

Chapitre B-XI

Chocs entre points, classiques et relativistes, et entre solides.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Ce chapitre transversal traite de tous les aspects des chocs : chocs entre points matériels (mécanique du point), chocs sur un solide (mécanique des solides) et chocs entre particules relativistes (mécanique relativiste).

Pour les chocs entre points matériels, après avoir montré que l'on ne peut pas prédire les vitesses après le choc, on verra que l'on peut traiter le problème beaucoup plus simplement dans le référentiel barycentrique. On définira un coefficient de restitution pour la vitesse relative et l'on montrera son lien avec la conservation de l'énergie et l'on définira les cas extrêmes ce que sont les chocs mous et les chocs élastiques. Enfin, l'on utilisera une méthode graphique qui visualise les résultats bien mieux que les calculs.

Dans le cas d'un choc sur un solide, l'on justifiera que le support joue un rôle a priori important. On montrera qu'il faut frapper au bon endroit un solide pour ne pas abîmer son axe de rotation quand il en a un. On étudiera d'autres exemples sur des cas concrets : billard, tennis. Il importe d'avoir relu les chapitres de mécanique des solides avant d'aborder cette partie.

Dans le cas de chocs relativistes, on montrera en prolégomènes que l'on ne peut les gérer correctement que dans des cas très précis et l'on adaptera alors la notion de référentiel barycentrique. On montrera que les chocs élastiques se gèrent sans changement conceptuel par rapport à la mécanique classique. Par contre, les chocs où disparaissent ou apparaissent des particules font apparaître des notions nouvelles : énergie de seuil, optimisation d'un choc qui crée des particules, distinction entre les chocs qui créent deux particules ou trois dont une indétectable, etc. On montrera les éventuelles complications qui apparaissent quand des photons entrent en jeu. Il importe d'avoir relu les chapitres de mécanique relativiste avant d'aborder cette partie.

Table des matières

B-XI Chocs entre points, classiques et relativistes, et entre solides.	1
1 Chocs classiques entre points matériels.	4
1.a La problématique.	4
1.b Choc dans le référentiel barycentrique.	5
1.c Remarque énergétique.	7
1.d Chocs de plein fouet.	9
1.e Méthode graphique.	11
2 Chocs classiques entre solides.	13
2.a Généralités.	13
2.b Réaction d'axe.	15
2.c Frappe d'une bille au billard.	18
2.d Rebond d'une balle de tennis.	20
3 Chocs relativistes entre points matériels.	25
3.a Rappels et conséquences.	25
3.b Référentiel barycentrique.	28
3.c Chocs dits élastiques.	30
3.d Chocs dits inélastiques	33

1 Chocs classiques entre points matériels.

1.a La problématique.

On apprend en mécanique du solide que la quantité de mouvement d'un solide de masse m et de centre d'inertie G est égale à $\vec{p} = m \vec{v}_G$ et que la somme $\vec{F}$ des forces auxquelles il est soumis est telle que $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; tant que l'on se cantonne aux quantités de mouvement, on peut donc assimiler un solide et son centre d'inertie G , considéré comme un point matériel de masse m ; c'est pourquoi l'étude de chocs entre points matériels est pertinente. Par contre, ce ne sera plus vrai pour l'énergie cinétique, outre le terme $\frac{1}{2} m \vec{v}_G^2$, il faut y ajouter une énergie de rotation, voire pour un « vrai » solide et non un solide idéal des énergies de vibration.

Dans toute cette partie nous parlerons de points matériels, mais en gardant à l'esprit qu'il s'agit de centres de gravité de solides ce qui sera rappelé explicitement au cours de diverses remarques. On ne s'étonnera donc pas de voir tantôt le mot « point », tantôt le mot « solide ».

Imaginons deux points matériels de masses m_1 et m_2 qui se heurtent ; juste avant le choc, leurs vitesses, connues, sont notées $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ et juste après, $\vec{v}''_1$ et $\vec{v}''_2$, inconnues. La question est : que peut-on savoir sur ces dernières vitesses ?

Un choc, par nature, est très bref mais sa durée est néanmoins non nulle ; disons que le choc dure de $t = 0$ à $t = \varepsilon$. Les lois de la dynamique appliquées aux deux points soumis aux forces totales $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ s'expriment ainsi :

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1(t) \quad \text{et} \quad m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_2(t)$$

d'où par intégration entre $t = 0$ et $t = \varepsilon$:

$$m_1 \vec{v}''_1 - m_1 \vec{v}'_1 = m_1 \vec{v}_1(\varepsilon) - m_1 \vec{v}_1(0) = \int_0^\varepsilon m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} dt = \int_0^\varepsilon \vec{F}_1(t) dt$$

et de même :

$$m_2 \vec{v}''_2 - m_2 \vec{v}'_2 = \int_0^\varepsilon \vec{F}_2(t) dt$$

Comme les vitesses avant et après un choc sont notablement différentes, les intégrales $\int_0^\varepsilon \vec{F}_1(t) dt$ et $\int_0^\varepsilon \vec{F}_2(t) dt$ sont importantes bien que la durée d'intégration soit très faible, cela suppose que les forces totales $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ soient formidablement grandes et donc que l'une au moins des forces qui constituent la somme soit formidablement grande. Il est évident que la force de contact qui s'exerce entre ces deux points a cette propriété ; quand une voiture s'écrase sur un platane, l'interaction voiture-platane est paroxystique. Ce n'est pas forcément la seule : quand le point est le centre de gravité d'un solide, les forces exercées sur le solide par son support peuvent aussi être violentes ; rappelez-vous

donc votre poignet ou votre coude quand la raquette de tennis reçoit un service à 150 km/h ! Nous étudierons cela un peu plus loin dans les chocs entre solides.

Pour l'instant, plaçons-nous dans le cas où seule la force d'interaction entre les deux points est violente et où l'on peut donc négliger toutes les autres (par exemple dans le cas du choc entre deux solides en vol). Notons $\vec{F}$ la force exercée par le point 1 sur le point 2 et donc, par action et réaction $-\vec{F}$ la force exercée par le point 2 sur le point 1. Les relations précédentes deviennent, dans ce cas :

$$\vec{p}''_1 - \vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}''_1 - m_1 \vec{v}'_1 = - \int_0^\varepsilon \vec{F}(t) dt \quad \text{et} \quad \vec{p}''_2 - \vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}''_2 - m_2 \vec{v}'_2 = \int_0^\varepsilon \vec{F}(t) dt$$

On appelle *impulsion* ou encore *percussion*¹ l'intégrale $\vec{I} = \int_0^\varepsilon \vec{F}(t) dt$ et l'on a donc :

$$\vec{p}''_1 = \vec{p}'_1 - \vec{I} \quad \text{et} \quad \vec{p}''_2 = \vec{p}'_2 + \vec{I}$$

qui est une formulation d'échange : les points 1 et 2 se sont échangé l'impulsion $\vec{I}$; on peut aussi en déduire une conservation de quantité de mouvement totale par addition des deux résultats :

$$\vec{p}''_1 + \vec{p}''_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

On retrouve une propriété du système isolé de deux points matériels ; pourtant, ici, le système n'est pas isolé mais cela revient au même car, hormis les forces d'interaction, toutes les autres sont négligeables.

Au vu de ce qui précède, les vitesses finales sont connues dès que la percussion est connue ; malheureusement cela est quasiment impossible et il est vain de se lancer dans une étude théorique, sauf cas extrêmement particuliers, car l'expérience conduit à des résultats parfaitement non reproductibles avec une énorme dispersion des résultats. Il n'empêche que l'on peut dire des choses intéressantes dans deux cas particuliers et formuler les choses de façon plus parlante dans les autres.

1.b Choc dans le référentiel barycentrique.

Le passage par le référentiel barycentrique simplifie considérablement l'étude. Rappelons que le barycentre ou² centre d'inertie G des points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 est défini par :

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2}$$

1. Les puristes réservent le terme *percussion* à l'idéalisation d'un choc par l'action d'une force infinie pendant un temps nul, la variation de quantité de mouvement devenant alors une discontinuité égale à l'impulsion. Cette distinction ne me semble pas essentielle.

2. Rappel : ces deux notions se confondent que parce que les masses inertielles et les masses gravitationnelles (ou graves) s'identifient.

d'où par dérivation par rapport au temps :

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

En particulier juste avant et juste après le choc, les vitesses du centre de gravité sont :

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}''_G = \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}''_2}{m_1 + m_2}$$

On en déduit aisément la formule connue :

$$\vec{p}'_{\text{tot.}} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_G$$

et de même

$$\vec{p}''_{\text{tot.}} = (m_1 + m_2) \vec{v}''_G$$

La conservation de la quantité de mouvement totale, évoquée plus haut, entraîne donc clairement que $\vec{v}_G = \vec{v}''_G$, c'est-à-dire que la vitesse du centre de gravité se conserve dans le choc (on notera donc $\vec{v}_G$ la valeur commune).

Effectuons maintenant le changement de référentiel menant de celui de laboratoire au barycentrique, les vitesses relatives seront affectées d'un astérisque³. On notera donc :

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_G + \vec{v}'^*_1 \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_G + \vec{v}'^*_2 \quad \vec{v}''_1 = \vec{v}_G + \vec{v}''^*_1 \quad \vec{v}''_2 = \vec{v}_G + \vec{v}''^*_2$$

d'où :

$$\vec{v}'^*_1 = \vec{v}'_1 - \vec{v}_G = \vec{v}'_1 - \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}'^*_1 = \frac{(m_1 + m_2) \vec{v}'_1 - (m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}'^*_1 = \frac{m_2 (\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2)}{m_1 + m_2}$$

et de même en permutant les indices :

$$\vec{v}'^*_2 = \frac{m_1 (\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1)}{m_1 + m_2}$$

3. On dit un astérisque et un obélisque, non parce que Astérix et Obélix, les héros de Goscinny et Uderzo, sont des hommes, mais parce que c'est comme ça.

Appelons vitesse relative⁴, juste avant le choc, celle du point 2 par rapport au point 1, soit $\vec{v}'_r = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1$. On peut alors noter :

$$\vec{v}'_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}'_r \quad \vec{v}'_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}'_r$$

Le résultat est plus intéressant encore quand on passe aux quantités de mouvement ; on pourra faire apparaître la *masse réduite* soit $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. En effet :

$$\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1^* = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}'_r = -\mu \vec{v}'_r$$

$$\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}'_r = \mu \vec{v}'_r$$

permet de constater que dans le référentiel barycentrique $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{0}$, c'est-à-dire que la quantité de mouvement totale est nulle. On eût pu du reste démontrer autrement ce résultat avec moins de calculs : la définition du barycentre ne dépend pas du référentiel, on a donc aussi

$$\begin{aligned} \vec{v}_G^* &= \frac{m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^*}{m_1 + m_2} \\ m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* &= (m_1 + m_2) \vec{v}_G^* \end{aligned}$$

Or une demi-seconde de réflexion au plus permet d'affirmer que $\vec{v}_G^* = \vec{0}$ car G est fixe dans son référentiel !

De la même façon, juste après le choc et en notant $\vec{v}''_r = \vec{v}''_2 - \vec{v}''_1$, on a :

$$\vec{v}''_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}''_r \quad \vec{v}''_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}''_r$$

$$\vec{p}''_1 = -\mu \vec{v}''_r \quad \vec{p}''_2 = \mu \vec{v}''_r$$

La conclusion est que, plutôt que de gérer le choc au travers de l'impulsion $\vec{I}$, on peut le gérer au travers de $\vec{v}''_r$ dont la donnée permettra le calcul des vitesses juste après le choc.

1.c Remarque énergétique.

En physique, il est toujours éclairant d'introduire une approche énergétique. Calculons donc l'énergie cinétique totale juste avant le choc, en introduisant les vitesses dans le référentiel barycentrique.

$$E' = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}'_2^2$$

4. Attention à ne pas prendre ici « relatif » comme synonyme de « dans le référentiel barycentrique ».

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{2} m_1 \left(\vec{v}_G + \vec{v}_1^* \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\vec{v}_G + \vec{v}_2^* \right)^2 \\
E' &= \frac{1}{2} m_1 \left(\vec{v}_G^2 + 2 \vec{v}_G \cdot \vec{v}_1^* + \vec{v}_1^{*2} \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\vec{v}_G^2 + 2 \vec{v}_G \cdot \vec{v}_2^* + \vec{v}_2^{*2} \right) \\
E' &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_G^2 + \vec{v}_G \cdot \left(m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* \right) + \left(\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{*2} \right)
\end{aligned}$$

Dans le premier terme, $m_1 + m_2$ est la masse totale m_T .

Dans le second, on retrouve $m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = (m_1 + m_2) \vec{v}_G^* = \vec{0}$ Enfin le dernier terme n'est autre que l'énergie cinétique totale, calculée dans le référentiel barycentrique, notée E'^* . Résumons :

$$E' = \frac{1}{2} m_T \vec{v}_G^2 + E'^*$$

On retrouve ici la formule de KÖNIG de la mécanique du solide (voir chapitre B-VIII).

Poursuivons par le calcul de E'^* en reportant les expressions de $\vec{v}_1^*$ et $\vec{v}_2^*$ en fonction de la vitesse relative des deux points (cf supra)

$$\begin{aligned}
E'^* &= \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{*2} \\
E'^* &= \frac{1}{2} m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_r \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_r \right)^2 \\
E'^* &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{v}_r^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \vec{v}_r^2 \\
E'^* &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_r^2 = \frac{1}{2} \mu \vec{v}_r^2
\end{aligned}$$

On retrouve ici des calculs analogues à ceux menés dans le cadre de la réduction du problème à deux corps (voir chapitre B-IV). Résumons en affirmant en outre, par analogie, l'expression de l'énergie cinétique totale juste après le choc, sans oublier que la vitesse du centre de gravité ne varie pas :

$$E' = \frac{1}{2} m_{\text{tot.}} \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}_r'^2 \quad E'' = \frac{1}{2} m_{\text{tot.}} \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}_r''^2$$

Il est d'usage d'introduire un *coefficient de restitution* noté e défini par $\|\vec{v}_r''\| = e \|\vec{v}_r'\|$. Ce coefficient est par essence positif et, puisque l'énergie ne peut a priori⁵ que diminuer,

5. Ce n'est pas si évident lorsque les points sont en fait les centres de gravité de solides car nous ne parlons ici que de l'énergie de translation ; rien n'empêcherait a priori que le choc convertisse une partie de l'énergie de rotation en énergie de translation. En fait les lois de COULOMB mises en jeu si les deux solides glissent l'un sur l'autre au niveau du point de contact, ce qui est le cas le plus fréquent, entraînent que les frottements vont dissiper l'énergie, ce qui rend improbable cette conversion.

il est inférieur à l'unité. La perte énergétique est alors ⁶

$$E' - E'' = \frac{1}{2} \mu (1 - e^2) \vec{v}'_r{}^2$$

On remarque que la perte énergétique est maximale quand $e = 0$; alors $\|\vec{v}''_r\| = 0$ donc $\vec{v}''_r = \vec{0}$, ce qui veut dire que les points restent collés l'un à l'autre après le choc. On dit qu'il s'agit d'un *choc mou* ; c'est par exemple le cas du choc entre un chewing-gum et une boule de pâte à modeler. La vitesse commune des deux points après le choc est, bien évidemment, la vitesse du centre de gravité.

Remarque : en prenant ce cas à l'envers (en remontant le temps), on étudie un corps qui explose en vol et en deux morceaux ⁷ ; la diminution d'énergie devient une augmentation, c'est l'énergie qu'a fournie le dispositif explosif.

Au contraire la perte énergétique est nulle lorsque $e = 1$. On dit qu'il s'agit d'un *choc élastique*. Dans le cas général ($0 < e < 1$), on dit qu'il s'agit d'un *choc inélastique*.

1.d Chocs de plein fouet.

Il s'agit du cas où les deux vitesses juste avant le choc et les deux juste après sont toutes colinéaires. Lorsque les points sont en fait les centres de gravité de solides, il peut s'agir de deux sphères dont les vitesses juste avant le choc sont dirigées selon la droite qui joint leurs centres, la symétrie de révolution assurant alors qu'il en est de même pour les vitesses juste après.

Appelons $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la direction commune. Les données sont les masses et les vitesses juste avant le choc, soit :

$$\vec{v}'_1 = v'_1 \vec{u} \quad \vec{v}'_2 = v'_2 \vec{u}$$

On en déduit, en utilisant ce qui précède, la vitesse du centre de gravité qui ne change pas et la vitesse relative juste avant le choc :

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 v'_1 + m_2 v'_2}{m_1 + m_2} \vec{u} \quad \vec{v}'_r = (v'_2 - v'_1) \vec{u}$$

En introduisant le coefficient de restitution et remarquant que la vitesse relative change de sens car, avant le choc, les points se rapprochent et, après, ils s'éloignent, on a donc, puisque tout est colinéaire :

$$\vec{v}''_r = -e \vec{v}'_r = e (v'_1 - v'_2) \vec{u}$$

6. On remarque au passage que la perte d'énergie est la même dans le référentiel barycentrique et dans le référentiel du laboratoire.

7. pour le plaisir du zeugma !

On en déduit, en utilisant ce qui précède, les vitesses juste après le choc dans le référentiel barycentrique :

$$\vec{v}_1'' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_r = \frac{e m_2 (v_2' - v_1')}{m_1 + m_2} \vec{u} \quad \vec{v}_2'' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_r = \frac{e m_1 (v_1' - v_2')}{m_1 + m_2} \vec{u}$$

Il suffit d'y ajouter la vitesse du centre de gravité $\vec{v}_G = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} \vec{u}$ pour obtenir les vitesses juste après le choc dans le référentiel du laboratoire :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1'' &= \vec{v}_G + \vec{v}_1'' = \frac{(m_1 - e m_2) v_1' + m_2 (1 + e) v_2'}{m_1 + m_2} \vec{u} \\ \vec{v}_2'' &= \vec{v}_G + \vec{v}_2'' = \frac{m_1 (1 + e) v_1' + (m_2 - e m_1) v_2'}{m_1 + m_2} \vec{u} \end{aligned}$$

Premier cas particulier : le choc élastique ($e = 1$) de plein fouet entre deux masses identiques ($m_1 = m_2$), on arrive alors à :

$$\vec{v}_1'' = v_1' \vec{u} = \vec{v}_2' \quad \vec{v}_2'' = v_2' \vec{u} = \vec{v}_1'$$

c'est-à-dire que les points échangent leurs vitesses, c'est particulièrement spectaculaire quand $\vec{v}_2'$ est nulle, car alors le point 1 s'arrête et le point 2 part à sa place ; c'est « faire un carreau » à la pétanque⁸.

Second cas particulier : le choc mou ($e = 0$) de plein fouet sur une cible au repos ($v_2' = 0$), on arrive alors à :

$$\vec{v}_1'' = \vec{v}_2'' = \frac{m_1 v_1'}{m_1 + m_2} \vec{u}$$

Ici, c'est la remarque énergétique qui est la plus intéressante ; la perte d'énergie est, toujours avec $e = 0$ et $v_2' = 0$, d'où $v_r' = v_2'$ et en appliquant la formule établie plus haut :

$$E' - E'' = \frac{1}{2} \mu (1 - e^2) v_r'^2 = \frac{1}{2} \mu v_1'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1'^2$$

alors que l'énergie initiale se résume à celle du point 1, soit :

$$E' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2$$

La perte relative d'énergie est donc :

$$\frac{E' - E''}{E'} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

8. on tire, on ne pointe pas !

Application au choix d'un marteau :

Pour planter un clou, après le choc, l'ensemble clou-marteau résultant du choc mou doit pénétrer le plus loin possible dans le bois et donc s'opposer à une force de résistance à la pénétration (approximativement constante) et ce sur une longueur la plus grande possible, c'est-à-dire fournir le travail le plus grand possible donc avoir une énergie cinétique initiale la plus grande possible et une énergie perdue la plus petite possible. Au vu de la formule précédente il faut donc avoir m_1 grand devant m_2 donc prendre un marteau assez lourd.

Pour casser un caillou, non que l'on soit bagnard, mais parce que l'on est géologue, c'est l'énergie cinétique perdue dans le choc qui sert à rompre les liaisons chimiques assurant la cohésion du caillou, il faut donc alors l'énergie perdue la plus grande possible, soit, au vu de la formule précédente, m_1 petit devant m_2 ; on prend donc un marteau assez léger. Toutefois pour avoir une énergie initiale à perdre élevée, on compensera la petite masse par une grande vitesse ; pour cela un long manche, à coup de poignet égal, fera l'affaire.

Grâce à ce cours, désormais, vous ne choisirez plus vos marteaux au hasard.

1.e Méthode graphique.

Revenons au cas le plus général ; commençons par dessiner (en vert) deux vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$, respectivement égaux à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, vitesses juste avant le choc (voir figure 1 p.11).

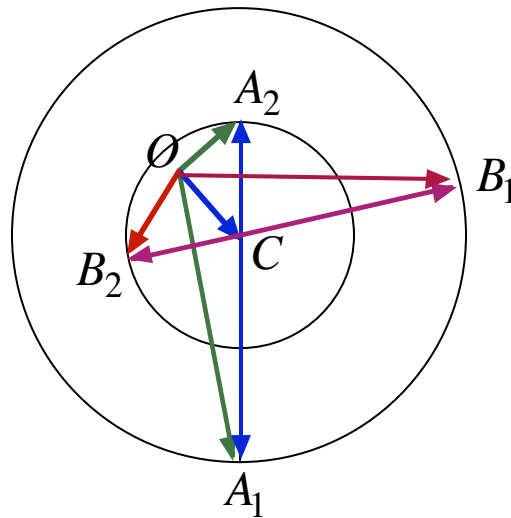


FIGURE 1 – méthode graphique.

Dessignons maintenant (en bleu) un vecteur $\overrightarrow{OC}$, égal à $\vec{v}_G$. On a :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{v}_G = \frac{m_1 \overrightarrow{v}_1 + m_2 \overrightarrow{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2}}{m_1 + m_2}$$

ce qui montre que sur la figure, C est barycentre des points A_1 et A_2 affectés des coefficients m_1 et m_2 . La figure a été tracée avec $m_2 = 2m_1$.

On a donc aussi (en bleu aussi) :

$$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_G = \overrightarrow{v}_1^*$$

c'est-à-dire la vitesse de m_1 dans le référentiel barycentrique, juste avant le choc ; bien sûr, on a de même $\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{v}_2^*$.

Dans le cas d'un choc élastique ($e = 1$), on a avec les notations précédentes $\|\overrightarrow{v}_r''\| = \|\overrightarrow{v}_r'\|$ et l'on en déduit aisément de ce qui précède que $\|\overrightarrow{v}_1''^*\| = \|\overrightarrow{v}_1'^*\|$ et $\|\overrightarrow{v}_2''^*\| = \|\overrightarrow{v}_2'^*\|$ avec $\overrightarrow{v}_1''^*$ et $\overrightarrow{v}_2''^*$ parallèles et de sens opposés dans une direction inconnue. Il suffit donc de tracer (en violet) une droite arbitraire passant par C (on rappelle que $\overrightarrow{v}_G$ n'est pas modifiée par le choc) et d'y reporter de part et d'autre deux points B_1 et B_2 tels que $\|\overrightarrow{CB_1}\| = \|\overrightarrow{CA_1}\|$ et $\|\overrightarrow{CB_2}\| = \|\overrightarrow{CA_2}\|$; les vitesses après le choc (en marron) sont finalement égales à $\overrightarrow{OB_1}$ et $\overrightarrow{OB_2}$.

On a matérialisé la construction en traçant deux cercles de centre C et de rayons $\|\overrightarrow{CA_1}\|$ et $\|\overrightarrow{CA_2}\|$. C'est plus didactique... mais faux : ce sont deux *shères* qu'il faut tracer car rien ne prouve que les vitesses avant et après le choc soient coplanaires. Il est toutefois plus simple de réaliser cette figure plane, puis, par la pensée, faire tourner le triangle OB_1B_2 autour de OC .

Dans le cas d'un choc inélastique de coefficient de restitution e , on remplace les points B_1 et B_2 de la figure par des points D_1 et D_2 tels que $\overrightarrow{CD_1} = e \overrightarrow{CB_1}$ et $\overrightarrow{CD_2} = e \overrightarrow{CB_2}$.

Voyons sur un cas particulier, l'usage que l'on peut faire d'une telle construction géométrique. Etudions le choc élastique ($e = 1$) d'une masse lourde ($m_1 > m_2$) sur une masse légère au repos ($\overrightarrow{v}_2 = \vec{0}$). Dans la figure 1 p.11, le point A_2 est confondu avec O , ce qui conduit, en tenant compte que m_1 est grand donc C plus proche de A_1 que de $A_2 = O$, à la figure 2 p.13.

Si l'on donne à l'angle φ (qui définit la direction des vitesses après le choc dans le référentiel barycentrique) toutes les valeurs possibles, le vecteur $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{v}_1''$ balaie toutes les valeurs qu'il peut avoir et la figure montre que l'angle qu'il forme avec $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{v}_1'$ a une valeur maximale obtenue quand OB_1 est tangent mais à la sphère (et non au cercle) de centre C et de rayon CA_1 . L'angle maximum est α tel que

$$\sin \alpha = \frac{\|\overrightarrow{CB_{1\text{lim.}}}\|}{\|\overrightarrow{OC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{OC}\|}{\|\overrightarrow{OC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{v}_1'^*\|}{\|\overrightarrow{v}_G\|}$$

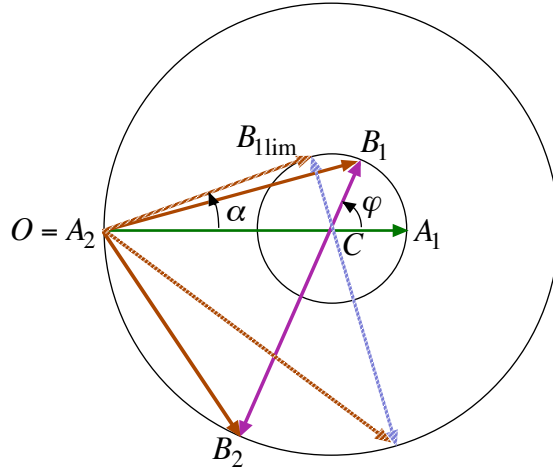


FIGURE 2 – choc élastique sur un point matériel immobile

Or compte tenu que $\vec{v}'_2 = \vec{0}$, l'on a :

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2 (\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}'_1$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{m_2}{m_1 + m_2} \|\vec{v}'_1\|}{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \|\vec{v}_1\|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Résultat que l'on peut certes trouver par le calcul, mais à condition d'avoir au préalable soupçonné l'existence d'une valeur maximale et avec une bonne habitude des calculs trigonométriques. La méthode graphique est beaucoup plus lisible et a valeur de preuve ; on aurait vraiment tort de s'en priver.

2 Chocs classiques entre solides.

2.a Généralités.

Dans le cas d'un choc subi par un solide, de masse M , de centre de gravité G , il n'y a pas de concept nouveau mais un enrichissement et une (petite) complication.

- **Adaptation du théorème du centre de gravité.**

L'enrichissement est le même que celui qui apparaît dans le passage de la mécanique du point à celle du solide : il ne suffit plus de savoir quelle est la force subie mais aussi son point d'application ou, ce qui revient au même, son moment. Imaginons qu'un solide subisse l'action d'une force $\vec{F}$ colossale, appliquée en un point A , pendant une durée ε très petite ; à *supposer qu'elle soit la seule force colossale*, le théorème du centre de gravité, intégré pendant la durée du choc, donne :

$$M \vec{v}''_G - M \vec{v}'_G = M \vec{v}_G(\varepsilon) - M \vec{v}_G(0) = \int_0^\varepsilon M \frac{d\vec{v}_G(t)}{dt} dt = \int_0^\varepsilon \vec{F} dt = \vec{I}$$

en introduisant à nouveau l'impulsion ou percussion $\vec{I}$. Remarquons ici que G est le centre de gravité du solide et non celui de deux points matériels qui se heurtent, le contexte n'est plus le même et $\vec{v}_G$ varie.

- **Adaptation du théorème du moment.**

Appliquons maintenant le théorème du moment, par exemple en G (ou en tout autre point où il est à la fois applicable et pertinent)

$$\vec{\sigma}''_G - \vec{\sigma}'_G = \vec{\sigma}_G(\varepsilon) - \vec{\sigma}_G(0) = \int_0^\varepsilon \frac{d\vec{\sigma}_G(t)}{dt} dt = \int_0^\varepsilon \vec{GA} \wedge \vec{F} dt$$

C'est a priori complexe car G et A se déplacent mais du fait de la brièveté du choc, ce déplacement est très faible et c'est une excellente approximation de considérer que $\vec{GA}$ reste égal, pendant la durée du choc, à sa valeur initiale, même si ensuite il se déplace de façon notable mais alors sur un temps plus long. On peut donc poursuivre, en supposant toujours que $\vec{F}$ soit la seule force colossale :

$$\vec{\sigma}''_G - \vec{\sigma}'_G = \int_0^\varepsilon \vec{GA} \wedge \vec{F} dt = \vec{GA} \wedge \int_0^\varepsilon \vec{F} dt = \vec{GA} \wedge \vec{I}$$

où l'on pourra appeler *moment d'impulsion* la grandeur $\vec{GA} \wedge \vec{I}$

- **Impulsion du support**

Mis à part le cas d'une chute libre ou celui d'un astéroïde de film-catastrophe, un solide est maintenu par une liaison ou un contact avec un support qui limite ses degrés de liberté. Si un choc s'effectue selon un degré de liberté bloqué, la liaison ou le support s'opposera à l'action du choc en exerçant lui aussi une force colossale pendant la durée du choc, définissant ainsi une impulsion du support et son moment.



FIGURE 3 – La pomme de Newton, selon Gotlib

Prenons un exemple : un physicien se promenant dans un verger, reçoit sur la tête une pomme qui exerce une action suffisamment violente pour déclencher toutes sortes d'élucubrations sur les actions à distance entre corps pesants. Plus sérieusement cette impulsion verticale descendante devrait le faire descendre, or le sol l'en empêche ; comment ? En exerçant lui aussi une impulsion verticale mais dirigée vers le haut pour compenser.

Dans les théorèmes ci-dessus, il faudra ajouter les termes correspondants et à l'instar des forces de contact en mécanique du solide (voir chapitre B-IX), l'impulsion du support est une inconnue du problème.

2.b Réaction d'axe.

Illustrons ce qui précède d'un premier exemple. Un solide de forme arbitraire est mobile autour d'un axe horizontal Oy (Oz est choisi vertical descendant) ; sa masse est M , son moment d'inertie par rapport à Oy est noté J et son centre de gravité G se trouve à la distance a de l'axe. Initialement, il est au repos, donc OG est vertical descendant. A l'instant $t = 0$ et pendant une durée brève ε , il subit l'action d'une force violente $\vec{F} = F \vec{e}_x$, constante, supposée horizontale dans cet exemple et appliquée en un point situé à une distance h au dessous du plan xOy ; l'impulsion est donc $\vec{I} = \vec{F} \varepsilon$, notée $I \vec{e}_x$ et son moment par rapport à l'axe, en projection sur Oy est $h I$ par un calcul classique. Juste après le choc, la vitesse angulaire, initialement nulle, est devenue ω'' et, puisque G n'a pas eu le temps de bouger, sa vitesse, initialement nulle, est devenue $a \omega'' \vec{e}_\theta = a \omega'' \vec{e}_x$, de même son moment cinétique, en projection sur Oy , initialement nul, est devenu $J \omega''$. Pendant la durée du choc, la réaction du support, en O , a pu être importante et crée donc en O une

impulsion vectorielle inconnue que nous notons de façon projetée $X \vec{e}_x + Y \vec{e}_y + Z \vec{e}_z$ dont le moment en O est nul puisque la force est appliquée en O (modèle de la liaison parfaite). Par contre, on ne tient pas compte du poids car son impulsion est négligeable (force non importante pendant un temps très bref). Tout ceci est résumé sur la figure 4 p.16 où la vitesse est dessinée en marron et l'impulsion en noir.

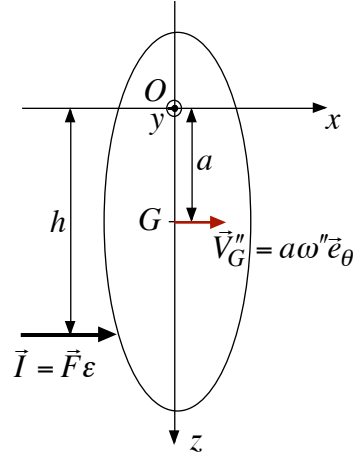


FIGURE 4 – Réaction d'axe.

L'intégration, sur la durée du choc, du théorème du centre de gravité donne, comme on l'a vu ci-dessus :

$$M \vec{v}_G'' = M a \omega'' \vec{e}_x = I \vec{e}_x + X \vec{e}_x + Y \vec{e}_y + Z \vec{e}_z$$

ce qui donne en projection sur les axes :

$$\begin{cases} M a \omega'' = I + X \\ 0 = Y \\ 0 = Z \end{cases}$$

qui nous apprend déjà que la réaction d'axe est parallèle à l'impulsion $\vec{I}$.

L'intégration, sur la durée du choc, du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe donne :

$$J \omega'' = h I$$

L'impulsion étant supposée connue, la résolution du système :

$$\begin{cases} M a \omega'' - X = I \\ J \omega'' = h I \end{cases}$$

conduit à $\omega'' = h I / J$ d'où, en module $v_G'' = a \omega'' = a h I / J$ et enfin à :

$$X = \left(\frac{M a h}{J} - 1 \right) I$$

Si un tel solide est conçu pour recevoir des impulsions toujours au même endroit et de façon répétée, la réaction d'axe peut rapidement endommager la liaison⁹ ; il sera alors intéressant de concevoir la forme du solide de sorte que $X = 0$, en s'arrangeant pour que les chocs aient lieu à une distance $h = \frac{J}{M a}$ de l'axe, soit en faisant en sorte que les chocs aient lieu là pour un solide donné, soit en optimisant la forme du solide si h est donné. Un exemple classique de cette dernière approche est la forme de la tête d'un marteau ; le côté effilé derrière celui où il frappe le clou n'est pas là pour faire joli, mais pour protéger le poignet du menuisier au mieux des tendinites, au pire de la détérioration prématurée du canal carpien.



FIGURE 5 – Marteau.

Justifions un peu plus cette forme, au moins qualitativement. Un menuisier adroit frappe le clou avec le milieu de la *table* situé à une distance h de son poignet, en reprenant la notation ci-dessus. Or l'idéal est que $h = \frac{J}{M a}$; appliquons maintenant la formule de HUYGENS (voir chapitre B-VIII) en appelant J_0 le moment d'inertie par rapport à l'axe Gy , c'est-à-dire la formule $J = J_0 + M a^2$. On en déduit que la condition pour que la percussion au niveau du poignet soit nulle est :

$$h = \frac{J}{M a} = \frac{J_0 + M a^2}{M a} = a + \frac{J_0}{M a}$$

qui montre que a , distance entre le poignet et le centre de gravité, est plus petite que h , distance entre le poignet et le centre de la *table* ; c'est pourquoi l'on donne à la *panne* une forme qui concentre sa masse vers le *manche* ce qui contribue à diminuer la valeur de a .

9. de la même façon, une raquette de tennis mal conçue peut entraîner des tendinites du coude, le *tennis-elbow* des anglo-saxons.

2.c Frappe d'une bille au billard.

Prenons un autre exemple.

Soit une bille¹⁰ de billard homogène, de masse M , de rayon a , de moment d'inertie $J = \frac{2}{5} m a^2$ par rapport à tout axe passant par son centre de gravité G . Elle est posée sur un tapis horizontal, le point de contact est noté H et elle est initialement au repos ($\vec{v}'_G = \vec{0}$ et $\vec{\omega}' = \vec{0}$). On choisit l'axe des z vertical ascendant. Elle subit brusquement en un point A le choc de la queue de billard, qui produit une impulsion $\vec{I}$, supposée ici horizontale et contenue dans le plan HGA . On choisit l'axe des x parallèle à $\vec{I}$ et de même sens. Juste après le choc, le centre de gravité a une vitesse $\vec{v}''_G$ et le vecteur rotation est $\vec{\omega}''$. Comme l'exemple précédent nous a appris la prudence, on suppose qu'a priori le sol exerce une impulsion dont les composantes normale et tangentielle (de sens à préciser pour la seconde) sont notées $\vec{N}$ et $\vec{T}$. Comme dans l'exemple précédent et pour les mêmes raisons, l'impulsion due au poids est négligeable. Tout ceci est résumé sur la figure 6 p.18. On note $\vec{I} = I \vec{e}_x$ avec $I > 0$ (choix de l'axe des x), $\vec{N} = N \vec{e}_z$ avec $N > 0$ (les forces de contact sont toujours dirigées du « supportant » vers le « supporté ») et $\vec{T} = T \vec{e}_x$ avec le signe de T à préciser grâce aux lois de COULOMB du frottement (voir chapitre B-IX) ; on note aussi $\vec{v}''_G = v''_G \vec{e}_x$, car si la bille sphérique reste sur le tapis, le mouvement de G est horizontal, selon x par symétrie.

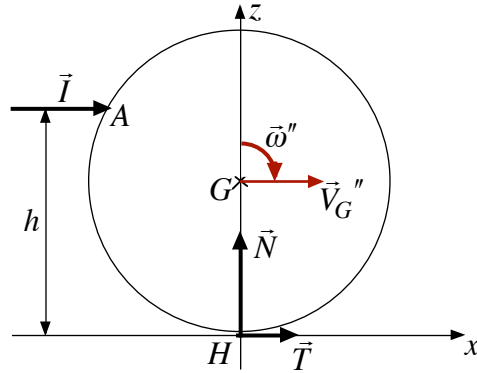


FIGURE 6 – Billard.

L'intégration, sur la durée du choc, du théorème du centre de gravité donne, comme précédemment :

$$M \vec{v}''_G = M v''_G \vec{e}_x = \vec{I} + \vec{N} + \vec{T} = I \vec{e}_x + N \vec{e}_z + T \vec{e}_x$$

10. On dit une bille et non une boule, sinon l'on jouerait au boulard.

ce qui donne en projection sur les axes :

$$\begin{cases} M v''_G = I + T \\ 0 = N \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que l'impulsion $\vec{N}$ est nulle et il est facile d'en déduire qu'il en est de même pour $\vec{T}$; faisons néanmoins cela proprement. De façon générale, $\vec{N}$ est l'intégration sur la durée du choc d'une force normale, pas forcément constante, $\vec{n} = n \vec{e}_z$ avec $n > 0$, soit $N = \int_0^\varepsilon n dt$. Or les lois de Coulomb qu'il y ait ou non glissement permettent d'affirmer que la force tangentielle est, en module, majorée par $f n$ où f est le coefficient de frottement. Dès lors, dans le cas général, on a :

$$\|\vec{T}\| = \left\| \int_0^\varepsilon \vec{t} dt \right\| \leq \int_0^\varepsilon \|\vec{t}\| dt \leq \int_0^\varepsilon f n dt = f \int_0^\varepsilon n dt = f N$$

Donc si N est nul, $\vec{T}$ aussi. Le résultat précédent se simplifie donc en :

$$\begin{aligned} M v''_G &= I \\ v''_G &= \frac{I}{M} \end{aligned}$$

Le moment en G de l'impulsion est $\vec{GA} \wedge \vec{T}$, soit, tous calculs faits, $(h - a) I \vec{e}_y$ (en fait on multiplie le module de l'impulsion par la distance de G à la droite définie par le point A et le vecteur $\vec{T}$, le signe est celui du sens de rotation que l'impulsion tendrait à provoquer si G était fixe) et l'intégration, sur la durée du choc, du théorème du moment cinétique en G donne, en projection sur l'axe des y :

$$\begin{aligned} J \omega'' &= \frac{2}{5} M a^2 \omega'' = (h - a) I \\ \omega'' &= \frac{5(h - a) I}{2 M a^2} \end{aligned}$$

Le mouvement de la bille est donc parfaitement connu, par la donnée de la vitesse de G et de la vitesse de rotation mais ce serait dommage d'en rester là ; calculons la vitesse de glissement juste après le choc, c'est-à-dire la vitesse du point H de la bille, en utilisant la formule fondamentale du champ de vitesses d'un solide :

$$\begin{aligned} \vec{v}''_H &= \vec{v}''_G + \vec{HG} \wedge \vec{\omega}'' = v''_G \vec{e}_x + a \vec{e}_z \wedge \omega'' \vec{e}_y = (v''_G - a \omega'') \vec{e}_x \\ v''_H &= v''_G - a \omega'' = \frac{I}{M} - a \frac{5(h - a) I}{2 M a^2} = \frac{I}{M} - \frac{5(h - a) I}{2 M a} \\ v''_H &= \frac{2 a I}{2 M a} - \frac{5(h - a) I}{2 M a} = \frac{[2 a - 5(h - a)] I}{2 M a} = \frac{(7 a - 5 h) I}{2 M a} \end{aligned}$$

Or, on sait qu'une bille initialement sans glissement continue son mouvement indéfiniment dans le cas d'un contact rigoureusement ponctuel et consomme de l'énergie sinon (voir chapitre B-IX). Même si le contact n'est plus rigoureusement ponctuel, le non glissement initial permet à la bille de conserver son énergie le plus longtemps possible donc d'être plus efficace, d'aller le plus loin possible. Pour obtenir la condition $v_H'' = 0$, le résultat précédent montre qu'il faut frapper la bille à la hauteur $h = \frac{7}{5}a$. Ne jouez jamais au billard sans avoir parfaitement assimilé ce paragraphe.

Les joueurs aguerris donnent des impulsions qui ne sont plus horizontales et ont une composante vers le bas¹¹, parfois même, pour les champions, une composante en dehors du plan HGA de la figure¹². Dans ce cas l'impulsion du sol n'est plus nulle et le problème se complique. Nous étudierons ce type de complication ci-dessous dans un contexte un peu différent, dans un souci de variété.

2.d Rebond d'une balle de tennis.

Etudions cette fois le rebond d'une balle de tennis, dans un cas simple.

Soit une balle de tennis, de masse M , de rayon a , de moment d'inertie $J = \frac{2}{3} m a^2$ par rapport à tout axe passant par son centre de gravité G , ce qui est une bonne approximation car l'essentiel de la masse est à la surface de la balle¹³. Quand elle arrive sur le sol, son centre de gravité G a une vitesse $\vec{v}_G$ dirigée vers le bas avec un angle φ' avec l'horizontale. On choisit l'axe des z vertical ascendant et l'axe des x que $\vec{v}_G$ soit dans le plan zOx et ait le sens de Gx et l'on note $\vec{v}_G = w' \vec{e}_x - v' \vec{e}_z$ avec $v' = \|\vec{v}_G\| \sin \varphi'$ et $w' = \|\vec{v}_G\| \cos \varphi'$. Quand quitte le sol, son centre de gravité G a une vitesse $\vec{v}_G''$ dirigée vers le haut avec un angle φ'' avec l'horizontale. On note $\vec{v}_G'' = w'' \vec{e}_x + v'' \vec{e}_z$ avec $v'' = \|\vec{v}_G''\| \sin \varphi''$ et $w'' = \|\vec{v}_G''\| \cos \varphi''$. Pour se placer dans un cas simple supposons que la balle n'ait pas d'effet, c'est-à-dire qu'avant le choc son vecteur rotation soit nul ($\vec{\omega}' = \vec{0}$). Juste après le choc, le vecteur rotation est $\vec{\omega}'' = \omega'' \vec{e}_y$. Le sol exerce, au point de contact noté O , une impulsion dont les composantes normale et tangentielle (on justifiera plus loin qu'elle est dirigée vers l'arrière) sont notées $\vec{N} = N \vec{e}_z$ et $\vec{T} = -T \vec{e}_x$, avec N et T positifs. Comme dans l'exemple précédent et pour les mêmes raisons, l'impulsion due au poids est négligeable. Tout ceci est résumé sur la figure 7 p.21.

11. Vu la longueur d'une queue de billard, on ne peut pas frapper de bas en haut !

12. alors $\vec{v}_H''$ n'est plus parallèle à $\vec{v}_G''$ et la bille a un mouvement parabolique qui lui permet de contourner les obstacles, ce qui est montré au chapitre B-IX. Sans entraînement, ne tentez pas l'expérience, vous feriez un accroc dans le tapis et c'est mal vu.

13. Je concède que c'est un peu abrupt pour le facteur $\frac{2}{3}$, mais comme c'est de peu d'importance pour la suite, j'assume.

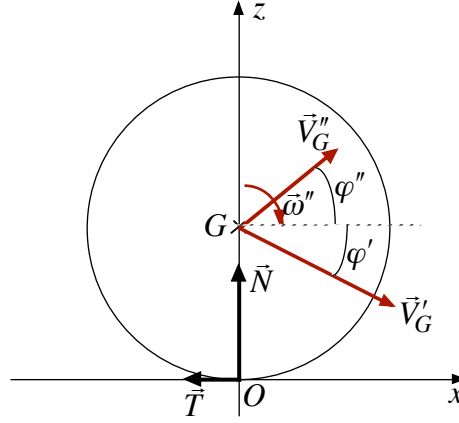


FIGURE 7 – Rebond d'une balle de tennis.

• **Première approche.**

L'intégration, sur la durée du choc, du théorème du centre de gravité donne, cette fois :

$$M \vec{v}''_G - M \vec{v}'_G = M (w'' \vec{e}_x + v'' \vec{e}_z) - M (w' \vec{e}_x - v' \vec{e}_z) = \vec{N} + \vec{T} = N \vec{e}_z - T \vec{e}_x$$

ce qui donne en projection sur les axes :

$$\begin{cases} M (v'' + v') = N \\ M (w'' - w') = -T \end{cases}$$

Intéressons-nous à ce qui se passe au niveau du point O . Au début du choc, puisque la balle ne tourne pas, tous ses points ont même vitesse, en particulier celui qui entre en contact avec le sol ; il y a donc glissement vers l'avant. On peut raisonnablement supposer (on vérifiera *in fine*) qu'il en est de même pendant toute la durée du contact. Les lois de COULOMB affirment alors que la force tangentielle $\vec{T}$ est vers l'arrière et que son module t est lié au module n de la force normale par la relation $t = f n$ où f est le coefficient de frottement. D'où

$$T = \int_0^\varepsilon t dt = \int_0^\varepsilon f n dt = f \int_0^\varepsilon n dt = f N$$

Les résultats précédents deviennent alors :

$$\begin{cases} M (v'' + v') = N \\ M (w'' - w') = -f N \end{cases}$$

Par ailleurs, le moment en G de l'impulsion est $\vec{GO} \wedge (\vec{N} + \vec{T}) = \vec{GO} \wedge \vec{T}$ car $\vec{N}$ et $\vec{GO}$ sont colinéaires, soit, tous calculs faits, $a T \vec{e}_y = a f N \vec{e}_y$ et l'intégration, sur la durée

du choc, du théorème du moment cinétique en G donne, en projection sur l'axe des y :

$$J \omega'' = \frac{2}{3} M a^2 \omega'' = a f N$$

Les caractéristiques du mouvement de la balle après le choc (v'' , w'' et ω'') s'expriment donc en fonction des caractéristiques du mouvement avant le choc (v' , w' et $\omega' = 0$) et de l'impulsion N de la composante normale d'interaction avec le sol.

$$\begin{cases} v'' = \frac{N}{M} - v' \\ w'' = w' - \frac{f N}{M} \\ \omega'' = \frac{3}{2} \frac{f N}{M a} \end{cases}$$

Parfait, sauf que...

...sauf que les lois de Coulomb ne donnent aucune information sur le module des forces de contact donc on ne sait rien de N hormis qu'il est positif. Et bien évidemment essayer de se placer dans le cas simple d'un choc élastique en donnant à ce terme le sens de choc avec conservation de l'énergie serait une erreur monstrueuse ; en effet, il y a glissement donc dissipation d'énergie.

Alors, que faire ?

Il est désormais urgent de savoir comment se comportent les prétendus solides au moment du choc ; mais on ne pouvait guère le faire plus tôt, en tout cas pas pendant l'étude de chocs entre points matériels qui n'ont pas d'extension spatiale.

• Qu'est-ce qu'un choc élastique ?

Abandonnons un instant notre balle de tennis au profit d'un choc de plein fouet de deux sphères en acier se heurtant avec deux vitesses opposées (dans le référentiel barycentrique), ce qui permettra une meilleure visualisation des choses. Pendant la durée du choc, les sphères se déforment ¹⁴ forcément, comme une voiture sur un platane. On aura par exemple, quelque chose comme la figure 8 p.23, où la zone déformée a été exagérée pour plus de lisibilité.

On peut modéliser les choses en disant que chaque sphère est constituée d'une partie non déformée de masse m et d'une partie déformée exerçant, selon les lois de l'élasticité une force proportionnelle à la déformation, comme pour un ressort ; ainsi l'on se ramène à un problème de deux masses reliées par un ressort, comme sur la figure 9 p.23.

Le problème est classique et aisé, on épargne les calculs au lecteur. Si au début du choc les vitesses sont opposées, le ressort commence par se contracter, les masses ralentissent et ce jusqu'à l'arrêt des masses puis le ressort se détend et lorsqu'on retrouve l'écartement

14. et cessent donc d'être des solides indéformables.

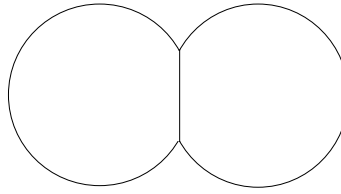


FIGURE 8 – Déformations au cours d'un choc.

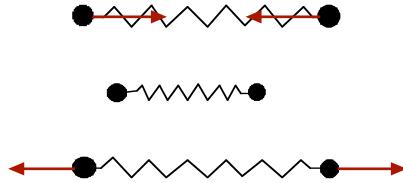


FIGURE 9 – Deux masses et un ressort.

initial, les vitesses ont même module et ont changé de sens. On se retrouve donc dans le cadre d'un *coefficient de restitution* e égal à l'unité (cf chocs élastiques de points).

Si maintenant , on imagine qu'au niveau de la zone de contact entre sphères déformées, il y a glissement parce que les sphères ont un mouvement de rotation, cela ne changera guère l'allure des déformations, malgré leur caractère devenu dynamique, et en projection sur la droite qui joint les centres, rien n'aura changé. Bien sûr ces affirmations méritent une vérification expérimentale. Bien que les expériences soient difficiles à mener, on a pu constater l'existence d'un coefficient de restitution dépendant essentiellement de la nature des matériaux constituant les deux solides et très peu des vitesses (module et direction) avant le choc de sorte que l'on puisse le considérer comme une constante du problème. Mais le résultat expérimental essentiel est que ce coefficient porte sur la *composante normale* (vis à vis du plan tangent commun aux deux solides juste au début du choc et avant déformation) de la vitesse relative.

• Retour au problème de la balle.

Ici l'un des solides est le sol immobile ; la vitesse normale relative est avant le choc v' vers le bas et après v'' vers le haut. Si e est le coefficient de restitution, on a , par définition, $v'' = e v'$. Avec une balle de qualité et un terrain de qualité, on peut admettre que $e = 1$ et donc $v'' = v'$. De $v'' = \frac{N}{M} - v'$, on tire alors :

$$N = 2 M v'$$

Puis de $w'' = w' - \frac{f N}{M}$, on tire :

$$w'' = w' - \frac{f N}{M} = w' - 2 f v'$$

Si l'on introduit les angles φ' et φ'' définis plus haut, on a :

$$\tan \varphi'' = \frac{\sin \varphi''}{\cos \varphi''} = \frac{\|\vec{v}''_G\| \sin \varphi''}{\|\vec{v}''_G\| \cos \varphi''} = \frac{v''}{w''}$$

$$\tan \varphi'' = \frac{v'}{w' - 2 f v'} = \frac{\|\vec{v}'_G\| \sin \varphi'}{\|\vec{v}'_G\| \cos \varphi' - 2 f \|\vec{v}'_G\| \sin \varphi'}$$

$$\tan \varphi'' = \frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi' - 2 f \sin \varphi'} = \frac{\tan \varphi'}{1 - 2 f \tan \varphi'}$$

Comme le dénominateur est plus petit que l'unité, on a $\tan \varphi'' > \tan \varphi'$ donc $\varphi'' > \varphi'$; le rebond ne suit donc pas les lois de DESCARTES de l'optique géométrique (voir chapitre D-V) ; la balle rebondit plus près de la verticale.

• Condition de validité.

C'est le moment de tenir notre promesse, celle de vérifier que le glissement s'est continuellement produit vers l'avant pendant toute la durée du choc. Dans la pratique si c'est encore vrai à la fin du choc, ça l'a été tout du long. Il faut commencer par calculer la vitesse angulaire à la fin du choc en reportant $N = 2 M v'$ dans $\omega'' = \frac{3 f N}{2 M a}$, d'où :

$$\omega'' = \frac{3 f v'}{a}$$

La vitesse de glissement à la fin du choc est celle du point O considéré comme point de la balle, soit

$$\begin{aligned} \vec{v}''_{\text{gliss.}} &= \vec{v}''_O = \vec{v}''_G + \vec{OG} \wedge \vec{\omega}'' = w'' \vec{e}_x + v'' \vec{e}_z + (a \vec{e}_z) \wedge (\omega'' \vec{e}_y) \\ \vec{v}''_{\text{gliss.}} &= (w'' - a \omega'') \vec{e}_x + v'' \vec{e}_z \end{aligned}$$

En fait seule la composante horizontale compte¹⁵, on y reporte les valeurs de w'' et ω'' , soit

$$\begin{aligned} v''_{\text{gliss.}} &= w'' - a \omega'' = w' - 2 f v' - a \frac{3 f v'}{a} = w' - 5 f v' \\ v''_{\text{gliss.}} &= \|\vec{v}'_G\| (\cos \varphi' - 5 f \sin \varphi') \end{aligned}$$

15. La composante verticale est la vitesse de la déformation élastique.

La condition $v''_{\text{gliss.}} > 0$ peut s'écrire aussi $\varphi' < \arctan\left(\frac{1}{5f}\right)$.

Le joueur de tennis¹⁶ aimerait que ce rebond déroutant soit valable sans condition sur φ' , sa balle va en effet trop vite pour qu'il puisse effectuer les calculs. Au vu du résultat sous sa forme $v''_{\text{gliss.}} = w'' - a\omega''$, on augmente $v''_{\text{gliss.}}$ (pour que la condition soit encore valable pour des angles plus grands) en diminuant ω'' et ceci tout simplement en diminuant ω' car les lois utilisées donnent en fait la valeur de $\omega'' - \omega'$. Or diminuer ω' qui est nul, c'est choisir ω' négatif en faisant tourner la balle dans le sens antéhoraire de la figure en brossant la balle par en dessous (balle coupée). Inversement en la brossant assez fort par dessus (balle liftée), on inverse le sens de glissement initial ainsi que les résultats de l'étude et la balle rebondit plus près de l'horizontale. Tout ceci est censé déstabiliser¹⁷ l'adversaire.

3 Chocs relativistes entre points matériels.

3.a Rappels et conséquences.

A une particule ponctuelle de masse m et de vitesse $\vec{v}$, on associe un quadrivecteur énergie-impulsion (voir chapitre B-VII) qui se comporte, dans un changement de référentiel galiléen, conformément à la transformation de LORENTZ (voir chapitre B-VI) ; ce quadrivecteur est :

$$\underline{\vec{p}} = \left(\frac{imc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

et l'on définit l'énergie E et la quantité de mouvement $\vec{p}$ de la particule par :

$$\underline{\vec{p}} = \left(i \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

d'où :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

qui vérifient¹⁸ :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

16. tennisman en newfrench.

17. En fait la rotation de la balle a un autre effet, plus déstabilisant encore, lors de sa trajectoire entre sa frappe et son rebord, effet dû à l'effet MAGNUS qui modifie la trajectoire d'une balle tournoyante par rapport à une balle en translation simple ; on étudiera cet effet en mécanique des fluides au chapitre B-XIV.

18. La vérification par le calcul est une variante du calcul de la pseudo-norme du quadrivecteur dont le

Si cette particule est soumise à une force $\vec{F}$ de puissance $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, on lui associe un quadrivecteur force défini par :

$$\overleftarrow{F} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(i \frac{\mathcal{P}}{c}, \vec{F} \right)$$

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit alors, en introduisant le temps propre élémentaire dt_0 , ainsi :

$$\overleftarrow{F} = \frac{d\overleftarrow{p}}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\overleftarrow{p}}{dt}$$

Ces rappels faits, considérons deux points mobiles de masses respectives m_1 et m_2 et de vitesses respectives $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, leurs quadrivecteurs énergie-impulsion sont respectivement :

$$\begin{aligned} \overleftarrow{p}_1(t) &= \left(\frac{i m_1 c}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}}, \frac{m_1 \vec{v}_1(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2(t)}{c^2}}} \right) \\ \overleftarrow{p}_2(t) &= \left(\frac{i m_2 c}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}}, \frac{m_2 \vec{v}_2(t)}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2(t)}{c^2}}} \right) \end{aligned}$$

Pour définir un quadrivecteur énergie-impulsion total, il faut les additionner ; or on ne peut mathématiquement additionner deux fonctions du temps qu'au même instant. Physiquement, ce ne serait pas conforme à l'esprit de la mécanique relativiste qui relativise la notion de simultanéité donc a priori cette addition n'a pas de sens. Toutefois dans le cas d'un *système isolé* de deux particules *sans interaction*, chacune est soumise à une force donc une puissance nulle donc la loi de la dynamique relativiste indique que les vecteurs énergie-impulsion ne dépendent plus du temps et peuvent alors être additionnés sans problème d'incohérence avec la théorie. On a alors dans ce cas :

$$\overleftarrow{p}_{\text{tot.}} = \overleftarrow{p}_1 + \overleftarrow{p}_2 = \left(i \frac{E_1}{c}, \vec{p}_1 \right) + \left(i \frac{E_2}{c}, \vec{p}_2 \right) = \left(i \frac{E_1 + E_2}{c}, \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \right)$$

et l'on peut donc définir une énergie et une quantité de mouvement totales, notées E et $\vec{p}$, par $\overleftarrow{p}_{\text{tot.}} = \left(i \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$, d'où $E = E_1 + E_2$ et $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

A partir de là, on peut être tenté de définir une masse totale M et ce ne peut être que par l'intermédiaire de la relation $E^2 = p^2 c^2 + M^2 c^4$, donc :

carré est :

$$\overleftarrow{p}^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2$$

$$(E_1 + E_2)^2 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 + M^2 c^4$$

$$E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 = \vec{p}_1^2 c^2 + \vec{p}_2^2 c^2 + 2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2 + M^2 c^4$$

or $E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4$ et $E_2^2 = p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4$, d'où finalement :

$$m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2 \sqrt{p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} \sqrt{p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4} = 2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 c^2 + M^2 c^4$$

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 \sqrt{m_1^2 + p_1^2/c^2} \sqrt{m_2^2 + p_2^2/c^2} - 2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 / c^2$$

dont il faut surtout retenir ceci :

En mécanique relativiste, il n'y a pas additivité des masses.

Un cas où cette formule est un peu plus simple, c'est celui où l'une des particules (disons m_2) a une vitesse donc une quantité de mouvement nulle, alors

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 m_2 \sqrt{m_1^2 + p_1^2/c^2}$$

qui est certes plus simple, mais quelle exploitation en faire ? Abandonnons donc l'idée d'utiliser la notion de masse totale qui nous égarerait.

Dans le cas du choc de deux particules élémentaires (électron, proton, neutron et particules un peu plus bizarres, anti-électrons ou positrons, anti-protons, mésons pi ou mu, etc.), avant et après le choc, elles sont soumises uniquement à des interactions gravitationnelles négligeables et électromagnétiques, pendant le choc, elles sont soumises à des interactions nucléaires, dénommées *interaction faible* et *interaction forte* qui sont beaucoup plus importantes, au moment du contact, que l'interaction électromagnétique qui s'avère donc négligeable elle aussi ; en ce sens, avant et après le choc, on peut considérer qu'il s'agit d'un système isolé de deux particules sans interaction s'applique. Pendant le choc comme il est localisé dans une zone de la taille de celle des particules (10^{-15} m) et pendant un temps extrêmement bref ($10^{-\text{beaucoup}}$ s), on peut considérer que c'est un événement quasi ponctuel dans l'espace-temps, auquel cas il n'y a pas de problème de relativité de la simultanéité. Les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement peuvent donc s'appliquer et l'on peut affirmer que $\underline{\vec{p}}_{\text{tot. avant}} = \underline{\vec{p}}_{\text{tot. après}}$, soit, en reprenant les conventions de notation antérieures $\underline{p}'_{\text{tot}} = \underline{p}''_{\text{tot}}$ et de même $E' = E''$.

Terminons par cette remarque : La notion de solide n'a pas de sens en mécanique relativiste ! La définition classique d'un solide (ensemble de points matériels restant à des distances fixes les uns des autres) se heurte de façon irrémédiable à la relativité des distances. Il n'y aura donc pas de quatrième partie « chocs relativistes entre solides ».

3.b Référentiel barycentrique.

On a vu dans l'étude du choc de points matériels en mécanique classique, l'intérêt qu'il y a à se placer dans le référentiel barycentrique. Or le barycentre d'un ensemble de points se calcule à partir de leurs positions *au même instant*, ce qui est irrecevable en mécanique relativiste où la simultanéité est une notion relative.

Comment transiger ? L'intérêt du référentiel barycentrique est que la quantité de mouvement totale y est nulle. On définira donc le référentiel barycentrique¹⁹ comme celui où $\vec{p}_{\text{tot.}}$ est nul.

Imaginons un ensemble de particules dont la quadrivecteur énergie-impulsion total est, dans le référentiel du laboratoire :

$$\underline{\vec{p}}_{\text{tot.}} = \left(i \frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \left(i \frac{\sum E_i}{c}, \sum \vec{p}_i \right)$$

Dans le référentiel barycentrique on veut avoir :

$$\underline{\vec{p}}^*_{\text{tot.}} = \left(i \frac{E^*}{c}, \vec{p}^* \right) = \left(i \frac{E^*}{c}, \vec{0} \right)$$

La transformation de LORENTZ inverse, en choisissant Ox parallèle à $\vec{p}$ et de même sens, conduit à :

$$\begin{pmatrix} i E^*/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-i \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{i \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i E/c \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où, en développant la deuxième ligne :

$$0 = \frac{-\frac{E v}{c^2} + p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v = \frac{p c^2}{E}$$

qui donne la vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse du référentiel barycentrique par rapport au référentiel du laboratoire.

19. Il faudrait donc l'appeler systématiquement le « référentiel dit barycentrique », j'y ai renoncé car ça devient vite agaçant.

Le calcul de E^* peut être utile, mais point n'est besoin de passer par la transformation de LORENTZ puisque l'on sait que celle-ci conserve la pseudo-norme donc :

$$-\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -\frac{E^{*2}}{c^2}$$

$$E^{*2} = E^2 - p^2 c^2$$

$$E^* = \sqrt{E^2 - p^2 c^2}$$

Du reste, on peut totalement se passer de la transformation de Lorentz en raisonnant subtilement. Le changement de référentiel de vitesse d'entraînement v conduisant au référentiel barycentrique transforme $(i \frac{E}{c}, \vec{p})$ en $(i \frac{E^*}{c}, 0)$, c'est formellement la même chose que pour une masse ponctuelle M , immobile dans le second référentiel (le barycentrique) donc animée d'une vitesse v par rapport au premier (celui du laboratoire) ; le vecteur énergie-impulsion de cette masse fictive a pour pseudo-norme $-M^2 c^4$, on a donc formellement d'une part :

$$-\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -\frac{E^{*2}}{c^2} = -M^2 c^4$$

(on retrouve donc $E^* = \sqrt{E^2 - p^2 c^2}$) et d'autre part, puisqu'il s'agit formellement d'une masse ponctuelle M :

$$p = \frac{M v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{M c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

d'où, en faisant le rapport membre à membre :

$$\frac{p}{E} = \frac{M v}{M c^2}$$

$$v = \frac{p c^2}{E}$$

et l'on retrouve plus simplement la vitesse du référentiel barycentrique.

Faisons le point : l'essentiel est que nous savons et même de deux façons différentes calculer la vitesse du référentiel barycentrique ; que dans celui-ci, la quantité de mouvement totale est nulle et nous savons enfin y calculer l'énergie totale. Nous pourrions aisément, comme en mécanique classique, en déduire ce qui se passe dans le référentiel barycentrique après le choc et il ne restera qu'à calculer les vitesses après le choc dans le référentiel du laboratoire par la loi de composition relativiste des vitesses. Voyons maintenant quelques exemples ; nous ne serons pas originaux et resterons sur les grands classiques.

3.c Chocs dits élastiques.

Il est d'usage, en mécanique relativiste, d'appeler choc élastique, un choc où l'on retrouve, après le choc, les mêmes particules²⁰ qu'avant et choc inélastique, un choc au cours duquel se créent et/ou disparaissent des particules.

• Choc de deux particules.

On retrouve quasiment la même situation qu'en mécanique classique. Dans le référentiel barycentrique, la quantité de mouvement totale est nulle, soit, en reprenant les notations antérieures, $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{0}$, d'où $\|\vec{p}'_1\| = \|\vec{p}'_2\|$, nous noterons p' la valeur commune du module. La quantité de mouvement totale se conserve, donc après le choc $\vec{p}''_1 + \vec{p}''_2 = \vec{0}$, d'où $\|\vec{p}''_1\| = \|\vec{p}''_2\|$, nous noterons p'' la valeur commune du module.

Dans le référentiel barycentrique, l'énergie totale avant le choc est :

$$E^* = E_1^* + E_2^* = \sqrt{m_1 c^4 + p'^2 c^2} + \sqrt{m_2 c^4 + p'^2 c^2}$$

où m_1 et m_2 sont les masses des deux particules. De même après le choc, l'énergie totale, qui s'est conservée, s'écrit :

$$E^* = E_1^* + E_2^* = \sqrt{m_1 c^4 + p''^2 c^2} + \sqrt{m_2 c^4 + p''^2 c^2}$$

La conservation s'exprime donc par :

$$E^* = \sqrt{m_1 c^4 + p'^2 c^2} + \sqrt{m_2 c^4 + p'^2 c^2} = \sqrt{m_1 c^4 + p''^2 c^2} + \sqrt{m_2 c^4 + p''^2 c^2}$$

qui conduit donc²¹ à $p' = p''$ et l'on retrouve donc le résultat classique : les quantités de mouvement des deux particules après le choc sont toujours opposées, ont conservé leur module mais ont une direction différente et indéterminée.

Par contre la suite nécessite plus de calculs qu'en mécanique classique, car une fois p''_1 connu, on en déduit v''_1 , non par division par m_1 , mais ainsi (on n'écrit pas l'indice, car la méthode vaut aussi pour v''_2) :

$$p'' = \frac{m v''}{\sqrt{1 - \frac{v''^2}{c^2}}}$$

$$p''^2 \left(1 - \frac{v''^2}{c^2}\right) = m^2 v''^2$$

20. Rien ne prouve logiquement alors que ce choc soit élastique au sens de la conservation de l'énergie, c'est l'expérience qui le prouve.

21. car $\sqrt{m_1 c^4 + x^2 c^2} + \sqrt{m_2 c^4 + x^2 c^2}$ est une fonction manifestement croissante de x ce qui assure l'unicité de la solution de $\sqrt{m_1 c^4 + x^2 c^2} + \sqrt{m_2 c^4 + x^2 c^2} = E^*$

$$p''^2 = v''^2 \left(m^2 + \frac{p''^2}{c^2} \right)$$

$$v'' = \frac{p''}{\sqrt{m^2 + \frac{p''^2}{c^2}}}$$

Pour revenir aux vitesses dans le référentiel du laboratoire, là encore, les calculs sont moins simples car la loi relativiste de composition des vitesses est complexe ; on vous fait grâce des calculs.

Malheureusement, cette cascade de deux complications nous prive d'une construction géométrique simple.

• Effet COMPTON.

Un cas particulier de ce qui précède est celui où l'une des particules est un photon. Rappelons qu'un photon associé à une onde électromagnétique de fréquence ν a pour énergie $E = h\nu$ et pour quantité de mouvement, en module, $p = E/c = h\nu/c$ et qu'il a une masse nulle. Après un choc, l'énergie du photon change, donc sa fréquence aussi, c'est cela l'effet COMPTON. On pourra aussi introduire la longueur d'onde associée $\lambda = c/\nu$.

On le met aisément en évidence en bombardant la matière avec un faisceau de rayons X dont certains vont heurter un électron périphérique d'un atome. L'énergie d'un photon X est beaucoup plus grande que l'énergie de liaison de l'électron ce qui permet de l'assimiler, en bonne approximation, avec un électron libre au repos²². Quand intervient un photon, les calculs sont plus simples (grâce à sa masse nulle) et l'on peut raisonner directement dans le référentiel du laboratoire. Etudions le choc décrit par la figure 10 p.31.

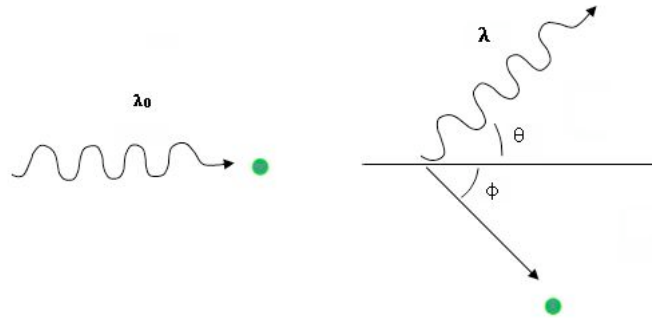


FIGURE 10 – Effet Compton.

Avant le choc, un photon de fréquence ν_0 et de longueur d'onde λ_0 se dirige vers un électron au repos ; après le choc, le photon repart dans une direction faisant un angle θ avec sa direction initiale, sa fréquence est devenue ν et sa longueur d'onde λ tandis que

²². On rappelle que dans le modèle de BOHR, l'énergie cinétique est l'opposée de l'énergie de liaison.

l'électron est éjecté dans une autre direction. Notons $\vec{u}_0$ et $\vec{u}$ les vecteurs unitaires des directions du photon, m , la masse de l'électron, E et $\vec{p}$ son énergie et sa quantité de mouvement après le choc.

La conservation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie se traduisent par :

$$\frac{h\nu_0}{c} \vec{u}_0 + \vec{0} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} + \vec{p}$$

$$h\nu_0 + mc^2 = h\nu + E$$

en évitant le piège classique : en mécanique relativiste, un corps au repos n'a pas une énergie nulle mais l'énergie de repos mc^2 .

Que peut-on en déduire ? Le plus intéressant n'est pas ici le sort tragique de l'électron mais le changement de fréquence du photon. On va donc éliminer E et p en les isolant puis en se servant de la relation $E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$. En fait, on parle en apparence des deux conservations de l'énergie et de la quantité de mouvement, mais on utilise tacitement l'unique conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total et l'on se débarrasse de l'électron après le choc grâce à la pseudo-norme de son quadrivecteur énergie-impulsion. On réécrit se qui précède ainsi :

$$\vec{p} c = h(\nu_0 \vec{u}_0 - \nu \vec{u})$$

$$E = h(\nu_0 - \nu) + mc^2$$

puis on mène²³ l'élimination :

$$m^2 c^4 = E^2 - \vec{p}^2 c^2 = [h(\nu_0 - \nu) + mc^2]^2 - h^2 (\nu_0 \vec{u}_0 - \nu \vec{u})^2$$

$$m^2 c^4 = h^2 (\nu_0 - \nu)^2 + 2h(\nu_0 - \nu)mc^2 + m^2 c^4 - h^2 (\nu_0 \vec{u}_0 - \nu \vec{u})^2$$

$$0 = h^2 (\nu_0 - \nu)^2 + 2h(\nu_0 - \nu)mc^2 - h^2 (\nu_0 \vec{u}_0 - \nu \vec{u})^2$$

$$0 = h^2 (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) + 2h(\nu_0 - \nu)mc^2 - h^2 (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu \vec{u}_0 \cdot \vec{u} + \nu^2)$$

$$0 = h^2 (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu + \nu^2) + 2h(\nu_0 - \nu)mc^2 - h^2 (\nu_0^2 - 2\nu_0\nu \cos\theta + \nu^2)$$

$$0 = h^2 (-2\nu_0\nu) + 2h(\nu_0 - \nu)mc^2 - h^2 (-2\nu_0\nu \cos\theta)$$

$$2h^2 \nu_0\nu (1 - \cos\theta) = 2h(\nu_0 - \nu)mc^2$$

$$\frac{h}{mc^2} (1 - \cos\theta) \nu_0\nu = \nu_0 - \nu$$

Le résultat est alors plus lisible en faisant apparaître les longueurs d'onde :

$$\frac{h}{mc^2} (1 - \cos\theta) = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0\nu} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0} = \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda_0}{c}$$

23. très tranquillement

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m c} (1 - \cos \theta)$$

La quantité $\frac{h}{m c}$, homogène à une longueur est notée λ_C et appelée longueur d'onde COMPTON. Avec $m = 0,91 \cdot 10^{-30}$ kg, $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s et $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s, on arrive à $\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12}$ m. Pour que l'effet soit mesurable, il faut donc que λ_0 ne soit pas trop grand devant λ_C , c'est pourquoi on utilise des rayons X « durs ».

3.d Chocs dits inélastiques

- **Création de particules, énergie de seuil.**

En mécanique relativiste, un choc est dit inélastique si, après le choc, apparaissent de nouvelles particules ; quant aux deux particules qui se sont heurtées, selon les cas, on les retrouve toutes les deux ou l'une a disparu ou les deux. Dans le référentiel barycentrique où la quantité de mouvement totale est nulle, l'énergie totale, notée ici E_{tot}^* , est appelée *énergie disponible*. Après le choc, il y a un certain nombre de particules, indexées par la lettre k , de masse m_k et de quantité de mouvement $\vec{p}_k^*$ et d'énergie E_k^* . Les conservations de la quantité de mouvement et de l'énergie, dans le référentiel barycentrique entraînent que :

$$\sum_k \vec{p}_k^* = \vec{p}_{\text{tot.}}^* = \vec{0}$$

$$\sum_k E_k^* = E_{\text{tot.}}^*$$

Utilisons la relation liant masse, quantité de mouvement et énergie d'une particule pour mettre en évidence une inégalité fondamentale.

$$E_{\text{tot.}}^* = \sum_k E_k^* = \sum_k \sqrt{m_k^2 c^4 + \vec{p}_k^{*2} c^2} \geq \sum_k \sqrt{m_k^2 c^4} = \left(\sum_k m_k \right) c^2$$

L'égalité est-elle possible ? Pour l'obtenir, il faut et il suffit que *toutes* les quantités de mouvement soient nulles. Qu'est-ce qui pourrait s'y opposer ? La conservation de la quantité de mouvement totale qui impose une contrainte à la somme des quantités de mouvement. Mais, dans le référentiel barycentrique, cette contrainte est d'avoir une somme nulle, ce qui est compatible avec le fait que chacun des termes de la somme soit nul. Dans le référentiel barycentrique et uniquement celui-là, on peut affirmer que la réaction nucléaire envisagée ne peut avoir lieu que si l'énergie disponible est supérieure ou égale à la somme des énergies au repos des particules présentes après le choc.

Prenons un exemple classique et historique, celui de la création d'un antiproton²⁴ par le choc de deux protons ; en fait comme on ne peut pas créer une anti-particule seule mais

24. Un antiproton a les mêmes caractéristiques qu'un proton hormis sa charge qui est $-e$ au lieu de e .

un couple particule-antiparticule, le choc crée un antiproton et un troisième proton selon le schéma réactionnel :

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

Remarque pratique : Comme on confère de l'énergie à un proton de charge e en l'accélé-
rant par un champ électrique entre deux points possédant donc une différence de potentiel,
et comme l'énergie potentielle d'une particule est le produit de sa charge par le poten-
tiel électrique, il est commode de donner les énergies en électron-volts (symbole eV) ainsi
un proton, accéléré par une différence de potentiel de 100 kV voit son énergie croître de
100 keV, c'est simple, non ? Par ailleurs $m c^2$ et $p c$ sont homogènes à une énergie, on mesure
les quantités de mouvement en eV/c et les masses en eV/c^2 .

Un proton et un antiproton ont une masse de $938 \text{ MeV}/c^2$. L'énergie de seuil pour la
réaction nucléaire étudiée est donc $E_{\text{seuil}}^* = 4 \times 938 = 3752 \text{ MeV}/c^2$

• Création de particules légères.

Par ailleurs l'énergie, dans le référentiel barycentrique, peut aussi s'écrire en fonction
des deux particules incidentes de masses notées ici M_1 et M_2 et l'on a aussi

$$E_{\text{tot.}}^* = E_1^* + E_2^* = \sqrt{M_1^2 c^4 + \vec{p}_1^{*2} c^2} + \sqrt{M_2^2 c^4 + \vec{p}_2^{*2} c^2} \geq (M_1 + M_2) c^2$$

donc si $M_1 + M_2 \geq \sum_k m_k$ l'énergie disponible est forcément supérieure à l'énergie
de seuil et la mécanique relativiste ne s'oppose pas²⁵ à la réaction nucléaire. Par exemple
l'annihilation d'un proton et d'un antiproton de masse $938 \text{ MeV}/c^2$ qui se rencontrent peut
générer deux ou trois mésons π de masse 135 ou 140 MeV/c^2 selon le type de méson π

• Création de particules lourdes, stratégie de collision.

La méthode la plus simple pour provoquer une collision proton-proton est d'accélérer
un faisceau de protons et de l'envoyer sur des protons au repos (contenus dans la matière
de la cible). Le proton cible a une quantité de mouvement nulle et comme énergie, son
énergie de repos $M c^2$ et le proton projectile a une énergie connue (par l'intermédiaire de
la différence de potentiel accélératrice), notée E et une quantité de mouvement $\vec{p}$ avec
 $E^2 = M^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$. L'énergie totale et la quantité de mouvement totale sont, dans le
référentiel du laboratoire :

$$E_{\text{tot.}} = E + M c^2 \quad \text{et} \quad \vec{p}_{\text{tot.}} = \vec{p}$$

Dans le référentiel barycentrique, l'énergie totale est notée $E_{\text{tot.}}^*$ et l'on a, par défini-
tion, la quantité de mouvement totale nulle. La conservation de la pseudo-norme du
quadrivecteur-énergie impulsion entraîne²⁶ que :

25. mais la physique nucléaire a bien des lois pour autoriser ou interdire telle ou telle réaction.

26. en changeant de signe dans la définition prise aux chapitres B-VI et B-VII, juste pour monter au
lecteur que cela n'a pas d'importance.

$$\begin{aligned}
E_{\text{tot.}}^{*2} - \vec{0}^2 &= E_{\text{tot.}}^2 - \vec{p}^2 c^2 \\
E_{\text{tot.}}^{*2} &= (E + M c^2)^2 - \vec{p}^2 c^2 \\
E_{\text{tot.}}^{*2} &= E^2 + 2 E M c^2 + M^2 c^4 - \vec{p}^2 c^2 \\
E_{\text{tot.}}^{*2} &= E^2 - \vec{p}^2 c^2 + 2 E M c^2 + M^2 c^4
\end{aligned}$$

Or $E^2 = M^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$ ou encore $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = M^2 c^4$, d'où :

$$\begin{aligned}
E_{\text{tot.}}^{*2} &= M^2 c^4 + 2 E M c^2 + M^2 c^4 \\
E_{\text{tot.}}^{*2} &= 2 M^2 c^4 + 2 E M c^2
\end{aligned}$$

Pour que la réaction puisse avoir lieu, il faut $E_{\text{tot.}}^* \geq E_{\text{seuil}}^*$, soit :

$$\begin{aligned}
E_{\text{tot.}}^{*2} &= 2 M^2 c^4 + 2 E M c^2 \geq E_{\text{seuil}}^{*2} \\
E &\geq \frac{E_{\text{seuil}}^{*2} - 2 M^2 c^4}{2 M c^2}
\end{aligned}$$

Dans le cas de la réaction nucléaire $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ pour laquelle $E_{\text{seuil}}^* = 4 M c^2$, il faut donc que :

$$E \geq \frac{16 M^2 c^4 - 2 M^2 c^4}{2 M c^2} = \frac{14 M^2 c^4}{2 M c^2} = 7 M c^2$$

soit numériquement $7 \times 938 = 6\,566 \text{ MeV}/c^2 = 6,566 \text{ GeV}/c^2$

Par contre, si l'on envoie l'un vers l'autre deux faisceaux de protons, on peut espérer créer le choc entre deux protons de même énergie E et de quantités de mouvement opposées. Dans ce cas le référentiel du laboratoire est aussi le référentiel barycentrique et l'énergie disponible est alors $2 E$ et pour que la même réaction puisse avoir lieu, il suffit que

$$\begin{aligned}
2 E &\geq E_{\text{seuil}}^* = 4 M c^2 \\
E &\geq 2 M c^2
\end{aligned}$$

chacun des protons doit avoir au moins l'énergie $2 \times 938 = 1\,876 \text{ MeV}/c^2 = 1,876 \text{ GeV}/c^2$

On privilégie désormais cette méthode de collision de faisceaux de direction opposés bien plus économique que la méthode du faisceau unique sur une cible fixe.

Remarque : On peut définir l'énergie cinétique K d'une particule relativiste comme différence de son énergie et de son énergie au repos, soit $K = E - M c^2$, l'intérêt est qu'un accélérateur accélérant un proton (par exemple) de vitesse initiale négligeable par une différence de potentiel U a une énergie cinétique $e U$, numériquement égale à U si U est en volts et K en eV. On peut obtenir les seuils en énergie cinétique en retranchant aux résultats ci-dessus l'énergie de repos ; on peut aussi reprendre la démonstration en remplaçant dès le début E par $M c^2 + K$; est-il vraiment utile de l'expliciter ?

• **Désintégration d'une particule en deux morceaux ou plus, découverte du neutrino.**

Bien qu'il ne s'agisse pas, au sens strict, d'un choc, la désintégration d'une particule en deux autres voire plus se traite rigoureusement de la même façon.

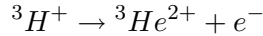
Ici, le référentiel barycentrique est, à l'évidence, le référentiel lié à la particule et, par conséquent l'énergie disponible se confond avec l'énergie au repos de la particule, quelle que soit sa vitesse dans le référentiel du laboratoire. Il ne sert donc strictement à rien d'accélérer la particule pour provoquer la désintégration. En fait, celle-ci est spontanée donc la particule est instable (elle a donc été créée au cours d'un choc antérieur).

Raisonnons dans le référentiel barycentrique et supposons que la particule de masse M , de quantité de mouvement nulle et d'énergie $E^* = M c^2$ se désintègre en deux particules de masses m_1 et m_2 , de quantités de mouvement opposées $\vec{p}^*$ et $-\vec{p}^*$ (pour que la somme soit nulle) et d'énergies E_1^* et E_2^* . La conservation de l'énergie se traduit par :

$$\begin{aligned} E^* &= E_1^* + E_2^* \\ M c^2 &= \sqrt{m_1^2 c^4 + \vec{p}^{*2} c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + (-\vec{p}^*)^2 c^2} \\ M c^2 &= \sqrt{m_1^2 c^4 + \vec{p}^{*2} c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + \vec{p}^{*2} c^2} \end{aligned}$$

La remarque de la note 21 p.30 montre que cette équation en $\|\vec{p}^*\|$ a une solution unique donc que les particules créées ont une quantité de mouvement et une énergie bien précises.

En 1930, Wolfgang PAULI se penche sur le cas de la désintégration β^- ; prenons comme exemple celui du noyau de l'isotope 3 de l'hydrogène appelé tritium qui se désintègre en donnant un noyau d'hélium 3 et un électron. La réaction s'écrit :



Normalement, ce qui précède s'applique. Numériquement, pour l'électron, $m_2 c^2$ est de l'ordre d'un demi MeV, pour le tritium ou tout autre corps radioactif β^- , $m_1 c^2$ est de l'ordre de quelques milliers de MeV et expérimentalement, l'ordre de grandeur de $p c$ est du MeV. On constate que $p c$ est mille fois plus petit que $m_1 c^2$ donc $p^2 c^2$ un million de fois plus petit que $m_1^2 c^4$ et l'on a donc, en très bonne approximation :

$$M c^2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + \vec{p}^{*2} c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + \vec{p}^{*2} c^2} = m_1 c^2 + \sqrt{m_2^2 c^4 + \vec{p}^{*2} c^2}$$

L'énergie de l'électron est donc alors :

$$E_2^* = M c^2 - m_1 c^2$$

et l'on a donc nullement besoin de résoudre l'équation en p citée précédemment.

L'hydrogène qui se désintègre est en général quasiment au repos, le référentiel du laboratoire se confond avec le référentiel barycentrique et son énergie devrait donc avoir la valeur calculée ci-dessus. Or l'expérience prouve qu'il n'en est rien ; expérimentalement l'électron a, en faisant le bilan sur de multiples désintégrations, toutes les énergies possibles comprises entre son énergie de masse et la valeur prévue.

PAULI en déduisit qu'il s'agissait d'une désintégration non en deux mais en trois particules dont une invisible, donc neutre²⁷. Il ne peut s'agir d'un photon, car un photon énergétique finit par se matérialiser (voir un peu plus loin) en une paire électron-positron qui « signe » sa présence. Il ne peut s'agir non plus d'un neutron, car la condition sur les masses des particules produites, évoquée plus haut, ne serait pas vérifiée, le neutron est trop lourd. Donc il s'agit d'une particule neutre, inconnue.

Montrons qu'il s'agit aussi d'une particule très légère et ce grâce au spectre d'énergie de l'électron qui s'étale de la valeur nulle à la valeur prévue dans l'hypothèse à deux particules. Donnons à la particule inconnue l'indice 0, la conservation de l'énergie entraîne

$$E^* = E_0^* + E_1^* + E_2^*$$

$$E_2^* = E^* - E_0^* - E_1^* = E^* - \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}_0^{*2} c^2} - \sqrt{m_1^2 c^4 + \vec{p}_1^{*2} c^2}$$

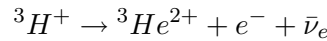
Comme ci-dessus, on tire partie de la grande valeur de $m_1 c^2$ pour une approximation légitime :

$$E_2^* = E^* - E_0^* - E_1^* = E^* - \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}_0^{*2} c^2} - m_1 c^2 \leq E^* - m_0 c^2 - m_1 c^2$$

où l'égalité est possible sans contredire la conservation de la quantité de mouvement dans le référentiel barycentrique (il suffit d'avoir la situation $\vec{p}_0 = \vec{0}$ avec $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$).

Par rapport à la désintégration en deux particules, l'énergie maximale de l'électron est diminuée de l'énergie de masse de la troisième particule. Or expérimentalement, cette diminution n'est pas observée ce qui prouve que la troisième particule a une masse, sinon nulle, au moins très petite devant celle de l'électron.

PAULI lui a donné le nom de neutrino (« le petit neutre » en italien) ; depuis, on sait qu'il s'agit d'un anti-neutrino électronique noté $\bar{\nu}_e$ et la réaction nucléaire est :



• Cas où des photons sont créés.

Rien ne change vraiment ; on traite le photon comme une particule de masse nulle. En particulier, dans le calcul de l'énergie de seuil, les photons n'interviennent pas ; du

²⁷. Les particules chargées se mettent aisément en évidence dans une chambre à bulle ou une chambre à brouillard, car elles font cesser la surfusion que l'on y a créée et leurs trajectoires se matérialisent par un chapelet de bulles ou de gouttes, tel le sillage d'un avion dans le ciel.

reste dans beaucoup de réactions nucléaires, des photons sont créés en plus des particules matérielles.

Le seul cas particulier est lorsqu'après le choc, il n'y a plus que des photons, c'est ce qui se passe quand une particule rencontre son anti-particule, la matière s'annihile et il y a production de photons.

Comme un photon se déplace à la vitesse de la lumière quel que soit le référentiel, sa quantité de mouvement n'est pas nulle dans le référentiel barycentrique. Or la quantité de mouvement totale y est nulle donc *il y a forcément plus d'un photon*, c'était la particularité à mettre en évidence; le cas le plus fréquent est celui de deux photons. Dans le cas de l'annihilation électron-positron d'équation

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

les deux photons ont, dans le référentiel barycentrique, des quantités de mouvement opposées donc de même module; or pour un photon $E = pc$, donc ils ont aussi même énergie, qui est donc la moitié de l'énergie disponible.

Si dans le référentiel du laboratoire les vitesses des électrons sont négligeables, de même donc que la quantité de mouvement totale, alors il est aussi référentiel barycentrique et l'énergie disponible est deux fois l'énergie au repos de l'électron et donc enfin chaque photon a l'énergie au repos d'un électron soit 511 keV/c².

Remarque : on a donc $E = h\nu = mc^2$ d'où $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h}{mc}$ et l'on retrouve la longueur d'onde COMPTON.

• Cas où un photon disparaît.

Il s'agit en fait d'une réaction de désintégration d'un photon faisant apparaître des particules matérielles, en pratique un couple particule-antiparticule, puisqu'on ne peut pas créer l'une sans l'autre. On parle de *matérialisation du photon*.

Ici un photon ayant la vitesse de la lumière quel que soit le référentiel, sa quantité de mouvement n'est jamais nulle et on ne peut donc pas trouver de référentiel barycentrique. On raisonne donc dans le référentiel du laboratoire. La particule et l'anti-particule ont la même masse m et la conservation de l'énergie se traduit par :

$$h\nu = \sqrt{m^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m^2 c^4 + p_2^2 c^2} \geq 2mc^2$$

Remarque : avec une paire électron-positron, on retrouve une énergie double de la fréquence COMPTON qui est dans la zone des rayons X durs, avec une paire proton-antiproton, le photon devrait avoir une énergie environ deux mille fois plus grande, c'est dire que la création d'une paire proton-antiproton sera difficile à observer sur Terre.

Mais ne passons pas à côté de l'essentiel, il y a la conservation simultanée de l'énergie et de la quantité de mouvement. Or si se créent deux particules, on peut trouver (comme

on l'a fait plus haut pour deux particules avant le choc) un référentiel où la quantité de mouvement totale est nulle ce qui est en contradiction avec le double fait de sa conservation et de l'impossibilité d'annuler la quantité de mouvement du photon.

En fait la matérialisation se fait toujours lors d'un choc avec un noyau atomique du milieu qui passe inaperçu car sa lourde masse, par rapport à celle de l'électron, a pour conséquence qu'il ne bouge presque pas. Si on le note X , la réaction de matérialisation n'est pas :

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

mais :

$$\gamma + X \rightarrow e^+ + e^- + X$$

qui peut être traitée comme n'importe quel autre choc ; la particularité « photon seul avant le choc » a en effet disparue.