondu avec sa tangente est $\gamma = \frac{r d\theta}{dz} = \frac{r \theta}{L}$. Cette déformation est liée à une force orthoradiale $\vec{d_2F}$ de module d_2F telle que, en adaptant aux notations de ce paragraphe la formule du précédent $\gamma = \frac{1}{G} \frac{d_2F}{d_2S}$ où G est le module de cisaillement. On a donc une force élémentaire orthoradiale :

$$d_2F = G \gamma d_2S = G \frac{r \theta}{L} r dr d\varphi = G \frac{\theta}{L} r^2 dr d\varphi$$

dont le moment par rapport à l'axe est :

$$d_2\Gamma = r d_2F = G \frac{\theta}{L} r^3 dr d\varphi$$

et le moment total s'obtient par intégration double de $\varphi = -\pi$ à $\varphi = \pi$ et de $r = 0$ à $r = R$, d'où :

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L} \theta$$

que l'on note $\Gamma = C \theta$ où la *constante de torsion* C est $C = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{L}$.

Exemple tiré de l'historique cours de physique générale de Georges BRUHAT¹⁶ (traduit en système international d'unités) : soit un arbre de transmission construit dans un acier

16. Voir la note 17 p. 32

pour lequel G est de l'ordre de 10^{11} Pa qui transmet une puissance P de l'ordre $P = 1$ MW à une vitesse angulaire ω de l'ordre de 1000 tours par minute soit de l'ordre de 100 radians par seconde, ce qui correspond à un couple $\Gamma = \frac{P}{\omega}$ de l'ordre de 10^4 N · m. On veut que la torsion ne dépasse pas environ un demi degré par mètre de longueur (de l'ordre de 10^{-2} rad). Tous calculs fait, la valeur limite du rayon est pratiquement égale à 0,5 décimètre (donc un décimètre pour le diamètre).

5.e Ressort hélicoïdal.

Un ressort à boudins ou, ça fait plus sérieux, un ressort hélicoïdal est un fil initialement cylindrique de rayon a , de longueur L , enroulé sur lui-même en N spires de rayon R , superposées en hélices, les spires étant jointives (on a donc $L = 2\pi N R$). Lorsque l'on tire dessus, le pas de l'hélice croît et l'allongement maximum correspond au fil redevenu rectiligne. Pour qui n'y a jamais prêté attention, l'effet principal semble être le passage d'une forme hélicoïdale à une forme rectiligne. Il n'en est rien : ce changement de forme provoque une torsion du fil qui est énergétiquement l'effet essentiel.

Pour qui est observateur, voici deux situations similaires de tous les jours qui le prouvent : enroulez soigneusement, sans le tordre, soit un prolongateur électrique formé de deux fils parallèles isolés, soit un tuyau d'arrosage dont l'extérieur est colorié avec un filet blanc longitudinal sur fond vert, puis tirez sur une extrémité de façon rectiligne jusqu'à ce que le fil ou le tuyau soit rectiligne, observez-le : il est vrillé. Ceci explique que le cordon d'alimentation de votre fer à repasser ressemble actuellement à une pelote de laine ou un modèle tri-dimensionnel de protéine. La figure 6 p. 32 trouvée dans l'historique « Physique générale et expérimentale » de Pierre FLEURY et Jean-Paul MATHIEU¹⁷ montre, avec un fil de section rectangulaire (pour une visualisation plus évidente), que le passage d'une forme circulaire à une forme rectiligne obtenue par traction d'une extrémité parallèlement à l'axe du cercle s'accompagne d'une torsion d'un tour complet.

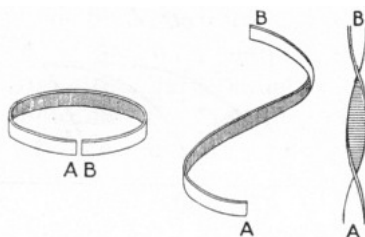


FIGURE 6 – Etirement d'une spire.

Notre ressort a une constante de torsion (R est devenu a et $L = 2\pi N R$) $C = \frac{\pi}{2} G \frac{a^4}{L}$ et, lorsqu'il est tordu d'un angle θ , son énergie potentielle est classiquement $\frac{1}{2} C \theta^2$. Lorsque le ressort est totalement étiré, de la longueur L donc, il s'est tordu de 2π par spire soit

17. Je rends ainsi hommage aux deux collections qui furent longtemps la bible des étudiants francophones.

de $2\pi N = \frac{L}{R}$. En supposant (la démonstration géométrique est ardue) que l'angle de torsion est proportionnel à l'allongement, pour un allongement z , l'angle de torsion est $\theta = \frac{z}{L} \frac{L}{R} = \frac{z}{R}$ et l'énergie $E = \frac{1}{2} C \theta^2 = \frac{1}{2} C \frac{z^2}{R^2}$. Si l'on tire avec une force à peine supérieure à la tension F du ressort pour l'allonger de dz , on fournit le travail $F dz$ qui augmente d'autant l'énergie potentielle ; on a donc $F dz = dE$ d'où :

$$F = \frac{dE}{dz} = C \frac{z}{R^2}$$

et la constante de proportionnalité entre force et allongement, appelée *raideur* du ressort et traditionnellement notée k est :

$$k = \frac{F}{z} = \frac{C}{R^2} = \frac{\pi}{2} G \frac{a^4}{L R^2} = \frac{\pi}{2} G \frac{a^4}{2\pi N R R^2} = \frac{1}{4} G \frac{a^4}{N R^3}$$

5.f Flexion d'une poutre. Flambage d'une poutre.

• La théorie.

Dans ce paragraphe, on étudie une poutre¹⁸ initialement horizontale et qui fléchit faiblement sous l'action de forces verticales ; ce problème est un peu plus délicat mais reste accessible ; il est fondamental en résistance des matériaux.

Le raisonnement s'appuie sur la figure 7 p. 34 où, pour de classiques raisons de lisibilité, les déplacements verticaux ont été considérablement exagérés. On y voit un tronçon de la poutre qui avant déformation avait la longueur dx entre x et $x + dx$; en l'absence de forces horizontales, il est raisonnable de penser qu'il s'est déplacé verticalement et puisque les angles que forme la poutre avec l'horizontale sont très faibles dans la réalité des faits, les cosinus de projection sont égaux à l'unité au second ordre près, ainsi le tronçon est-il toujours entre x et $x + dx$. La poutre et ce tronçon ne sont plus rectilignes et chaque tronçon peut être confondu avec un arc de cercle de centre $C(x)$ et de rayon $R(x)$ (bien plus grand que sur la figure) appelés respectivement centre de courbure et rayon de courbure. Du fait de cette courbure, le tronçon n'a plus uniformément la longueur dx ; par endroits il est un peu plus long, par endroits un peu moins long ; on appelle *fibres neutres*, une courbe qui traverse chaque tronçon là où sa longueur est restée rigoureusement égale à sa valeur initiale dx . On appellera $\zeta(x)$ la cote verticale de cette fibre neutre à l'abscisse x et c'est cette fonction que nous chercherons à expliciter car elle suit les déformations de la poutre. Par convention, $R(x)$ est le rayon de courbure de la fibre neutre.

L'angle $d\theta$ que font les rayons issus de $C(x)$ et aboutissant aux deux extrémités la portion élémentaire de la ligne neutre est $d\theta = \frac{dx}{R(x)}$. A la cote z (pour fixer les idées, on raisonne avec $z > \zeta(x)$), on est à la distance $R'(x) = R(x) - [z - \zeta(x)]$ (on rappelle que les cosinus de projection sont en pratique égaux à l'unité) de $C(x)$ et à ce niveau la longueur

18. Jusqu'au XIXe siècle, on parlait de « flexion des verges » ; il est difficile de nos jours de maintenir cet usage.

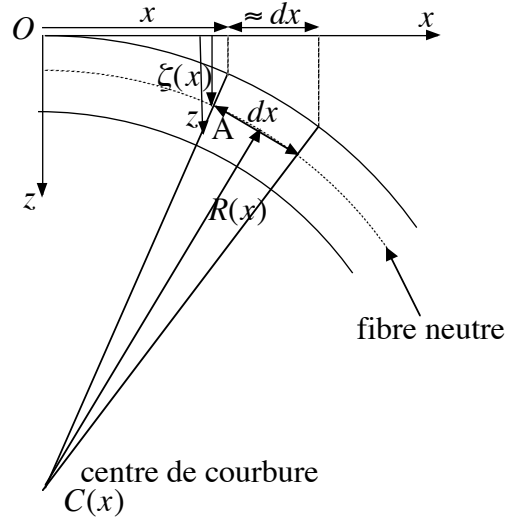


FIGURE 7 – Flexion d'une poutre.

du tronçon est $dx' = R'(x) d\theta$, l'allongement algébrique noté ici $\delta(dx)$ est :

$$\delta(dx) = dx' - dx = [R'(x) - R(x)] d\theta = -[z - \zeta(x)] \frac{dx}{R(x)}$$

Sur les surfaces latérales, il n'y a pas de contraintes par hypothèse, ce qui doit rester vraisemblablement vrai sur chaque « fibre » du tronçon, de surface élémentaire $d_2S = dy dz$ qui ne subit donc de contraintes que sur ses extrémités et se comporte donc comme un fil soumis à une traction normale notée ici d_2F_n . On a donc, en adaptant les notations au contexte :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(dx)}{dx} &= \frac{1}{E} \frac{d_2F_n}{d_2S} \\ \text{d'où} \quad d_2F_n &= -\frac{E [z - \zeta(x)] dy dz}{R(x)} \end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit ici de plier la poutre dans le plan zOx , il est pertinent de calculer la projection sur Oy moment de cette force calculé, par exemple, à l'origine de la fibre neutre du tronçon (point A de la figure) ; seule la composante verticale $[z - \zeta(x)]$ du « bras de levier » sert à ce calcul et le moment élémentaire (on fait attention au signe avec les trois doigts de la main droite par exemple) est

$$d_2\mathcal{M}_y = [z - \zeta(x)] d_2F_x$$

mais attention au piège, on parle implicitement de ce qui se passe sur la face gauche du tronçon et F_n est compté positivement dans le sens de l'extérieur donc vers la gauche, d'où $dF_x = -dF_n$ et

$$d_2 \mathcal{M}_y = \frac{E [z - \zeta(x)]^2 dy dz}{R(x)}$$

Par intégration sur une section $x = Cte$, le *moment fléchissant* est obtenu par intégration :

$$\mathcal{M}_y = \frac{E}{R(x)} \iint [z - \zeta(x)]^2 dy dz$$

La grandeur $I = \iint [z - \zeta(x)]^2 dy dz$, dépendant éventuellement de x si la poutre n'a pas une section constante, ne dépend que de la forme de celle-ci et aussi de la position de la fibre neutre. On l'appelle *moment d'inertie géométrique*. On verra un peu plus loin qu'on a intérêt, à aire égale, à le rendre le plus grand possible d'où l'idée d'écarter la plus grande partie de la masse vers le haut ou le bas, en privilégiant ainsi des formes en i majuscule (figure 8 p. 35).

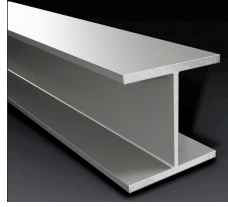


FIGURE 8 – Profilé en I.

Enfin, on utilise la formule classique donnant le rayon de courbure à partir de l'équation $z = \zeta(x)$ de la fibre neutre, en tenant compte que les pentes sont faibles ($\frac{d\zeta}{dx} \ll 1$) :

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{\frac{d^2\zeta}{dx^2}}{(1 + (\frac{d\zeta}{dx})^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

et la forme de la fibre neutre, donc celle de la poutre, est obtenue par résolution de l'équation différentielle :

$$\mathcal{M}_y = \frac{E}{R(x)} \iint [z - \zeta(x)]^2 dy dz = \frac{E I}{R(x)} = E I \frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

Dans la pratique, $\mathcal{M}_y$ se déduit par action et réaction des forces verticales exercées sur la poutre et se comporte donc comme une donnée, attention toutefois, elle dépend

de x (voir les exemples qui suivent). L'équation à résoudre peut s'écrire plus naturellement ainsi :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{EI} \mathcal{M}_y(x)$$

C'est sous cette forme, qu'on prend conscience que I doit être le plus grand possible pour obtenir la déformation la plus petite possible.

Remarque : Une autre formule classique donnant le rayon de courbure d'une courbe plane est $\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$ où α est l'angle que fait la tangente avec une direction fixe prise comme axe Ox et où ds est la longueur élémentaire, ici de la fibre neutre. Le ressort spiral ressortit¹⁹ de ce point de vue. Il s'agit d'une mince lame métallique de longueur l , enroulée en spirale, une de ses extrémités est fixe, l'autre accrochée à la périphérie d'un solide mobile autour d'un axe qui exerce sur lui un couple de moment Γ (en module). En l'absence de toute autre interaction, on a donc, par action et réaction :

$$\Gamma = \frac{EI}{R} = EI \frac{d\alpha}{ds}$$

d'où par intégration est en notant θ l'angle total dont la lame est enroulée :

$$\Gamma = EI \frac{\theta}{L}$$

Il y a proportionnalité entre le couple exercé par le ressort et l'angle dont il est tordu. Pour la conception de montres ou d'horloges, c'est supérieur au balancier qui donne un rappel en $\sin \theta$ qui ne garantit pas l'isochronisme. Par ailleurs le réglage de la constante se fait en modifiant L (l'endroit du point fixe sur la lame est réglable par un petit dispositif visible sur la figure 9 p. 36 extraite d'un ouvrage du XIX^e tombé dans le domaine public).

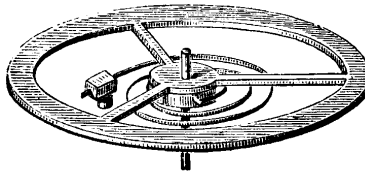


FIGURE 9 – Ressort spiral.

• Poutre encastrée chargée en son extrémité.

La figure 10 p. 37 montre une poutre encastrée horizontalement dans un mur (en gris). L'origine de Ox est prise à la surface du mur. Cet encastrement impose en $x = 0$ non seulement l'immobilité, soit $\zeta(0) = 0$, mais aussi la direction de la tangente à l'origine par

¹⁹. Ne pas confondre les deux verbes ressortir, l'un du second groupe qui se conjugue comme finir, l'autre du troisième qui se conjugue comme sortir.

prolongation de celle, horizontale, dans le mur, soit $\frac{d\zeta}{dx}\Big|_{x=0} = 0$. A son extrémité (point B d'abscisse $x = L$) s'exerce une force verticale $\vec{F} = F \vec{e}_z$. Cette force est supposée grande devant le poids de la poutre et ce dernier pourra donc être négligé.

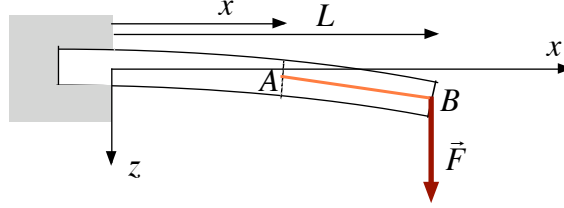


FIGURE 10 – Poutre encastree chargée en son extrémité.

Considérons comme système formé de l'extrémité de la poutre entre les abscisses x et L ; à l'équilibre, la somme des moments, *calculés au même point* est nulle ; celui des forces de contraintes, vient d'être calculé au point A et celui de la force, calculé au même point est :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = (L - x) \vec{e}_x \wedge F \vec{e}_z = -(L - x) F \vec{e}_y$$

Il résulte de tout ceci que l'équation à résoudre est :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{EI} \mathcal{M}_y(x) = \frac{F}{EI} (L - x)$$

d'où, après deux intégrations et en tenant compte de $\zeta(0) = 0$ et $\frac{d\zeta}{dx}\Big|_{x=0} = 0$ et dans l'hypothèse d'une section constante ($I = Cte$)

$$\zeta(x) = \frac{F}{EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

En particulier, la déformation en bout de poutre, appelée *flèche* est

$$\zeta(L) = \frac{FL^3}{3EI}$$

Remarque : pour le même système à l'équilibre, la somme des forces subies est nulle ainsi que leur projection sur Ox ; celle de la force $\vec{F}$ est nulle donc celle des contraintes normales sur la section passant par A . En reprenant un résultat antérieur, on doit donc avoir :

$$0 = \iint d_2 F_n = -\frac{E}{R(x)} \iint [z - \zeta(x)] dy dz$$

d'où $\iint [z - \zeta(x)] dy dz = 0$ ce qui permet en fait de placer la fibre neutre. Par exemple, pour une section rectangulaire, par symétrie, la fibre neutre passe par le milieu du rectangle. Ce sera du reste aussi le cas pour toute section ayant deux axes de symétrie orthogonaux (parallèles à Oz et Oy) comme le profilé en I.

- **Poutre encastrée fléchie sous son propre poids.**

Le même système est soumis cette fois à son propre poids de la forme $m g$ où, en introduisant la masse linéique μ dans le cadre d'une section constante, m est égale à $\mu (L - x)$, ce poids étant appliqué au centre gravité du système donc à $\frac{1}{2} (L - x)$ des deux bouts (voir figure 10 p. 37).

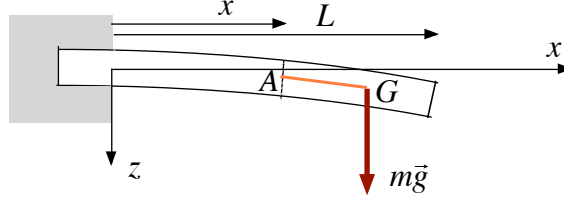


FIGURE 11 – Poutre encastrée fléchie sous son propre poids.

Cette fois l'équation à résoudre est :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{EI} \mathcal{M}_y(x) = \frac{1}{EI} \frac{(L-x)}{2} \mu (L-x) g = \frac{\mu g}{2EI} (L^2 - 2Lx + x^2)$$

d'où avec les mêmes conditions aux limites :

$$\zeta(x) = \frac{\mu g}{2EI} \left(\frac{L^2 x^2}{2} - \frac{L x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$$

et $\zeta(L) = \frac{\mu g L^4}{8EI}$.

Il existe dans la littérature toutes sortes d'autres exemples avec des conditions variées et en faire l'inventaire ne serait plus d'un grand intérêt, l'essentiel ayant été dit.

- **Flambage d'une poutre.**

Toutefois présentons ici un magnifique exemple de *rupture spontanée de symétrie* (voir le chapitre A-VII qui en traite), le flambage d'une poutre. La figure 12 p. 39 montre une poutre OB , initialement rectiligne selon l'axe Ox , de longueur L soumise en son extrémité B à une force $\vec{F} = -F \vec{e}_x$ et pour qu'elle puisse rester immobile, une force $-\vec{F}$ en son extrémité O . La force est suffisamment grande devant le poids de la poutre de sorte qu'on puisse négliger la pesanteur. On constate que si F n'est pas trop grand, la poutre se comprime légèrement (de façon homogène de sorte que chaque tronçon soit soumis sur ses deux faces à des forces opposées) en restant rectiligne et la symétrie est respectée. Par contre, et c'est le cas de la figure, si la force est assez grande, la symétrie est brisée, la poutre se cintre (on dit qu'elle *flambe*) dans un plan noté zOx . Les extrémités O et A se sont légèrement rapprochées lors de la compression symétrique ; elle sont maintenues fixes mais sans encastrement.

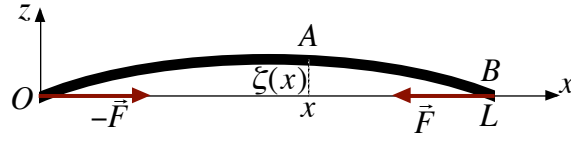


FIGURE 12 – Flambage d’une poutre.

Pour étudier l’équilibre de la portion AB de poutre entre les abscisses x et L , on utilise toujours la même méthode, il suffit de recalculer dans ce nouveau contexte la composante selon Oy du moment calculé en A de la force $\vec{F}$ appliquée en B ; ce moment est :

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = [-\zeta(x) \vec{e}_z + (L - x) \vec{e}_x] \wedge (-F \vec{e}_x) = \zeta(x) F \vec{e}_y$$

et la nullité de la somme de moments projetés sur Oy s’écrit :

$$EI \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + F \zeta = 0$$

On a des solutions sinusoïdales et puisque $\zeta(0) = \zeta(L) = 0$ (voir la situation expérimentale), ce ne peut être que :

$$\zeta = \zeta_m \sin \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} z \right)$$

avec $\sqrt{\frac{F}{EI}} L = \pi$.

Si F est inférieur à $F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, le flambage est impossible ; si F est supérieur à F_c , cela semble aussi impossible mais il faut comprendre qu’alors ζ_m devient suffisamment grand pour les approximations du calcul cessent d’être valable. ζ_m se fixe à la valeur correspondant à l’équilibre mais avec les non-linéarités, c’est impossible à calculer explicitement.

Remarque énergétique : La forme prise sera celle qui minimise l’énergie libre de déformation. Dans l’état rectiligne symétrique, la compression est uniforme (OB est inférieur à la longueur à vide) et les déformations importantes ; dans l’état de flambage en gros ζ_m va prendre la valeur telle que l’arc OB reprenne sa longueur initiale, de sorte que les déformations soient celles, plus faibles, du cintrage. Le flambage de la poutre, dès que la valeur critique de la force est dépassée est donc thermodynamiquement favorisée.

6 Ondes élastiques.

On suppose connu l’essentiel du chapitre D-II qui traite des ondes progressives et stationnaires.

6.a Ondes élastiques longitudinales et transversales dans un milieu continu homogène.

• Généralités.

On a vu plus haut (au paragraphe 3.d p. 13) que la loi locale d'équilibre s'écrit :

$$\vec{f} + \operatorname{div} \vec{\sigma} = \vec{0}$$

où $\vec{f}$ est la densité volumique de forces comme la pesanteur et $\operatorname{div} \vec{\sigma}$ la divergence vectorielle de la matrice des contraintes. Hors d'équilibre, ce bilan volumique des forces est égal au produit de la masse volumique par d'accélération locale de la matière. On notera $\vec{u}(\vec{M}, t)$ le déplacement (ou déformation) à l'instant t de la masse élémentaire qui, au repos était au point M ; les lois de la mécanique se traduisent donc par :

$$\vec{f} + \operatorname{div} \vec{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

moyennant deux approximations, la première est que les déformations sont suffisamment faibles pour que la masse volumique ρ soit quasiment constante, la seconde que les vitesses restent petites devant la vitesse des ondes, de sorte que l'on puisse confondre accélération particulaire et accélération locale (voir les chapitres B-XIII et B-XIV consacrés à la mécanique des fluides).

D'autre part, les lois de l'élasticité s'écrivent (cf supra) :

$$(\sigma) = 2\mu(\varepsilon) + \lambda \operatorname{Tr}(\varepsilon) (Id)$$

où la matrice des déplacements (ε) a ses coefficients liés aux déplacements par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

On retrouve une structure classique d'équations couplés entre deux grandeurs conjuguées (au sens mécanique ici), les contraintes et les déplacements.

On utilise ensuite l'approche classique de recherche d'ondes planes progressives fonction, avec un bon choix des axes, de x et t et qui soient ou bien longitudinales (les vecteurs selon Ox) ou bien transversales polarisées rectilignement (avec un bon choix des axes, les vecteurs selon Oy).

• Ondes longitudinales.

Les déformations sont de la forme $\vec{u} = u(x, t) \vec{e}_x$; le seul coefficient non nul de la matrice des déformations est $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ qui est donc aussi la valeur de la trace de la

matrice, d'où, pour la matrice des déformations :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2\mu \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{xx} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{yy} = \lambda \varepsilon_{xx} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{xx} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Les composantes de $\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma}$ puisque la matrice est diagonales sont, par définition, égales à $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur Ox , $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$ sur Oy et $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0$ et la seule projection de l'équation du mouvement qui donne autre chose que $0 = 0$ (on néglige ici l'effet de la pesanteur) est celle sur Ox soit :

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

résultat de forme classique dont on déduit une vitesse de propagation $c = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$ et une absence de dispersion.

Remarque : On trouve très couramment dans la littérature un modèle simple d'ondes progressives dans la matière, que j'ai enseigné dans le cadre du programme de mes classes et qui aboutit à $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$; or on a vu plus haut (au paragraphe 5.b p. 27) que $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$, d'où $c = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)\rho}}$, ce qui n'est pas le résultat trouvé dans ce chapitre. Le modèle en question n'est pas faux mais comme il se s'appuie pas sur la théorie tensorielle de l'élasticité, les hypothèses de travail ne sont pas assez précises. Ici nous avons implicitement travaillé dans un milieu infini ; le calcul a montré que, dans le cas d'un mouvement purement longitudinal, les contraintes σ_{yy} et σ_{zz} sont non nulles. Dans le modèle en question, et là aussi implicitement, le système est fini dans les directions transversales, disons cylindriques, et il n'y a pas de contraintes latérales en surface et donc pratiquement pas à l'intérieur ; en contrepartie il y a des déformations latérales minimales et grosso modo proportionnelles à la distance r à l'axe. Il va de soi que si les termes négligeables sont proportionnels à r , elles ne peuvent le rester que si le rayon R n'est pas trop grand. Voilà pourquoi les deux modèles ne traitent pas de la même situation et ne donnent pas le même résultat.

• Ondes transversales.

Les déformations sont de la forme $\overrightarrow{u} = u(x, t) \overrightarrow{e}_y$; les seuls coefficients non nuls de la matrice des déformations sont $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}$ et la trace de la matrice est nulle, d'où, pour la matrice des déformations : $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$ et les autres termes nuls. Les composantes de $\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma}$ sont alors $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$ sur Ox , $\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sur Oy et 0 sur Oz et enfin la seule projection de l'équation du mouvement qui donne autre chose que $0 = 0$ (on néglige ici encore l'effet de la pesanteur) est celle sur Oy soit :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

la vitesse de propagation est ici $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ et toujours pas de dispersion.

Remarque 1 : les ondes longitudinales sont plus rapides que les ondes transversales, ce qui est bien connu en sismologie.

Remarque 2 : les coefficients de LAMÉ du sous-sol terrestre sont de quelques dizaines de GPa (1 GPa = 10^9 Pa) et les masses volumiques de quelques milliers de kilogrammes par mètre cube ; les célérités sont donc de quelques kilomètres par seconde. Les mesures expérimentales donnent environ $6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ pour les ondes P (longitudinales avec P comme Premières arrivées) et $4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ pour les ondes S (transversales avec S comme Secondes).

• Gestion des ondes plus complexes.

On peut écrire $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ d'où aussi $Tr(\varepsilon) = \sum_m \frac{\partial u_m}{\partial x_m}$ et

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\sum_m \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \delta_{ij}$$

La composante sur x (les autres par analogie) de $\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma}$ est :

$$\begin{aligned} \text{div } \overrightarrow{\sigma}_x &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \dots \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \\ \dots &= \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right] + \lambda \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right] \\ &\dots = \mu \Delta u_x + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \overrightarrow{u}) \end{aligned}$$

d'où vectoriellement :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overrightarrow{\sigma} = \mu \Delta \overrightarrow{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \overrightarrow{u})$$

En l'absence de forces volumiques comme celles de pesanteur, l'équation du mouvement est donc :

$$\mu \Delta \overrightarrow{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \overrightarrow{u}) = \rho \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2}$$

En particulier, pour un champ de déformations à divergence nulle (comme celui des ondes transversales ci-dessus), celui-ci vérifie alors l'équation différentielle : $\mu \Delta \overrightarrow{u} = \rho \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2}$ qui est une équation de propagation correspondant à une vitesse de propagation $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ qui est bien le résultat obtenu ci-dessus.

En utilisant, à rebrousse-poil, la relation classique d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \overrightarrow{u}) - \Delta \overrightarrow{u}$$

on peut réécrire ainsi l'équation du mouvement :

$$(2\mu + \lambda) \Delta \overrightarrow{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{u}) = \rho \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2}$$

En particulier, pour un champ de déformations à rotationnel nul (comme celui des ondes longitudinales ci-dessus), celui-ci vérifie alors l'équation différentielle, différente de la précédente : $(2\mu + \lambda) \Delta \overrightarrow{u} = \rho \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2}$ qui est une équation de propagation correspondant à une vitesse de propagation $c = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$ qui est bien le résultat obtenu ci-dessus.

Le mathématiciens démontrent que tout champ vectoriel peut être décomposé en somme de deux champs, l'un de rotationnel nul et l'autre de divergence nulle. Ce qui précède montre que le premier se propage comme une onde longitudinale et le second comme une onde transversale.

6.b Ondes surfaciques de Rayleigh dans un milieu continu homogène semi-infini.

Les sismologues, en plus des ondes P et S évoquées ci-dessus observent des ondes cantonnées à la surface terrestre. John W. Strutt, annobli en Lord RAYLEIGH, a proposé un mécanisme à base d'onde élastiques évanescentes. Ce mécanisme est en fait rarement observé ; je le cite néanmoins car c'est un bon exercice, un peu délicat certes, d'utilisation des concepts utilisés dans ce chapitre. On peut sauter ce paragraphe en première lecture. Si celle-ci a été profitable, on pourra s'y plonger lors de la seconde.

Pour une onde de déformations élastiques décrite par un champ $\overrightarrow{u}(M, t)$ à rotationnel nul (respectivement $\overrightarrow{v}(M, t)$ à divergence nulle) vérifiant une équation de propagation avec une célérité $c = c_L = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$ (respectivement $c = c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$) se propageant dans un milieu semi-infini limité par un plan choisi comme plan xOy et situé du côté $z < 0$, on va rechercher des solutions de la forme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}(z) \exp[i(kx - \omega t)]$ (respectivement $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}(z) \exp[i(kx - \omega t)]$).

En reportant dans l'équation de propagation et après simplification par l'exponentielle, on tire :

$$\begin{cases} -k^2 \overrightarrow{f}(z) + \overrightarrow{f}''(z) = -\frac{\omega^2}{c_L^2} \overrightarrow{f}(z) \\ -k^2 \overrightarrow{g}(z) + \overrightarrow{g}''(z) = -\frac{\omega^2}{c_T^2} \overrightarrow{g}(z) \end{cases}$$

Ce qui donne des exponentielles décroissantes (dans le sens $z < 0$) en $\vec{f}(z) = \vec{A} \exp(\kappa_L z)$ soit

$$\vec{u} = \vec{A} \exp(\kappa_L z) \exp[i(kx - \omega t)] \quad \text{avec} \quad \kappa_L^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}$$

et respectivement

$$\vec{v} = \vec{B} \exp(\kappa_T z) \exp[i(kx - \omega t)] \quad \text{avec} \quad \kappa_T^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}$$

ce qui suppose $k^2 > \frac{\omega^2}{c_T^2} > \frac{\omega^2}{c_L^2}$

Supposons maintenant, comme c'est le cas en sismologie, qu'au niveau du plan $z = 0$, le solide élastique ne soit soumis à aucune contrainte. On va rechercher une solution qui soit combinaison linéaire des deux types de solutions précédentes soit :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{A} \exp(\kappa_L z) \exp[i(kx - \omega t)] + \vec{B} \exp(\kappa_T z) \exp[i(kx - \omega t)]$$

où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des constantes vectorielles de composantes A_x , A_y et A_z et analogues pour $\vec{B}$.

Pour que cette addition puisse respecter cette condition aux limites en tout point du plan $z = 0$ et à tout instant t , il faut que les deux termes de l'addition aient même périodicité dans ce plan, donc même k , et dans le temps, donc même ω , ce que nous avons anticipé.

L'absence de contraintes sur le plan $z = 0$ de vecteur normal $\vec{e}_z$ se traduit par :

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$$

Par ailleurs, on a vu plus haut que la loi de l'élasticité s'écrit :

$$(\sigma) = 2\mu(\varepsilon) + \lambda \text{Tr}(\varepsilon)(Id)$$

En particulier, on a, en $z = 0$, $\varepsilon_{zy} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{zy} = 0$, d'où, puisque l'expression de $\vec{w}$ ne fait pas intervenir y :

$$\begin{aligned} 0 = \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial w_y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \dots \\ \dots &= \kappa_L A_y \exp(\kappa_L z)|_{z=0} \exp[i(kx - \omega t)] + \kappa_T B_y \exp(\kappa_T z)|_{z=0} \exp[i(kx - \omega t)] = \dots \\ &= \kappa_L A_y \exp[i(kx - \omega t)] + \kappa_T B_y \exp[i(kx - \omega t)] = \dots \\ &= (\kappa_L A_y + \kappa_T B_y) \exp[i(kx - \omega t)] \end{aligned}$$

d'où $\kappa_L A_y + \kappa_T B_y = 0$ ce qui certes n'oblige pas mais incite fortement à rechercher une solution plane dans le plan zOx , c'est à dire une solution telle que $A_y = B_y = 0$

Avant d'exploiter les autres nullités de contraintes, remarquons que $\vec{u}$ a un rotationnel nul, dont on tire comme seul renseignement que $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}$, d'où, après simplification par les exponentielles $\kappa_L A_x = i k A_z$ et l'on pourra noter :

$$A_x = i k a \quad A_y = 0 \quad A_z = \kappa_L a$$

De même, $\vec{v}$ a une divergence nulle, dont on tire que $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$, d'où, après simplification par les exponentielles $i k B_x + \kappa_T B_z = 0$ et l'on pourra noter :

$$B_x = \kappa_T b \quad B_y = 0 \quad B_z = -i k b$$

Restent à exploiter les deux dernières conditions aux limites. Commençons par la plus simple, $\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{zx} = 0$, d'où $0 = 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}$, soit en développant et après simplification par les exponentielles :

$$\begin{aligned} 0 &= i k (A_z + B_z) + \kappa_L A_x + \kappa_T B_x = \dots \\ \dots &= i k (\kappa_L a - i k b) + \kappa_L (i k a) + \kappa_T (\kappa_T b) = 2 i k \kappa_L a + (k^2 + \kappa_T^2) b \end{aligned}$$

La seconde est, compte tenu que les fonctions ne dépendent pas de y :

$$0 = \sigma_{zz} = (2\mu + \lambda) \varepsilon_{zz} + \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = (2\mu + \lambda) \frac{\partial w_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial w_x}{\partial x}$$

soit en développant et après simplification par les exponentielles :

$$\begin{aligned} 0 &= (2\mu + \lambda) (\kappa_L A_z + \kappa_T B_z) + i k \lambda (A_x + B_x) = \dots \\ \dots &= (2\mu + \lambda) (\kappa_L^2 a - i k \kappa_T b) + i k \lambda (i k a + \kappa_T b) = [(2\mu + \lambda) \kappa_L^2 - \lambda k^2] a - 2 i \mu k \kappa_T b \end{aligned}$$

On peut simplifier cette dernière relation en remarquant que (cf supra) $c_L^2 = \frac{2\mu+\lambda}{\rho}$ et $c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$, d'où aussi $c_L^2 - 2c_T^2 = \frac{\lambda}{\rho}$, d'où, en éliminant ρ , $\lambda = (c_L^2 - 2c_T^2) \frac{2\mu+\lambda}{c_L^2}$ et $\mu = c_T^2 \frac{2\mu+\lambda}{c_L^2}$; en reportant dans la relation précédemment trouvée et après simplification par $\frac{2\mu+\lambda}{c_L^2}$:

$$0 = [c_L^2 \kappa_L^2 - (c_L^2 - 2c_T^2) k^2] a - 2 i c_T^2 k \kappa_T b$$

équation qui forme avec

$$0 = 2 i k \kappa_L a + (k^2 + \kappa_T^2) b$$

un système homogène en a et b qui n'a de solutions que si son déterminant est nul (ce qui donnera classiquement une relation de dispersion) et ultérieurement le rapport $\frac{a}{b}$, d'où, à une constante multiplicative près, les amplitudes A_x , A_z , B_x et B_z (on laisse cela à la charge du lecteur s'il veut poursuivre jusque là).

L'équation de dispersion est donc :

$$[c_L^2 \kappa_L^2 - (c_L^2 - 2 c_T^2) k^2] [k^2 + \kappa_T^2] = 4 c_T^2 k^2 \kappa_T \kappa_L$$

que l'on élève au carré pour y reporter $\kappa_L^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}$ et $\kappa_T^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}$ et pour arriver enfin de façon brute à :

$$[(c_L^2 k^2 - \omega^2) - (c_L^2 - 2 c_T^2) k^2]^2 [2 k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}]^2 = 16 c_T^2 [c_T^2 k^2 - \omega^2] [k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}] k^4$$

d'où après simplification et division par c_T^4 :

$$\left[2 k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}\right]^2 \left[2 k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}\right]^2 = 16 \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}\right] \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}\right] k^4$$

soit enfin

$$\left[2 k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}\right]^4 = 16 \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}\right] \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c_L^2}\right] k^4$$

Qu'on peut après division par ω^{16} mettre sous la forme d'une équation en $X = \frac{k}{\omega}$ (qui n'est autre que l'inverse de la vitesse de phase) et mieux encore de la variable adimensionnée $Y = c_T^2 X^2 = \frac{k^2 c_T^2}{\omega^2}$ (on a montré plus haut que l'onde n'est évanescence que si $k^2 > \frac{\omega^2}{c_T^2}$ soit $Y > 1$). On arrive aisément à :

$$(2 Y - 1)^4 = 16 Y^2 (Y - 1) \left(Y - \frac{c_T^2}{c_L^2}\right)$$

qui est du troisième degré en Y (les termes de degré 4 se simplifient) et qui ne dépend que d'un seul paramètre, lié aux caractéristiques du milieu, à savoir $\frac{c_T^2}{c_L^2} = \frac{\mu}{2\mu + \lambda}$ qui peut prendre (puisque μ et $3\mu + 2\lambda$ sont positifs comme l'a montré l'approche thermodynamique au paragraphe 4.d remarque 26) des valeurs comprises entre 0 et $\frac{3}{4}$ (je concède que c'est un peu elliptique). Il est assez fastidieux de montrer que, quelle que soit la valeur de ce paramètre dans cet intervalle, il n'y a qu'une seule solution en Y qui soit supérieure à 1 et nous l'admettons donc ; il en résulte que la vitesse de phase est une constante et vis-à-vis de ce type d'onde, le milieu est non-dispersif.

Remarque : pourquoi avoir passé tant de temps là-dessus alors que ce type d'onde n'est pas observé ? Parce que c'est typique de la démarche scientifique : on observe un phénomène, on propose une explication, on en fait la théorie et l'on confronte les résultats théoriques aux observations expérimentales. S'il y a concordance, on a trouvé l'explication, sinon, il faut trouver autre chose. Dans notre cas, la structure en couches de l'intérieur de la Terre provoque des réflexions d'onde et invalident le modèle semi-infini (en gros).

6.c Ondes de torsion.

Par rapport au paragraphe qui précède, ce sera une balade de santé.

On a vu plus haut dans l'étude d'un fil de torsion à l'équilibre, qu'il est tordu de façon homogène (nous avons noté $\frac{d\theta}{dz} = \frac{\theta}{L}$ où θ est l'angle total de torsion et L la longueur du fil parallèle à Oz) et qu'au niveau de chaque section on observe un couple exercé par la partie haute sur la partie basse de moment uniforme $\Gamma = C \theta$ qu'on peut réécrire $\Gamma = C L \frac{d\theta}{dz}$.

Hors d'équilibre, la loi reste *localement* (relire la démonstration au paragraphe 5.d p. 30) $\Gamma = C L \frac{\partial \theta}{\partial z}$ (avec toutefois une dérivée partielle car θ dépend alors aussi de t) mais alors Γ et $\frac{d\theta}{dz}$ dépendent de z .

Un tranche d'épaisseur dz entre les cotes z et $z + dz$ est donc soumise à un couple total :

$$d\Gamma = C L \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z+dz} - C L \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_z = C L \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz$$

Son moment d'inertie par rapport à l'axe est proportionnel à dz , on le note $dJ = J_\ell dz$ (pour un fil cylindrique de rayon R et de masse volumique ρ , $dJ = \frac{1}{2} dm R^2 = \frac{\pi}{2} \rho R^4 dz$) et le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe donne successivement :

$$dJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = d\Gamma$$

$$J_\ell dz \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = C L \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz$$

$$J_\ell \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = C L \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

qui prévoit des ondes progressives à la vitesse $c = \sqrt{\frac{CL}{J_\ell}}$ ou des ondes stationnaires qui leur correspondent.

J'avais bien dit que ce serait simple.

6.d Cordes vibrantes avec raideur, vibration des poutres.

• Corde vibrante.

On reprend ici le problème classique d'une corde vibrante mais en tenant compte de contraintes analogues à celle d'une poutre fléchie (voir paragraphe 5.f p. 33). Soit un tronçon de corde initialement entre les abscisses x et $x + dx$ de l'axe Ox , de masse $dm = \rho_\ell dx$ où ρ_ℓ est la masse linéique. Son mouvement le plus général est somme d'un mouvement parallèle à Ox qui relève des ondes longitudinales dans la matière, étudiées ci-dessus, et d'ondes transversales que nous étudions seules ici. L'extrémité d'abscisse x se déplace selon Oz de $\zeta(x, t)$ et celle d'abscisse $x + dx$ de $\zeta(x + dx, t) = \zeta(x, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx$ au premier ordre de

sorte que ce tronçon fait avec Ox un angle, confondu au premier ordre avec sa tangente, $\alpha(x, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

Je ne crois pas utile de tracer une figure. Disons que je fais grève. Le lecteur n'aura aucun mal à l'imaginer ou à la tracer sur un bout de papier.

Le tronçon est soumis à son poids, négligeable en pratique devant les forces de tension, une force $\vec{F}(x + dx)$ exercée sur l'extrémité en $x + dx$ par la partie du fil qui lui est à droite et une force $-\vec{F}(x)$ exercée sur l'extrémité en x par la partie du fil qui lui est à gauche. Contrairement au modèle simpliste de la corde *sans raideur* traditionnellement utilisée, ces forces ne sont pas forcément tangentes à la corde et on les décomposera en une composante F_x selon Ox et F_z selon Oz . Le théorème du centre de gravité donne vectoriellement :

$$dm \frac{d^2 \vec{G}}{dt^2} = \vec{F}(x + dx) - \vec{F}(x) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx$$

soit après simplification par dx et projection sur les axes (on rappelle que le mouvement est selon Oz) :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F_x}{\partial x} \\ \rho \ell \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \end{cases}$$

On en déduit déjà que F_x est indépendant du temps et en pratique indépendant du temps t , sauf à modifier le réglage de la tension pour un effet de vibrato ou de glissando. On notera T cette valeur constante, appelée *tension* de la corde.

Mais comme pour la flexion des poutres, les contraintes sur les extrémités ne sont pas uniformément réparties et on a vu que cela génère sur chaque section un correctif qui est un couple de moment exercé par la droite sur la gauche $\mathcal{M}_y = E I \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$. Le bilan instantané sur les deux extrémités est donc :

$$d\mathcal{M}_y = \mathcal{M}_y(x + dx, t) - \mathcal{M}_y(x, t) = \frac{\partial \mathcal{M}_y}{\partial x} dx = E I \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} dx$$

Il faut y ajouter le moment que nous allons calculer au centre de gravité G les forces exercées aux deux extrémités M et M' . On a $\overrightarrow{MM'} = dx \vec{e}_x + d\zeta \vec{e}_z = dx \left[\vec{e}_x + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \vec{e}_z \right]$ et $\overrightarrow{GM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MM'}$ ainsi que $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{MM'}$. La force en M est $-\vec{F}(x) = -T \vec{e}_x - F_z(x, t) \vec{e}_z$ et celle en M' est $\vec{F}(x + dx) = T \vec{e}_x + F_z(x + dx, t) \vec{e}_z = T \vec{e}_x + (F_z(x, t) + \frac{\partial F_z}{\partial x} dx) \vec{e}_z$

Ce moment total supplémentaire est après quelques calculs de routine et en négligeant l'ordre 2 :

$$d\mathcal{M}'_y = \left[\overrightarrow{GM'} \wedge \vec{F}(x + dx) + \overrightarrow{GM} \wedge (-\vec{F}(x)) \right] \cdot \vec{e}_y = \dots = F_z dx - T \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx$$

La somme de ces moments est égale, d'après le théorème du moment cinétique appliqué en G , à $J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ où le moment d'inertie du tronçon de longueur dx est de la forme $Cte dm dx^2$

comme tout moment d'inertie ; il est donc d'ordre 3 en dx et ce terme peut être négligé. On a donc après simplification par dx :

$$F_z - T \frac{\partial \zeta}{\partial x} + E I \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0$$

On élimine F_z en dérivant par rapport à l'abscisse x et en injectant $\frac{\partial F_z}{\partial x} = \rho_\ell \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$, d'où :

$$\rho_\ell \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - E I \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}$$

au lieu du classique $\rho_\ell \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ de la corde sans raideur. Voyons maintenant l'influence de ce terme tout à fait original avec sa dérivée quatrième.

Une onde progressive en $\exp[i(\omega t - kx)]$ est possible si ω et k sont liés par :

$$\rho_\ell \omega^2 = T k^2 + E I k^4$$

Dans le cas d'une corde fixe à ses deux extrémités distantes de L , on observe des ondes stationnaires somme d'ondes progressives en sens inverse et la longueur L impose classiquement que k soit multiple de $\frac{\pi}{L}$; les pulsations propres sont donc telles que :

$$\rho_\ell \omega_n^2 = T k_n^2 + E I k_n^4 = T \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + E I \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4$$

En notant formellement $\omega_0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho_\ell}}$ et $a = \frac{\pi^2 E I}{L^2 T}$, on a :

$$\omega_n = n \omega_0 \sqrt{1 + a n^2}$$

Les pulsations propres ne sont plus rigoureusement les multiples entiers de la plus basse ; on dit que cette corde n'est plus *harmonique*. Le phénomène est d'autant plus marqué que I est plus grand ; les accordeurs de piano le savent bien quand ils s'occupent des notes graves (sur les cordes les plus grosses).

• Adaptation aux vibrations transversales des poutres.

Si l'on étudie maintenant les vibrations transversales d'une poutre, non soumise à une traction ($T = 0$) et en négligeant l'effet de la pesanteur, l'étude précédente convient et l'on doit résoudre l'équation suivante :

$$\rho_\ell \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -E I \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}$$

Si l'on recherche classiquement des solutions factorisées en $\zeta(x, t) = f(x) g(t)$, en reportant dans l'équation puis en divisant par ζ , on tire, en notant $f^{(4)}$ la dérivée quatrième de f :

$$\rho_\ell \frac{g''(t)}{g(t)} = -E I \frac{f^{(4)}(x)}{f(x)}$$

Les deux membres sont donc constants et égaux ; en excluant les solutions exponentielles pour g parce qu'elles sont soit explosives soit évanescences, on a des solutions sinusoïdales en $\sin(\omega t + \varphi)$ où ω est (provisoirement) arbitraire ; on doit donc avoir, en notant $k^4 = \frac{\rho_\ell \omega^2}{E I}$:

$$f^{(4)}(x) = \frac{\rho_\ell \omega^2}{E I} f(x) = k^4 f(x)$$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel construit sur les exponentielles $\exp(kx)$, $\exp(-kx)$, $\exp(ikx)$ et $\exp(-ikx)$, base à laquelle on préférera $\text{ch}(kx)$, $\text{sh}(kx)$, $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$.

La suite dépend des conditions aux limites. Prenons l'exemple d'une poutre encastree en son extrémité $x = 0$, d'où (voir en fin du paragraphe 5.f commençant p. 33) à tout instant ζ et $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ y sont nuls soit $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ et libre en son extrémité $x = L$, d'où à tout instant en $x = L$ $\mathcal{M}_y = E I \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ s'annule et aussi F_z avec, puisqu'on a vu dans le paragraphe précédent que $F_z - T \frac{\partial \zeta}{\partial x} + E I \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0$ et qu'ici $T = 0$, $F_z = E I \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}$, soit finalement $f''(L) = 0$ et $f^{(3)}(L) = 0$.

Posons $f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + C \text{ch}(kx) + D \text{sh}(kx)$. Les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ conduisent aisément à $A + C = 0$ et $B + D = 0$; on réécrit donc :

$$f(x) = A [\cos(kx) - \text{ch}(kx)] + B [\sin(kx) - \text{sh}(kx)]$$

En posant $kL = \varphi$, les conditions $f''(L) = 0$ et $f^{(3)}(L) = 0$, après simplification respectivement par k^2 et k^3 et changement de signe donnent :

$$\begin{cases} A [\cos(\varphi) + \text{ch}(\varphi)] + B [\sin(\varphi) + \text{sh}(\varphi)] = 0 \\ A [-\sin(\varphi) + \text{sh}(\varphi)] + B [\cos(\varphi) + \text{ch}(\varphi)] = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène en A et B doit avoir un déterminant nul soit de façon brute puis mise en forme, avec $\cos^2 + \sin^2 = \text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$:

$$[\cos(\varphi) + \text{ch}(\varphi)]^2 - [\sin(\varphi) + \text{sh}(\varphi)] [-\sin(\varphi) + \text{sh}(\varphi)] = 0$$

$$\cos^2(\varphi) + 2 \cos(\varphi) \text{ch}(\varphi) + \text{ch}^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) - \text{sh}^2(\varphi) = 0$$

$$2 + 2 \cos(\varphi) \text{ch}(\varphi) = 0$$

$$\text{ch}(\varphi) = -\frac{1}{\cos(\varphi)}$$

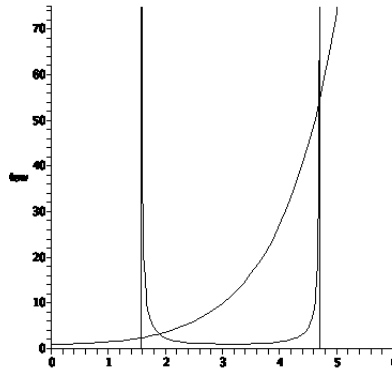


FIGURE 13 – Résolution graphique.

que l'on peut résoudre graphiquement puis numériquement par des méthodes algorithmiques assistées par ordinateur.

La figure 13 p. 51 montre le principe de la résolution graphique, à savoir les tracés superposés des graphes de $\text{ch}(\varphi)$ et $-\frac{1}{\cos(\varphi)}$, limité ici aux deux premières solutions (deux premiers modes) et l'on y constate que seul le premier diffère sensiblement de la valeur correspondante d'un mode « quart d'onde » où la valeur attendue est $\frac{\pi}{2}$. Un « solveur » donne pour ce premier mode $\varphi = 1,875$ (à comparer à $\frac{\pi}{2} = 1,571$) et pour le second $\varphi = 4,694$ (à comparer à $\frac{3\pi}{2} = 4,712$).

Remarque 1 : Le diapason relève, en gros, de cette étude.

Remarque 2 : pour une extrémité posée ponctuellement sur un support bloquant les mouvement verticaux mais pas les rotations, exerçant donc une force verticale mais pas de couple, ce sont f et f'' qui s'annulent. Le lecteur pourra ainsi se poser à lui-même des exercices variés, poutre posée sur deux supports, poutre encastree à une extrémité et posée sur un support plus loin...