

Chapitre B-XII

Statique des fluides. Capillarité.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On démontre rapidement la loi fondamentale de la statique des fluides que l'on applique tout d'abord aux liquides dont on étudie le champ de pression, avec les applications classiques des vases communicants et du baromètre ; on illustre le paradoxe hydrostatique par le crève-tonneau et la presse hydraulique ; on montre sur un exemple comment calculer les forces pressantes et moments dynamiques exercés sur une paroi. On établit la formule de la poussée d'Archimède et l'on étudie la stabilité des corps flottants vis-à-vis des mouvements de pilonnement, de tangage et de roulis, puis celui des corps immergés.

On applique ensuite la loi fondamentale à un gaz dont on établit le champ de pression dans différents modèles : isotherme, adiabatiques sec et humide ; on étudie les conditions de stabilité de l'atmosphère. On donne quelques indications sur des aérostats de conceptions diverses.

On montre l'existence d'une énergie de surface donc de forces de tension superficielle, puis d'angles de raccordement. On donne quelques indications sur les surfaces minimales que prennent les lames de liquide. On démontre la formule de Laplace et l'on explore quelques-unes de ses conséquences : ascension d'un liquide sur une paroi verticale ou dans un tube capillaire (loi de Jurin), forme d'une goutte posée sur un plan horizontal, compte-gouttes.

Table des matières

B-XII Statique des fluides. Capillarité.	1
1 Loi fondamentale de la statique des fluides parfaits.	5
1.a Fluides parfaits.	5
1.b Isotropie de la pression.	5
1.c Loi fondamentale de la statique des fluides.	7
2 Statique des fluides incompressibles ou hydrostatique.	8
2.a Champ de pression dans un champ de pesanteur uniforme.	8
2.b Surface libre. Vases communicants. Baromètres.	8
2.c Paradoxe hydrostatique. Crève-tonneau. Presse hydraulique.	11
2.d Calcul des forces pressantes et de leurs moments.	12
2.e Poussée d'Archimède. Centre de poussée.	14
2.f Equilibre des corps flottants. Pilonnement, tangage, roulis.	17
2.g Equilibre de corps immergés.	22
3 Statique des gaz.	23
3.a L'expérience du Puy de Dôme.	23
3.b Le problème posé.	24
3.c Le modèle isotherme.	24
3.d Le modèle du gradient thermique uniforme.	25
3.e Le modèle adiabatique.	25
3.f Stabilité de l'atmosphère.	27
3.g Le modèle adiabatique humide. L'effet de foehn.	29
3.h Aérostats.	30

4	Capillarité.	32
4.a	Energie de surface.	32
4.b	Forces de capillarité.	33
4.c	Angles de raccordement.	35
4.d	Surfaces minimales.	36
4.e	Coalescence.	37
4.f	Formule de Laplace.	38
4.g	Forme d'un liquide pesant en contact avec un solide. Loi de Jurin.	41

1 Loi fondamentale de la statique des fluides parfaits.

Les lois de la statique des fluides, ou hydrostatique, font partie des plus anciennes lois découvertes en physique. Elles sont correctement exposées en de multiples endroits et je n'ai rien de plus à ajouter. Je rédige donc a minima. Je n'insisterai que sur les parties un peu délaissées de nos jours, en particulier la capillarité et l'équilibre des corps flottants.

1.a Fluides parfaits.

On considère un volume Ω limité par une surface fermée Σ , rempli d'un fluide et à l'extérieur duquel on peut trouver soit le même fluide (Ω est alors une partie du fluide étudié), soit un autre fluide ou un solide (Ω contient alors tout le fluide étudié). Toute surface élémentaire d'aire $d\Sigma$ prise sur Σ , de vecteur surface $\vec{d\Sigma} = d\Sigma \vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à Σ orienté vers l'extérieur de Ω , est soumise de la part de l'extérieur à une force élémentaire $\vec{dF}$. En hydrostatique, on appelle fluide parfait un fluide pour lequel $\vec{dF}$ est normal à la surface et l'on appellera alors pression le scalaire p , généralement positif, exceptionnellement négatif tel que $\vec{dF} = -p \vec{d\Sigma}$.

On renvoie le lecteur au chapitre E-II de thermodynamique sur la pression (et échanges énergétiques) pour des considérations approfondies sur l'origine des forces de pression. On donnera dans le chapitre B-XIII, consacré aux outils de la mécanique des fluides, des exemples de fluides non parfaits (ou visqueux), ici ce serait prématuré car limité par le contexte de la statique.

1.b Isotropie de la pression.

En généralisant ce qui précède, si une surface arbitraire Σ sépare en deux une masse de fluide parfait, au niveau de toute surface élémentaire d'aire $d\Sigma$ prise sur Σ les deux moitiés de fluide exerce l'une sur l'autre, par action et réaction, une force élémentaire $\vec{dF} = \pm p \vec{d\Sigma}$ où la pression p est calculée au point M milieu de l'élément de surface réputé infiniment petit.

Certes, mais il y a là un non-dit admis sans justification et j'aime à traquer ce genre de choses¹. Si j' imagine un autre volume du même fluide dans les mêmes conditions avec une autre surface mais passant par le même point M , sur un nouvel élément de surface de vecteur $\vec{d\Sigma'}$ contenant ce point M , s'exercera une force normale que l'on pourra écrire $\vec{dF'} = -p' \vec{d\Sigma'}$. La question posée ici est celle-ci : a-t-on forcément $p' = p$; si oui, l'on pourra bien parler de la pression en M et noter $p(M)$, sinon, il faudra parler de la pression en M dans la direction $\vec{n}$ et noter $p(M, \vec{n})$.

Imaginons, au sein d'un fluide, un petit tétraèdre, infiniment petit, à trois faces en forme de triangle rectangle. Avec un choix convenable des axes, ses sommets et leurs coordonnées

1. à la base de bien des racismes.

seront notées respectivement $O(0,0,0)$, $A(dx,0,0)$, $B(0,dy,0)$ et $C(0,0,dz)$ ainsi que les présente la figure 1 p. 6. En faisant varier par la pensée dx , dy et dz , on donne à $\vec{n}$, vecteur unitaire normal de la face ABC toutes les orientations possibles, ce qui permet d'étudier la dépendance de la pression vis-à-vis de $\vec{n}$.

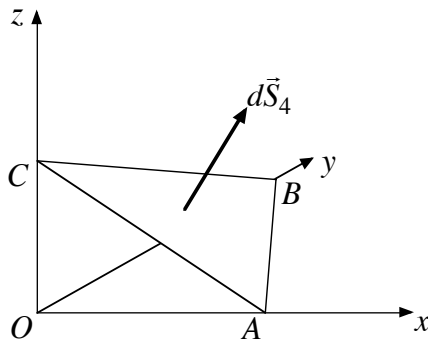


FIGURE 1 – Élément de fluide.

Le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de la face OAB est $-\vec{e}_z$, l'aire de cette face triangulaire est $\frac{1}{2} dx dy$ et son vecteur surface est donc $d\vec{S}_1 = -\frac{1}{2} dx dy \vec{e}_z$; si l'on note p_1 la pression dans la direction de $-\vec{e}_z$, la force pressante sur cette face est donc :

$$d\vec{F}_1 = -p_1 d\vec{S}_1 = \frac{1}{2} p_1 dx dy \vec{e}_z$$

De la même façon, les forces pressantes exercées sur les faces OBC et OBA sont respectivement :

$$d\vec{F}_2 = \frac{1}{2} p_2 dy dz \vec{e}_x$$

$$d\vec{F}_3 = \frac{1}{2} p_3 dz dx \vec{e}_y$$

Enfin, pour la dernière face ABC , on a certes $d\vec{F}_4 = -p_4 d\vec{S}_4$, mais comment calculer $d\vec{S}_4$?

Le plus simple est de se souvenir² que la somme des vecteurs surfaces d'une surface fermée est nulle et l'on en déduit élégamment que

$$d\vec{S}_4 = -d\vec{S}_1 - d\vec{S}_2 - d\vec{S}_3$$

d'où l'on déduit aisément que :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4 &= (p_4 - p_1) d\vec{S}_1 + (p_4 - p_2) d\vec{S}_2 + (p_4 - p_3) d\vec{S}_3 = \dots \\ &= \frac{1}{2} (p_1 - p_4) dx dy \vec{e}_z + \frac{1}{2} (p_2 - p_4) dy dz \vec{e}_x + \frac{1}{2} (p_3 - p_4) dz dx \vec{e}_y \end{aligned}$$

2. Voir le chapitre A-IX consacré à l'analyse vectorielle.

ce qui est le bilan des forces surfaciques auquel il faut ajouter la force *volumique* qu'est le poids $dm \vec{g}$, soit en introduisant la masse volumique ρ , en choisissant Oz vertical ascendant (d'où $\vec{g} = -g \vec{e}_z$) et sachant que le volume du tétraèdre³ est $\frac{1}{6} dx dy dz$, un poids égal à :

$$dm \vec{g} = -\frac{1}{6} \rho g \vec{e}_z dx dy dz$$

Enfin, en appelant $\vec{a}$ l'accélération du centre de gravité⁴, le théorème dit « du centre de gravité » donne, en passant le poids dans l'autre membre :

$$\frac{1}{6} \rho (\vec{a} + g \vec{e}_z) dx dy dz = \frac{1}{2} (p_1 - p_4) dx dy \vec{e}_z + \frac{1}{2} (p_2 - p_4) dy dz \vec{e}_x + \frac{1}{2} (p_3 - p_4) dz dx \vec{e}_y$$

Les longueurs élémentaires dx , dy et dz sont supposées infiniment petites de sorte que le second membre est un infiniment petit d'ordre deux et le premier d'ordre trois et que ce dernier devient négligeable dans le passage à la limite où les trois longueurs tendent vers zéro ; ainsi :

$$\vec{0} = \frac{1}{2} (p_1 - p_4) dx dy \vec{e}_z + \frac{1}{2} (p_2 - p_4) dy dz \vec{e}_x + \frac{1}{2} (p_3 - p_4) dz dx \vec{e}_y$$

Il suffit alors de projeter sur les trois axes pour en déduire qu'à l'évidence on a l'égalité $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, c'est à dire que la pression en O (passage à la limite quand les longueurs sont infiniment petites) et dans les directions de Ox , Oy , Oz et aussi la direction quelconque de la normale à ABC sont égales ; la pression est bien fondamentalement isotrope, que le fluide soit au repos ou en mouvement !

Remarque : si l'on ne se souvient pas que le vecteur surface total d'une surface fermée est nul, on peut se servir des propriétés du produit vectoriel en contrôlant l'orientation par la « règle des trois doigts de la main droite » et affirmer que :

$$d\vec{S}_4 = \frac{1}{2} \vec{CA} \wedge \vec{CB} = etc.$$

1.c Loi fondamentale de la statique des fluides.

Imaginons au sein d'un fluide au repos dans un champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{e}_z$, un cube élémentaire de côté a infiniment petit dont les arêtes soient parallèles aux axes dont l'un est vertical ascendant. La gravitation impose une direction particulière au problème, l'axe Oz , ce qui a comme conséquence que la pression dépend de la cote z du point. La face inférieure, d'aire a^2 , située à une cote z , est donc soumise à la force de pression $a^2 p(z) \vec{e}_z$ de la part du fluide en dessous. La face supérieure, située à une cote $z + a$, est donc soumise à la force de pression $-a^2 p(z + a) \vec{e}_z$ de la part du fluide en dessus. Les forces de pression sur

3. même si l'on ne connaît pas la formule, ce volume est majoré par celui du parallélépipède de cotés dx , dy et dz soit par $dx dy dz$ d'ordre 3, ce qui suffit à la démonstration.

4. Ainsi, on évitera de refaire la démonstration dans le prochain chapitre.

les quatre autres faces s'annulent deux à deux par symétrie. Enfin le poids est $-\rho a^3 g \vec{e}_z$ où ρ est la masse volumique. A l'équilibre puisque le fluide est au repos, la somme des forces est nulle, donc :

$$a^2 p(z) \vec{e}_z - a^2 p(z+a) \vec{e}_z - \rho a^3 g \vec{e}_z = \vec{0}$$

Après projection et simplification par a^3 , on en déduit :

$$\frac{dp}{dz} \approx \frac{p(z+a) - p(z)}{a} = -\rho g$$

qui est la loi fondamentale de l'hydrostatique.

Dans ce chapitre, nous en restons aux choses simples ; dans le prochain nous passerons à $\vec{\text{grad}} p = -\rho \vec{g}$.

2 Statique des fluides incompressibles ou hydrostatique.

2.a Champ de pression dans un champ de pesanteur uniforme.

La loi fondamentale, établie avec un axe vertical Oz ascendant, donne avec un fluide incompressible ($\rho = Cte$) :

$$p(z) = -\rho g z + Cte$$

Pour trouver la valeur de la constante, il suffit de connaître la pression en un point du fluide ; la plupart du temps le fluide a une surface en contact avec l'atmosphère qui y impose sa pression, appelée pression atmosphérique et notée p_a . Si l'on prend l'origine des axes en un point de la surface, on a donc :

$$p(z) = -\rho g z + p_a$$

et avec un axe vertical descendant dont l'origine est sur la surface :

$$p(z) = \rho g z + p_a$$

Remarque : on admet ici la continuité de la pression, nous verrons plus loin, dans la partie traitant de la capillarité, que cette continuité ne va pas de soi mais en général, c'est une excellente approximation.

2.b Surface libre. Vases communicants. Baromètres.

• Surface libre d'un liquide.

La surface d'un liquide en contact avec l'atmosphère, dite surface libre, est à la pression atmosphérique p_a en chacun de ses points ; on a donc pour un de ces points, grâce à

l'expression précédente :

$$p_a = -\rho g z + p_a$$

donc $z = 0$. La surface libre d'un liquide est un plan horizontal. Ce n'est plus un scoop depuis bien longtemps.

Remarque : on ne s'est pas demandé si la pression atmosphérique ne dépendait pas elle-même de l'altitude. Elle en dépend mais peu car la masse volumique de l'air est négligeable devant celle des liquides. Si l'on veut être plus rigoureux, on adapte⁵ la démonstration qui suit.

• Vases communicants.

Si deux liquides de masses volumiques différentes ont une surface de séparation, pour deux points A et B de cette surface, avec la continuité de la pression, on a en notant C_1 et C_2 les deux constantes des lois en $\rho(z) = -\rho g z + Cte$:

$$\begin{cases} C_1 - \rho_1 g z_A = C_2 - \rho_2 g z_A \\ C_1 - \rho_1 g z_B = C_2 - \rho_2 g z_B \end{cases}$$

d'où l'on tire par différence membre à membre que $z_A = z_B$ et plus généralement que la surface de séparation est horizontale.

Si deux récipients sont remplis d'un même liquide et communiquent par le fond par une tubulure elle aussi emplie du même liquide, le même raisonnement indique que les deux surfaces libres sont à la même altitude, pourvu bien sûr qu'il soient toutes deux en contact avec l'atmosphère. C'est la loi dite des vases communicants. Je ne crois pas utile de faire une figure.

• Baromètre.

Dans le même contexte si dans l'un des récipients, le liquide est en contact avec l'atmosphère (on place l'origine sur la surface du liquide dans ce récipient-là) et dans l'autre avec le vide ou tout au moins une pression négligeable devant la pression atmosphérique, on a une pression nulle à la surface de ce récipient-ci, située à une altitude h telle que :

$$0 = -\rho g h + p_a$$

d'où :

$$h = \frac{p_a}{\rho g}$$

5. en prenant $z_B = z_A + dz$ pour que $\rho_{air} \approx Cte$ entre les altitudes de A et B et l'on arrive à $dz = 0$ soit $z = Cte$

Avec une pression atmosphérique de l'ordre de 10^5 Pa , un champ de pesanteur de l'ordre de $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et une masse volumique de $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, l'eau monte dans un tube où a été fait le vide à une hauteur de dix mètres. Les puisatiers de Florence savaient dès le XVII^e siècle que ne pouvait aspirer l'eau de l'Arno à plus de sept mètres (et non dix car les pompes de l'époque n'arrivaient pas à créer le vide).

Sur ce principe, on a très vite compris que l'on pouvait mesurer la pression atmosphérique et, pour réduire l'encombrement, on a utilisé le liquide le plus dense connu : le mercure ($\rho = 13,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) ce qui ramène h à environ 75 centimètres. Du reste la première unité de pression était une hauteur de mercure en pouces et lignes⁶ (ultérieurement le système métrique a introduit le millimètre de mercure), comme on le trouve sur l'extrait de la relation⁷ par Blaise PASCAL de son expérience au Puy-de-Dôme (en 1648) dont on reparlera plus loin (voir figure 2 p. 10).

**Qu'en l'expérience faite au plus bas lieu, le vif-argēt
reftoit à la hauteur de 26. poulces 3. lignes & demie.**

FIGURE 2 – Citation de Blaise Pascal.

On doit l'invention du baromètre (vers 1644) à Evangelista TORRICELLI (1608–1647). La figure 3 p. 10 en montre une gravure (d'époque ?).



FIGURE 3 – Baromètre de Torricelli.

6. une ligne est un douzième de pouce

7. Attention à l'ancienne graphie du « s » (sauf à la fin d'un mot) qui ressemble beaucoup à celle du « f » ; le « ē » remplace « en ». Le vif-argent est l'ancien nom du mercure, le poulce est l'ancienne orthographe du pouce, les imparfaits étaient encore en « oit », pas encore en « ait ».

2.c Paradoxe hydrostatique. Crève-tonneau. Presse hydraulique.

Dans un récipient qui contient une hauteur h de liquide ($z = 0$ en surface et $z = -h$ au fond avec les conventions ci-dessus), la pression au fond est :

$$p(-h) = p_a + \rho g h$$

Elle ne dépend que de la hauteur d'eau, indépendamment de la forme du récipient, donc aussi de la masse d'eau qu'il contient ; ce résultat est connu sous le nom de *paradoxe hydrostatique*.

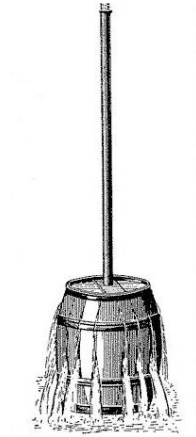


FIGURE 4 – Crève-tonneau de Pascal.

L'expérience du *crève-tonneau* de PASCAL (voir figure 4 p. 11) réalisée en 1646 en est une preuve spectaculaire. On emplit un tonneau d'environ un hectolitre avec de l'eau⁸ à ras bord, il ne se passe rien car le tonneau a été conçu pour ça. On lui adjoint, par une ouverture soigneusement étanchée, un tuyau vertical d'une dizaine de mètres de hauteur et de section d'environ un centimètre carré que l'on remplit d'eau (un litre suffit) ; au vu de ce qui précède la pression augmente d'une atmosphère ce qui suffit, certes pas à faire exploser le tonneau, mais à en écarter les douves. Ajouter ainsi un litre à un tonneau qui en contient cent provoque un effet paradoxal.

De la même façon, si l'on enferme un liquide sans contact avec l'atmosphère dans un récipient qui comporte deux zones cylindriques chacune avec un fond circulaire mobile d'aires respectives S_1 et S_2 et soumises respectivement aux forces normales F_1 et F_2 et si (pour simplifier l'exposé) ces parois mobiles sont à la même altitude, les pressions sont égales soit $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$. L'intérêt est qu'en exerçant une force minime F_1 sur la petite surface S_1 , la grande surface S_2 exerce sur l'extérieur une grande force F_2 ; il y a multiplication par le facteur $\frac{S_2}{S_1}$. En contrepartie s'il y a des déplacements respectifs de L_1 et L_2 , la conservation

8. car on a pris la sage précaution d'en boire le contenu initial... à plusieurs.

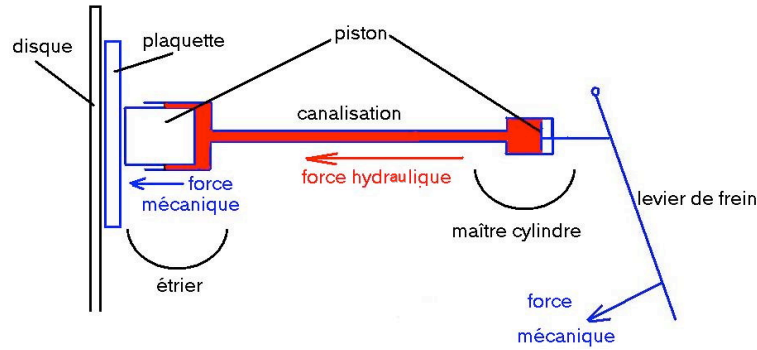


FIGURE 5 – Frein hydraulique.

du volume entraîne $S_1 L_1 = S_2 L_2$; donc pour exercer une force plus faible, on doit effectuer un déplacement plus long ; on vérifiera aisément la conservation de l'énergie par l'égalité des travaux $F_1 L_1 = F_2 L_2$. Sur ce principe sont conçus les freins (voir figure 5 p. 12 trouvée sur internet et où la faute a été corrigée), vérins et presses hydrauliques⁹.

2.d Calcul des forces pressantes et de leurs moments.

Si un élément de surface $d\vec{\Sigma} = d\Sigma \vec{n}$ (rappelons que $\vec{n}$ est unitaire dirigé vers l'extérieur du fluide) du récipient, centré sur un point M , exerce sur le fluide une force élémentaire $dF = -p(M) d\Sigma \vec{n}$, il subit, par action et réaction, une force opposée soit $dF = p(M) d\Sigma \vec{n}$, de la part du fluide. Une portion Σ de la surface du récipient subit donc par intégration une force :

$$\vec{F} = \iint_{\Sigma} p(M) d\Sigma \vec{n}$$

où, en prenant l'origine à la surface et avec un axe vertical descendant, on a (cf supra) $p(M) = p_a + \rho g z_M$ et le résultat ne dépend en fait que de la géométrie de Σ .

Le cas le plus simple est celui d'une paroi verticale rectangulaire d'un aquarium en forme de parallélépipède rectangle rempli à ras bord. Si son côté vertical est entre les cotes $z = 0$ et $z = h$ et son côté horizontal entre $x = -\frac{L}{2}$ et $x = \frac{L}{2}$, $\vec{F}$ est selon Oy et l'on a :

$$F_y = \int_{x=-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} \int_{z=0}^{z=h} (p_a + \rho g z) dz dx = \left(p_a h + \rho g \frac{h^2}{2} \right) L = \left(p_a + \rho g \frac{h}{2} \right) h L$$

9. Hydraulique a un « au » au lieu d'un « o » parce qu'il faut l'analyser ainsi : hydr(o)-aul(os)-ique où hydro, c'est l'eau, aulos, la flûte mais aussi le tuyau ; hydraulique concerne donc non pas l'eau mais les tuyaux d'eau.

où l'on remarque, *anecdotiquement*, que la pression moyenne est la pression à mi-hauteur.

Remarque : de l'autre côté la même surface est baignée par la pression atmosphérique uniforme p_a et est donc soumise à une force de sens contraire égale à :

$$F'_y = p_a h L$$

obtenue simplement en annulant ρ (le ρ de l'air est parfaitement négligable devant celui de l'eau) dans l'expression précédente et en changeant de signe. Le bilan des deux forces est donc :

$$F_y + F'_y = \frac{\rho g h^2 L}{2}$$

Pour des surfaces plus complexes, si l'on ne peut utiliser la poussée d'ARCHIMÈDE (cf infra), le calcul par intégration n'est plus du domaine de la physique mais celui des mathématiques.

Imaginons¹⁰ que ce même rectangle soit articulé en rotation autour de son côté horizontal inférieur, de sorte qu'en le faisant tourner, son côté horizontal supérieur s'abaisse et permet une vidange partielle contrôlée, non de l'aquarium mais d'une retenue d'eau. Calculer le moment des forces pressantes autour de l'axe de rotation permet de concevoir une tringlerie de commande qui supporte ce moment. Calculons-le dans la position verticale.

Il est alors pertinent de placer l'origine O au milieu du côté inférieur et de prendre un axe vertical ascendant de sorte que la pression est $p(z) = p_a + \rho g (h - z)$. Un élément de surface autour d'un point M de coordonnées x et z est soumis à la force :

$$\overrightarrow{dF} = p(z) dx dz \overrightarrow{e_y}$$

au moment par rapport au point O :

$$\overrightarrow{d\sigma_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} = (x \overrightarrow{e_x} + z \overrightarrow{e_z}) \wedge \overrightarrow{dF} = p(z) dx dz (x \overrightarrow{e_z} - z \overrightarrow{e_x})$$

et au moment par rapport à l'axe Ox :

$$d\sigma_{Ox} = \overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{d\sigma_O} = -z p(z) dx dz$$

d'où par intégration :

$$\sigma_{Ox} = - \int_{z=0}^{z=h} [p_a + \rho g (h - z)] z dz \int_{x=-\frac{L}{2}}^{x=\frac{L}{2}} dx = \dots = -\frac{1}{2} \left(p_a + \rho g \frac{h}{3} \right) h^2 L$$

où le signe indique un moment tendant à faire tourner de Oz vers Oy .

10. Je laisse la figure à la charge du lecteur ; il luttera ainsi contre l'engourdissement.

Remarque : comme ci-dessus, l'action de l'air de l'autre côté ($\rho = 0$ et changement de signe) exerce un moment :

$$\sigma'_{Ox} = \frac{1}{2} p_a h^2 L$$

d'où un moment total :

$$\sigma_{Ox} + \sigma'_{Ox} = -\rho g \frac{h^3 L}{6}$$

et l'on remarquera qu'on obtient le même moment total en appliquant la force totale en un point unique situé au tiers de la hauteur à partir du bas ; mais c'est anecdotique là aussi.

Le lecteur n'est censé voir dans ce paragraphe qu'une méthode et non pas un quelconque théorème.

2.e Poussée d'Archimède. Centre de poussée.

• La petite histoire.

ARCHIMÈDE a vécu à Syracuse (en Sicile qui faisait partie à l'époque de la « Grande Grèce ») de 287 (environ) à 212 avant J.-C. et ce que l'on sait de lui relève de la légende. On a peu d'écrits de sa main, essentiellement un palimpseste (le texte d'ARCHIMÈDE a été gratté au Moyen-Âge pour réutiliser le parchemin, mais on arrive à le lire avec les moyens modernes, rayons X par exemple) portant sur de la géométrie ; le reste nous est venu par une compilation du V^e siècle.

A-t-il découvert la poussée d'ARCHIMÈDE ? Rien n'est moins sûr. L'anecdote, qui relève de la légende, est connue : le roi de Syracuse soupçonnait son orfèvre d'avoir volé une partie de l'or qu'il lui avait donné pour confectionner une couronne et de l'avoir remplacé par le même poids de plomb. ARCHIMÈDE, savant renommé, fut sollicité pour trouver la vérité sans détruire la couronne ; c'est dans son bain qu'il eut une illumination telle qu'il courut dans la ville nu et criant « eureka » (j'ai trouvé¹¹).

Qu'avait-il trouvé ? Vraisemblablement qu'en rentrant dans la baignoire, l'eau avait débordé et il en a déduit qu'en plongeant la couronne dans un récipient plein à ras bord, il en déborderait un volume d'eau égal à celui de la couronne, facile à mesurer en enlevant la couronne et en mesurant la baisse du niveau. Il ne restait qu'à répéter la mesure avec une masse d'or égale à celle de la couronne ; si le second volume était égal, pas de fraude, s'il était plus petit, la couronne était moins dense que l'or.

11. Petite leçon d'indo-européen : « eureka » est un parfait, celui de « euriskô », et un parfait, en indo-européen, ça indique qu'on s'intéresse à la conséquence d'une action terminée. Par exemple, en latin, « vivit » c'est « il vit » et le parfait « vixit » ne veut pas dire « il a vécu » mais « il a fini de vivre » c'est-à-dire « il est mort » (en Italie, pas de chambre XVII, car c'est l'anagramme de VIXI, je suis mort). De même « euriskô », c'est « je cherche (avec application) » et donc « eureka » c'est « j'ai fini de chercher » donc « j'ai trouvé ». Vous savez désormais que si vous trouvez *par hasard* un louis d'or par terre, vous ne pouvez pas dire « eureka » car vous ne l'aviez pas cherché !

Avait-il pu trouver la loi de la poussée dite d'ARCHIMÈDE ? C'est possible qualitativement (un corps plongé dans l'eau est porté par l'eau, mais tout le monde le savait sans doute) mais peu vraisemblable quantitativement à cette époque.

• **La loi physique.**

La figure 6 p. 15 montre à gauche du double trait gras oblique une expérience réelle : un corps solide de forme quelconque¹² est plongé dans un seul fluide à l'équilibre ou plusieurs fluides à l'équilibre, donc séparés par des plans horizontaux (par exemple de l'air et de l'eau comme sur la figure). Il est lui-même à l'équilibre, soit parce qu'il flotte, soit qu'il est maintenu par un fil tendu au-dessus s'il est plus dense que l'eau.

A droite du double trait gras oblique, on a dessiné une expérience de pensée : on a mentalement remplacé le solide par les mêmes fluides à l'équilibre, en prolongeant le plan de séparation entre fluides.

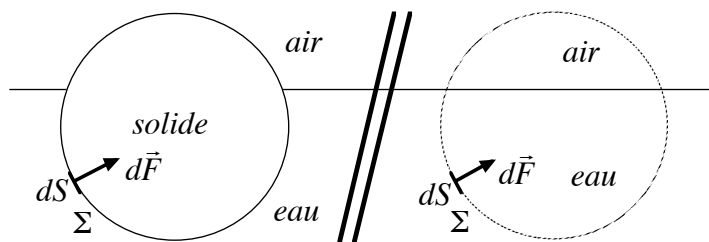


FIGURE 6 – Poussée d'Archimède.

Dans les deux expériences, à l'extérieur de la surface Σ du solide (réelle à gauche, imaginaire à droite), les lois de l'hydrostatique sont les mêmes donc les champs de pression aussi. Une même surface élémentaire dS prise sur Σ est donc soumise à la même pression et subit donc la même force élémentaire $d\vec{F}$; par intégration sur Σ , la force totale $\vec{F}$ subie de la part du fluide par le solide est la même que celle subie par la masse des fluides contenus dans la surface fictive Σ dans l'expérience de pensée. Or dans cette expérience ce contenu est à l'équilibre et la seule autre force est celle de pesanteur. Si l'on appelle « masse déplacée » la masse M_d de fluide à l'intérieur de Σ dans l'expérience de pensée, la force pressante $\vec{F}$ vérifie $\vec{F} + M_d \vec{g} = \vec{0}$; d'où :

$$\vec{F} = -M_d \vec{g}$$

que l'on formule traditionnellement ainsi :

Tout corps entièrement plongé dans un ou plusieurs fluides à l'équilibre et lui-même à l'équilibre est soumis de la part des fluides à une force verticale dirigée de bas en haut et égale au poids de la masse de fluide déplacé.

12. On a choisi une sphère car c'est plus facile à dessiner !

Remarque : par action et réaction, le solide exerce sur le ou les fluide(s) une force verticale dirigée de haut en bas et égale au poids de la masse de fluide déplacé.

- **Exemples de non validité.**

Si l'on pose, par sa face plane, une demi-sphère faite d'un matériau moins dense que l'eau sur le fond plat d'un récipient rempli d'eau, ou bien on le fait mollement en laissant un film d'eau sous la demi-sphère auquel cas elle sera soumise à la poussée d'ARCHIMÈDE et elle montera en surface, ou bien on le fait fermement en expulsant toute l'eau entre la face plane et le fond et le bilan des forces de pression sur les éléments de la seule demi-sphère, face plane exclue, toutes dirigées vers le bas, est lui aussi vers le bas et la demi-sphère reste plaquée au fond. Le théorème sur la poussée d'ARCHIMÈDE ne s'applique que si le solide est entouré de toute part de liquides.

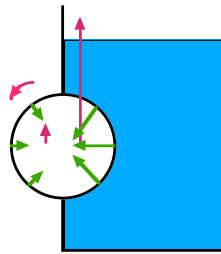


FIGURE 7 – Un prétendu mouvement perpétuel.

Un autre exemple classique est le mouvement prétendument perpétuel suivant : dans un récipient cylindrique plein d'eau, on découpe une fente dans la paroi latérale et l'on y insère de façon hermétique un disque dans une position telle que son axe soit tangent horizontalement avec la surface latérale cylindrique (voir figure 7 p. 16). La moitié dans l'air subirait une poussée d'ARCHIMÈDE négligeable et celle dans l'eau une autre, plus importante, qui provoquerait la rotation (flèches rouges). Mais dans l'expérience de pensée associée, la suppression du disque ne permet pas de raccorder une surface de séparation eau-air horizontale ; l'eau fuirait par la fente. En fait les forces de pression sont toutes dirigées vers l'axe (flèches vertes) et ont un moment nul ; elles ne provoquent aucune rotation. Là aussi, ce qui pêche, c'est que le disque n'est pas entouré de fluides de toutes parts ; il y a aussi le métal de la fente.

- **Centre de poussée.**

Dans les deux expériences, la réelle et celle de pensée, on a les mêmes forces surfaciques aux mêmes endroits ; elles ont donc aussi le même moment dynamique par rapport à un même point de calcul donc le même champ de moment. Dans l'expérience de pensée, à l'équilibre, ce moment est donc opposé à celui du poids de la masse de fluide(s) déplacée.

L'ensemble des forces et moments élémentaires de pesanteur est équivalent à une force unique localisée au centre de gravité (voir au chapitre B-VIII du cours de mécanique). On peut donc affirmer que la poussée d'ARCHIMÈDE s'applique au centre de gravité, mais attention au centre de gravité de la masse de fluide(s) déplacée et non celui du solide. Ce centre de gravité-là s'appelle traditionnellement *centre de poussée*.

2.f Equilibre des corps flottants. Pilonnement, tangage, roulis.

Nous nous placerons, pour dégager les idées sans les masquer par des calculs trop lourds, dans un cas simple : celui d'un parallélépipède rectangle de hauteur h , de longueur L et de largeur ℓ , homogène et de masse volumique ρ inférieure à celle de l'eau, notée ρ_0 et l'on appellera densité du solide le rapport $d = \frac{\rho}{\rho_0}$. Nous envisagerons la possibilité d'un équilibre de ce solide flottant verticalement dans l'eau et nous négligerons, pour alléger les calculs, la poussée d'ARCHIMÈDE due à l'air (qui est mille fois moins dense que l'eau aux conditions ordinaires).

• La position d'équilibre.

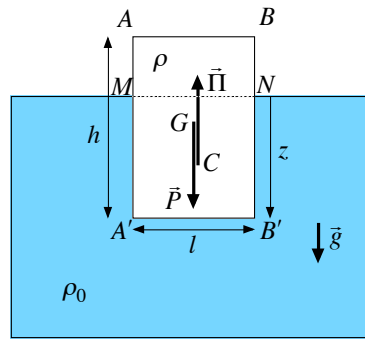


FIGURE 8 – Equilibre d'un corps flottant.

La figure 8 p. 17 montre le corps flottant à l'équilibre ; il est soumis à son poids $\vec{P}$ appliqué au centre de gravité G , au milieu de $ABB'A'$ sur la figure, et à la poussée d'ARCHIMÈDE $\vec{\Pi}$ appliquée au centre de poussée C , au milieu de $MNB'A'$ (fluide déplacé) sur la figure. Ces forces sont opposées ainsi que leurs moments ce qui impose que GC soit vertical (on a créé un léger décalage sur la figure pour qu'elle soit lisible). On appelle *tirant d'eau* la profondeur z dont est enfoncé le solide dans l'eau. L'égalité des modules (des normes) des deux forces entraîne :

$$\rho h L \ell g = \rho_0 z L \ell g$$

d'où en introduisant la densité $d = \frac{\rho}{\rho_0}$:

$$z = d h$$

On connaît par cœur l'exemple de l'iceberg dont la glace a une densité proche de 0,9 ; seuls 10% de la masse émergent.

• Mouvement de pilonnement.

Sur les trois directions de translation possibles à partir de l'équilibre, deux ne le modifie pas : les mouvements vers l'avant (marche normale du navire) ou vers le côté (mouvement dit de *dérive* dû aux courants ou à l'effet du vent sur la voile). Le mouvement vertical rompt l'équilibre, on l'appelle dans la marine mouvement de *pilonnement* (pour un véhicule terrestre suspendu, on l'appelle mouvement de *pompage*).

Reprenons la figure 8 p. 17 où nous supposons que z diffère de sa valeur à l'équilibre, le tirant d'eau, désormais notée $z_e = dh$. La poussée d'ARCHIMÈDE diffère alors du poids et le corps flottant se met en mouvement. Si celui-ci est assez lent, le bilan des forces de pression reste égal, en bonne approximation, à la poussée d'ARCHIMÈDE calculée en l'absence de mouvement. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide et projeté sur la verticale descendante donne alors successivement, en introduisant $\zeta = z - z_e$ et $d = \frac{\rho}{\rho_0}$:

$$\begin{aligned}\rho h L \ell \frac{d^2 z}{dt^2} &= \rho h L \ell g - \rho_e z L \ell g \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= g - g \frac{z}{dh} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -g \frac{z - z_e}{z_e} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -\frac{g}{z_0} \zeta\end{aligned}$$

ce qui donne un mouvement sinusoïdal de pulsation $\sqrt{\frac{g}{z_0}}$ qui assure la stabilité vis-à-vis de ce type de mouvement.

Pour un tirant d'eau d'une dizaine de mètres (c'est déjà un assez gros bateau), on obtient une période de l'ordre de six secondes assez désagréable pour qui n'a pas l'habitude. Le corps humain supporte en effet très bien la fréquence des pas de la marche (environ une seconde¹³), assez bien les fréquences plus courtes ou beaucoup plus longues et assez mal les fréquences un peu plus longues. C'est lié à la courbe de résonance de l'oscillateur (voir chapitre D-I) qu'est l'estomac suspendu par l'œsophage.

• Mouvements de tangage et de roulis.

Sur les trois directions de rotation possibles à partir de l'équilibre, une ne le modifie pas : celle autour d'un axe vertical (changement de cap du navire). La rotation autour d'un

13. 0,72 s à la vitesse normale de 4 km/h et des pas normaux de 80 cm

axe horizontal rompt l'équilibre, on l'appelle mouvement de *tangage* si l'axe est dirigé de babord vers tribord et mouvement de *roulis*¹⁴ s'il est dirigé de la poupe vers la proue. Ces deux mouvements s'étudient de la même façon, il suffit de permuter les rôles de L et ℓ .

La logique des théorèmes de la mécanique voudraient que l'on considérât des rotations autour d'axes passant par le centre de gravité G mais ici c'est maladroit, car une telle rotation modifie le volume d'eau déplacé, donc la poussée d'ARCHIMÈDE ; la somme des forces cesse d'être nulle et la rotation est fortement couplée à un mouvement de pilonnement, ce qui complique singulièrement l'étude.

On préfère donc choisir des axes de rotation passant par un point tel que la rotation ne fasse pas varier le volume immergé, on parle de rotation *isocarène*¹⁵. Dans le parallélépipède que nous étudions, le milieu (que nous noterons L dans les figures suivantes) du segment MN de la figure 8 p. 17 a cette propriété.

La figure 9 p. 19 montre le parallélépipède après rotation (de roulis) d'un angle θ , figure dessinée dans un référentiel lié au parallélépipède car les calculs y seront plus simples. L'origine sera prise au milieu de la face inférieure. La surface du liquide et le vecteur $\vec{g}$ sont donc en biais.

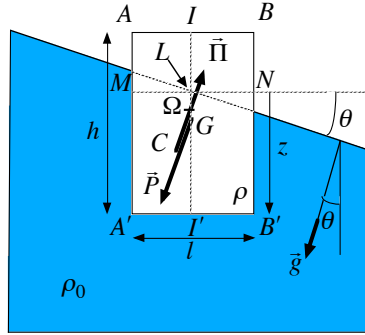


FIGURE 9 – Roulis.

Soyons honnête¹⁶, un tel mouvement est auto-contradictoire. En effet il ne modifie pas le bilan des forces et l'accélération verticale de G doit être nulle ; or ce mouvement génère une rotation de G sur un cercle de centre L . Toutefois, la variation d'altitude de G est en $(1 - \cos \theta \approx \frac{\theta^2}{2})$, du second ordre en θ et négligeable pour des roulis de faible amplitude. On retrouve l'attitude classique du physicien qui préfère une solution approchée aisée à étudier et à commenter, au prix d'une approximation raisonnable, à une solution rigoureuse peu exploitable et peu accessible.

Qualitativement, les choses sont aisées, il y a deux forces opposées le poids qui s'applique

14. En anglais, tanguer c'est « to rock » et rouler c'est « to roll », le lecteur voit où je veux en venir.

15. Carène prend ici le sens de volume immergé pour la commodité du physicien qui commet un abus de langage car, en réalité, la carène est la partie immergée de la coque du bateau, la surface immergée en quelque sorte.

16. La plupart des sources consultées ne le sont pas.

en G , fixe par rapport au solide, et la poussée d'ARCHIMÈDE qui s'applique au centre de poussée C qui, lui, se déplace, ici vers la gauche et vers le haut, au vu des déplacements relatifs du « liquide déplacé ». Deux forces opposées en deux points différents génèrent un couple qui provoque la rotation du solide. Selon le sens de ce couple, ou bien l'angle θ diminue et le solide se redresse et il est stable vis-à-vis du roulis, ou bien l'angle θ augmente et le solide se couche sur le côté jusqu'à trouver une nouvelle position d'équilibre (simplement penché et le navire « prend de la gîte » ou complement retourné et il chavire). Sur la figure 9 p. 19, la rotation se fait dans le sens horaire, ce qui ramène le solide vers la position $\theta = 0$ d'équilibre. C'est dû au fait que la poussée d'ARCHIMÈDE est tracée à gauche du poids ou, ce qui est équivalent et plus aisé à gérer, que le point Ω où elle coupe l'axe du solide se trouve au dessus de G .

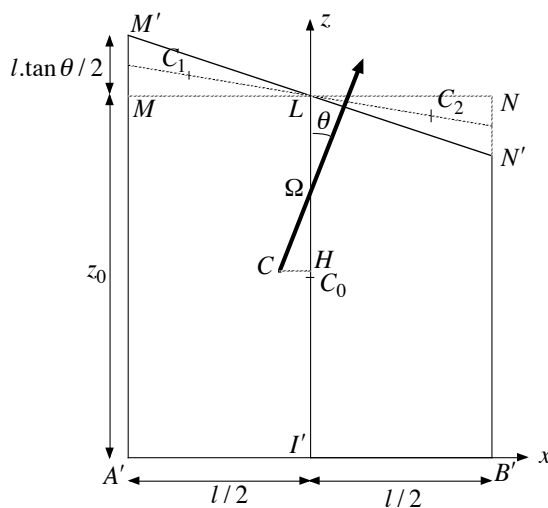


FIGURE 10 – Roulis (détail).

Détaillons cela sur la figure 10 p. 20 et commençons par placer le point C . On peut le considérer comme barycentre

- de l'eau déplacée dans la position d'équilibre ($MNB'A'$) de masse $m_0 = \rho_0 L \ell z_0$ avec $z_0 = dh$ (cf supra) et de barycentre C_0 d'abscisse nulle et d'ordonnée $\frac{z_0}{2}$ (voir repère sur la figure)
- de l'eau « ajoutée » à gauche (triangle LMN'), de masse $m_1 = \rho_0 L \frac{1}{2} \ell \frac{\ell \tan \theta}{2}$, soit $\frac{1}{8} \rho_0 L \ell^2 \tan \theta$, dont le barycentre C_1 est aux deux tiers de la médiane du triangle, ce qui correspond à une abscisse $-\frac{1}{3} \ell$ et une ordonnée $z_0 + \frac{1}{6} \ell \tan \theta$
- de l'eau « enlevée » à droite (triangle LNN'), de masse fictive, négative donc, égale à $m_2 = -\frac{1}{8} \rho_0 L \ell^2 \tan \theta$, dont le barycentre C_2 a pour abscisse $\frac{1}{3} \ell$ et pour ordonnée $z_0 - \frac{1}{6} \ell \tan \theta$

En n'oubliant pas que la masse totale est inchangée (mouvement isocarène qui conduit à $m_1 + m_2 = 0$), un calcul routinier conduit aux coordonnées du centre de poussée C ; on

fait grâce au lecteur des calculs et l'on trouve :

$$\begin{cases} x_C = -\frac{l^2 \tan \theta}{12 z_0} \\ z_C = \frac{z_0}{2} + \frac{l^2 \tan^2 \theta}{24 z_0} \end{cases}$$

On trouve enfin l'ordonnée de Ω par exemple par $\frac{x_H - x_C}{z_\Omega - z_C} = \tan \theta$ où H est la projection de C sur l'axe des ordonnées ($x_H = 0$ donc), d'où :

$$z_\Omega = z_C - \frac{x_C}{\tan \theta} = \frac{z_0}{2} + \frac{l^2}{12 z_0} + \frac{l^2 \tan^2 \theta}{24 z_0}$$

Comme on devait s'y attendre z_Ω dépend de θ , mais pour de faibles valeurs de θ on peut négliger le terme du second ordre en $\tan^2 \theta$. Le point Ω peut alors être considéré comme fixe par rapport au solide et on l'appelle *métacentre de carène* ; son ordonnée est :

$$z_\Omega = \frac{z_0}{2} + \frac{l^2}{12 z_0}$$

Le solide est stable vis-à-vis du roulis si le métacentre de carène Ω est au-dessus (cf supra) du centre de gravité G du solide d'ordonnée $\frac{h}{2}$; avec $z_0 = dh$, la condition de stabilité est donc, après multiplication par 2 des deux membres :

$$dh + \frac{l^2}{6dh} > h$$

soit encore

$$\ell^2 > 6h^2 d(1-d)$$

qui, pour une densité d donnée, est une condition sur la géométrie (h et ℓ) et, pour une géométrie donnée, une condition sur la densité.

Remarque : pour une surface de géométrie donnée, la position du métacentre calculée à partir de l'étude du volume d'eau déplacé ne dépend que de cette forme. Par contre la position du centre de gravité du solide dépend aussi de son intérieur et ce qui précède montre que l'on a intérêt à ce qu'il soit le plus bas possible. Le problème se complique si ce que contient le solide (disons un navire) est mobile librement (eau embarquée¹⁷ ou cargaison mal arrimée¹⁸) et l'on montre aisément que c'est source d'instabilité (sur la figure 9 p. 19, le centre de gravité se déplace aussi vers la gauche car les objets mobiles vont vers le point le plus bas).

17. Naufrage du ferry *Herald of Free Enterprise* en 1987 au large de Zeebruges.

18. On pense au début de *Quatrevingt-treize* (sic) de Victor Hugo.

◦ **Exemple de la stabilité d'un cube**

A d et h (ou ℓ) donnés, la condition de stabilité sur ℓ (ou h) est simple à exploiter ; il faut $\ell > h \sqrt{6d(1-d)}$ (ou $h < \frac{\ell}{\sqrt{6d(1-d)}}$). A h et ℓ donnés, il faut exploiter une inéquation du second degré portant sur d , ce qui n'a rien d'insurmontable ; il faut toutefois se souvenir que, par essence, d est positif et qu'il est inférieur à l'unité sinon le solide ne flotte pas, il coule.

Prenons donc l'exemple d'un cube homogène de densité inférieure à l'unité (fluctuat nec mergitur) ; la position d'équilibre étudiée (le cube flotte « à plat ») est stable vis-à-vis de roulis (et du tangage, vu la symétrie) si, après simplification par $\ell = h$, on a :

$$1 > 6d(1-d) \quad \text{soit} \quad 6d^2 - 6d + 1 > 0$$

L'équilibre n'est donc possible que si $0 < d < \frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0,211$ ou $1 < d < \frac{3+\sqrt{3}}{3} \approx 0,789$. Un glaçon ($d = 0,9$) flotte à plat dans mon verre d'eau¹⁹.

Que se passe-t-il si $0,211 < d < 0,789$? Le cube flotte autrement. Les autres positions d'équilibre sont celles où le centre de poussée et le centre de gravité sont sur la même verticale. Deux viennent immédiatement à l'esprit (et il n'y en a pas d'autre) ; dans la première, un quadruplet d'arêtes est horizontal et les deux autres à 45° du plan horizontal dans un sens et dans l'autre (deux faces sont verticales avec une diagonale horizontale et une verticale) ; dans l'autre la grande diagonale du cube est verticale. L'étude de ces deux cas est beaucoup plus délicate et dépasse l'objectif fixé.

2.g Equilibre de corps immergés.

• **Condition d'équilibre.**

Pour qu'un solide, totalement immergé dans un fluide de masse volumique ρ_0 , de masse M et de volume V , homogène ou non, de masse volumique moyenne $\rho = \frac{M}{V}$ soit en équilibre sans donc remonter en surface ni plonger au fond, il faut et il suffit que la poussée d'ARCHIMÈDE de module (de norme) $\rho_0 V g$ soit exactement opposée au poids $M g$, d'où les deux formulations possibles :

$$\rho_0 V = M \quad \text{soit} \quad \rho_0 = \rho$$

Comme cette condition est rigoureuse et non approximative, elle est quasiment impossible à réaliser. Le seul cas où ce problème soit réellement pertinent est celui du sous-marin²⁰. Son volume étant constant, on ajuste la masse à la valeur théorique en pompant vers l'extérieur ou vers l'intérieur de l'eau de mer dans un récipient prévu à cet effet

¹⁹. Vous ne croyez quand même pas que je commettrais l'hérésie de mettre des glaçons dans mon whisky ?

²⁰. Je parle bien évidemment de sous-marins d'exploration à visée scientifique et non d'engins dignes du Docteur Folamour.

et appelé *ballast*²¹. Comme on n'arrive jamais à un équilibre parfait, au repos, le sous-marin monte ou descend lentement et l'on passe son temps à pomper dans un sens ou l'autre ; mais lors de déplacements, les *gouvernails de profondeur* qui fonctionnent comme des ailes d'avion subissent des forces plus grandes que la différence entre poids et poussée d'ARCHIMÈDE et l'on navigue en changeant l'orientation de ces gouvernails plutôt qu'en jouant sur le remplissage du ballast.

• Stabilité de l'équilibre.

Imaginons qu'un corps immergé soit en parfait équilibre. Pour tester la stabilité, imaginons qu'on l'écarte par la pensée d'une distance élémentaire vers le bas. Si l'eau et le sous-marin sont parfaitement incompressibles, rien ne changera et l'équilibre est inchangé. Mais ni l'un ni l'autre ne le sont. Dans la descente imaginaire la pression hydrostatique augmente de dp ; l'eau se comprime et ρ_0 augmente, certes peu mais elle le fait ; la coque du sous-marin se rétracte, son volume diminue et sa masse volumique moyenne ρ , à masse égale, augmente. En introduisant les compressibilités $\chi_0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dp}$ et $\chi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$ (égal à $-\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$ en pensant à la dérivée logarithmique), ρ_0 et ρ deviennent respectivement :

$$\begin{cases} \rho'_0 = \rho_0 (1 + \chi_0 dp) \\ \rho' = \rho (1 + \chi dp) \end{cases}$$

Pour assurer la stabilité il faut que la poussée d'ARCHIMÈDE de module $\rho'_0 V' g$ (le volume a changé, on le note V') l'emporte sur le poids $M g$ inchangé certes mais que l'on peut écrire $\rho' V' g$ par définition de ρ' , de sorte que le solide immergé remonte vers son point de départ. Il faut donc $\rho'_0 > \rho'$ ce qui conduit à $\chi_0 > \chi$.

Un sous-marin avec de bonnes grosses parois sera peu compressible et son équilibre sera stable ; une boîte de conserve vide et fermée par une membrane de caoutchouc maintenue en place par un élastique sera très compressible et son équilibre sera instable (c'est un exemple de *ludion*).

3 Statique des gaz.

3.a L'expérience du Puy de Dôme.

On a vu plus haut que l'idée de l'existence d'une pression atmosphérique a pris corps au début du XVII^e siècle et a conduit à l'invention du baromètre par TORRICELLI en 1644.

En 1648, dans une expérience restée célèbre, Blaise PASCAL a prouvé en mesurant la pression atmosphérique à différentes altitudes lors d'une ascension du Puy-de-Dôme, que celle-ci vérifiait les lois de l'hydrostatique et a ainsi mis en évidence clairement que l'air était aussi soumis à la pesanteur.

21. Nom d'origine nordique dont est aussi issu le mot « lest ».

3.b Le problème posé.

A la différence des liquides, les gaz sont compressibles et leur masse volumique dépend de la pression et de la température, nous la noterons donc $\rho(p, T)$. En assimilant, en bonne approximation, le gaz à un gaz parfait de masse molaire M , l'équation d'état nous permet de déduire :

$$\rho(p, T) = \frac{M p}{R T}$$

A l'équilibre, la loi fondamentale de l'hydrostatique affirme que :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Nous n'avons donc que deux lois pour trouver l'évolution avec l'altitude de trois grandeurs (ρ , p et T), c'est insuffisant et il faut ajouter une hypothèse thermodynamique, fondée sur l'expérience et/ou la théorie pour aller plus loin.

3.c Le modèle isotherme.

Le modèle le plus simple est le modèle isotherme : l'atmosphère est à une température uniforme T_0 . Dès lors, on a successivement :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{M g p}{R T_0}$$

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{d(\ln p)}{dz} = -\frac{M g}{R T_0}$$

$$\ln p(z) = \ln p(0) - \frac{M g z}{R T_0}$$

$$p(z) = p(0) \exp\left(-\frac{M g z}{R T_0}\right)$$

et aussi avec par hypothèse $T(z) = T(0) = T_0$:

$$\rho(z) = \frac{M p(z)}{R T(z)} = \frac{M p(0)}{R T_0} \exp\left(-\frac{M g z}{R T_0}\right) = \rho(0) \exp\left(-\frac{M g z}{R T_0}\right)$$

On reconnaît bien sûr dans ces expressions un magnifique facteur de BOLTZMAN (voir le cours de thermodynamique en divers chapitres) car $M g z$ est l'énergie potentielle molaire de pesanteur.

Remarque : le modèle isotherme est en contradiction avec l'expérience ; il suffit de s'être promené en montagne pour savoir que la température décroît avec l'altitude. Toutefois il existe dans la structure de l'atmosphère trois zones où la température est pratiquement

uniforme : la tropopause en gros²² entre 7 et 17 km d'altitude, la stratopause entre 50 et 55 km et la mésopause vers 80 km. Dans ces zones, il n'y a pas d'absorption d'énergie (le rayonnement infrarouge du sol est absorbé dans la tropopause de 0 à 7 km, le rayonnement ultraviolet solaire dans la stratosphère de 17 à 50 km) et les vents ne sont pas tourbillonnaires ce qui laisse le temps à la température de s'uniformiser par conduction.

3.d Le modèle du gradient thermique uniforme.

Pour les basses couches de l'atmosphère, du niveau de la mer au sommet des montagnes, une variation affine de la température avec l'altitude colle bien à l'expérience. Admettons donc la loi expérimentale :

$$T(z) = T_0 - a z$$

avec a de l'ordre de 6 Kelvin par kilomètre.

Les calculs se mènent de la même façon que précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= -\rho g = -\frac{M g p}{R(T_0 - a z)} \\ \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} &= \frac{d(\ln p)}{dz} = -\frac{M g}{R(T_0 - a z)} \\ \ln p(z) - \ln p(0) &= \frac{M g}{a R} [\ln(T_0 - a z) - \ln(T_0)] \end{aligned}$$

d'où, en mettant en forme :

$$\frac{p(z)}{p(0)} = \left[\frac{T(z)}{T(0)} \right]^{\frac{M g}{a R}}$$

où $T(z)$ est donné et d'où l'on déduit avec $\rho = \frac{M p}{R T}$

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \left[\frac{T(z)}{T(0)} \right]^{\frac{M g}{a R} - 1}$$

3.e Le modèle adiabatique.

Un autre modèle part de l'idée que le champ de température est dû au brassage de l'atmosphère par les vents ascendants et descendants ; l'air est peu conducteur et les masses d'air qui se détendent en s'élevant vers les pressions plus faibles le font de façon adiabatique. On admet donc que la pression, la température et par conséquent la masse volumique sont reliées par les mêmes lois qu'une détente adiabatique réversible (les gradients, sources

22. Ces valeurs varient avec la longitude, les alternances jour/nuit et été/hiver.

d'irréversibilité, restent très faibles) ; pour l'air, on peut admettre que γ est une constante et dans ces conditions on a (voir cours de thermodynamique, un peu partout) $p \rho^{-\gamma} = Cte$ et $p^{\gamma-1} T^{-\gamma} = Cte$ d'où :

$$\frac{T(z)}{T(0)} = \left[\frac{p(z)}{p(0)} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On poursuit ainsi :

$$\frac{dp}{dz} = p(0) \frac{d}{dz} \left[\frac{p(z)}{p(0)} \right] = -\frac{M g p}{R T} = -\frac{M g p(0)}{R T(0)} \left[\frac{p(z)}{p(0)} \right]^{1-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{M g p(0)}{R T(0)} \left[\frac{p(z)}{p(0)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

On simplifie par $p(0)$, on réécrit, en notant $T(0) = T_0$ et $\varpi(z) = \frac{p(z)}{p(0)}$, et on intègre, avec $\varpi(0) = 1$ par construction :

$$\varpi^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{d\varpi}{dz} = -\frac{M g}{R T_0}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \varpi(z)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{M g z}{R T_0}$$

d'où, en posant $a = \frac{(\gamma-1) M g}{\gamma R}$, l'on tire :

$$\frac{p(z)}{p(0)} = \varpi(z) = \left[1 - \frac{a z}{T_0} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

On en déduit la température grâce à la relation ci-dessus entre température et pression :

$$\frac{T(z)}{T(0)} = \left[\frac{p(z)}{p(0)} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{a z}{T_0}$$

d'où :

$$T(z) = T_0 - a z$$

ce qui montre que le modèle adiabatique est un cas particulier du modèle précédent. Calculons la valeur de gradient thermique a que prévoit le modèle adiabatique. Pour l'air $\gamma \approx 1,4$ et $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, on a $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, d'où

$$a = \frac{(\gamma-1) M g}{\gamma R} = \frac{0,4 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{1,4 \cdot 8,32} = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1} = 9,8 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$$

Le gradient observé est du même ordre de grandeur mais un peu plus faible. On sent bien qu'il y a quelque chose à creuser. Creusons donc.

3.f Stabilité de l'atmosphère.

Imaginons un beau jour d'été : un beau soleil et pas un poil de vent. Toutes les radiations venant de l'extérieur que l'atmosphère peut absorber l'ont été en haute atmosphère ; le soleil ne chauffe donc pas la basse atmosphère mais donc le sol qui va à son tour chauffer l'air à son contact et, par diffusion, va s'établir un gradient de température, uniforme dès que le régime permanent est établi (voir dans le cours de thermodynamique le chapitre E-X sur les phénomènes diffusifs).

Le modèle du gradient uniforme, étudié plus haut, conduit, si $T(z) = T_0 - a z$, aux champs de pression et de masse volumique suivants :

$$\begin{cases} \frac{p(z)}{p(0)} = \left[\frac{T(z)}{T(0)} \right]^{\frac{M g}{a R}} \\ \frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \left[\frac{T(z)}{T(0)} \right]^{\frac{M g}{a R} - 1} \end{cases}$$

d'où l'on déduit (car je sais où je vais²³) :

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \left[\frac{p(z)}{p(0)} \right]^{\frac{\frac{M g}{a R} - 1}{\frac{M g}{a R}}} = \left[\frac{p(z)}{p(0)} \right]^{1 - \frac{a R}{M g}}$$

Les calculs qui ont établi ces résultats ne nécessitent pas que l'origine soit au niveau du sol. Prenons donc l'origine au niveau d'une petite masse d'air qu'une petite perturbation va faire passer de l'altitude 0 à une altitude dz très petite ; il me plaît à penser qu'il s'agit du batifolage d'un couple de papillons en pleine parade amoureuse.

La petite masse d'air passe de l'altitude 0 où l'air qui l'entoure est à la pression $p(0)$ et a la masse volumique $\rho(0)$ à l'altitude dz très petite où ces grandeurs seront notées respectivement $p(dz) = p(0) + dp$ et $\rho(dz) = \rho(0) + d\rho$; la relation précédente se réécrit, avec un développement limité à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \frac{\rho(0) + d\rho}{\rho(0)} &= \left[\frac{p(0) + dp}{p(0)} \right]^{1 - \frac{a R}{M g}} \\ 1 + \frac{d\rho}{\rho(0)} &= \left[1 + \frac{dp}{p(0)} \right]^{1 - \frac{a R}{M g}} \approx 1 + \left(1 - \frac{a R}{M g} \right) \frac{dp}{p(0)} \\ \frac{d\rho}{\rho(0)} &\approx \left(1 - \frac{a R}{M g} \right) \frac{dp}{p(0)} \end{aligned}$$

23. Je ne résiste pas à citer à nouveau Sénèque : les vents ne sauraient être favorables à celui qui navigue sans but. En l'occurrence j'ai un but : la rapidité des échanges mécaniques égalise la pression de la masse d'air que l'on écartera de sa position d'équilibre avec celle de l'air extérieur ; d'autre part, je vais comparer le poids et la poussée d'Archimède donc les masses volumiques de la masse d'air et de l'air extérieur ; il faut donc lier les masses volumiques à la pression.

$$d\rho \approx \left(1 - \frac{a R}{M g}\right) \frac{\rho(0)}{p(0)} dp$$

De son côté, pour les raisons évoquées au paragraphe précédent, la masse d'air écartée de sa position d'équilibre subit une transformation quasiment adiabatique (l'air est peu conducteur) et quasiment réversible (la différence de température sera faibles) tout en restant en équilibre mécanique (très rapide à s'établir) avec l'air qui l'entoure. Elle passe donc de la même pression $p(0)$ à la même pression $p(dz) = p(0) + dp$ mais sa masse volumique passe de $\rho(0)$ à $\rho'(dz) = \rho(0) + d\rho'$ avec (cf paragraphe précédent) :

$$\left(\frac{p(dz)}{p(0)}\right) \approx \left(\frac{\rho'(dz)}{\rho(0)}\right)^\gamma$$

d'où l'on tire, avec la même méthode que ci-dessus :

$$d\rho' \approx \frac{1}{\gamma} \frac{\rho(0)}{p(0)} dp$$

L'air est stable si le bilan du poids $\rho'(dz) V g$ (où V est le volume de la masse d'air à l'altitude dz) et de la poussée d'ARCHIMÈDE $\rho(dz) V g$ ramène la masse vers l'altitude 0 et instable s'il l'en éloigne. En orientant la verticale vers le haut, il faut donc que la différence $\rho(dz) V g - \rho'(dz) V g$ donc $\rho(dz) - \rho'(dz)$ et donc aussi $d\rho - d\rho'$ soit de signe opposé à dz donc du même signe que dp (car $\frac{dp}{dz} = -\rho g$). La condition d'équilibre est donc :

$$1 - \frac{a R}{M g} > \frac{1}{\gamma}$$

soit

$$a < \frac{(\gamma - 1) M g}{\gamma R}$$

où l'on reconnaît dans le second membre le *gradient adiabatique* calculé dans le paragraphe précédent.

Il n'y a plus qu'à en tirer les conclusions : il fait chaud, le soleil tape fort, le sol s'échauffe de plus en plus et le gradient thermique a de l'atmosphère croît. Lorsqu'il atteint (s'il l'atteint) le gradient adiabatique, l'atmosphère devient instable et il apparaît des mouvements de convection avec des courants ascendants qui amènent l'air chaud au sol vers le haut et des courants descendants qui amènent l'air froid des hauteurs vers le bas, ce qui tend à diminuer le gradient et finit par le stabiliser à sa valeur adiabatique par compétition avec la tendance induite par le chauffage du sol. Comprenons que le gradient adiabatique est un maximum qui ne peut être atteint que si le sol est suffisamment chauffé par les rayons solaires.

3.g Le modèle adiabatique humide. L'effet de foehn.

- Le modèle adiabatique humide.

Le modèle adiabatique précédent se complique lorsque l'air est humide. Lors de l'ascension d'une masse d'air, elle se détend puisque la pression décroît avec l'altitude. Tant que la pression partielle de vapeur d'eau est inférieure à la pression de vapeur saturante, l'air humide se comporte, en bonne approximation comme un mélange parfait de gaz parfait, c'est-à-dire comme un gaz parfait et il n'y a rien à reprendre à ce qui précède. La loi établie plus haut et réécrite sous la forme

$$\frac{p(z)}{p(0)} = \left[\frac{T(z)}{T(0)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

valable pour la pression totale mais aussi pour la pression partielle d'eau montre que la pression décroît assez rapidement quand la température décroît ; mais la pression de vapeur saturante est en fonction encore plus vite décroissante de la température et, tôt ou tard, la masse d'air arrive à une altitude telle que l'eau commence à se condenser sous forme liquide ou solide selon les cas, ce qui se manifeste par l'apparition de nuages (ou de brouillard si l'air est saturé dès l'altitude nulle).

Qualitativement, si la masse d'air saturée continue à s'élever donc à se détendre de façon quasiment adiabatique, elle reçoit un travail négatif (détente) et une chaleur nulle (adiabatique) donc son énergie interne décroît. La plus grande partie de cette perte correspond à la condensation de la vapeur d'eau (la chaleur latente de vaporisation de l'eau est une des plus importante) et le peu qui reste par un refroidissement. On comprend donc bien que le refroidissement est bien moins intense que si l'air était sec. Le *gradient adiabatique humide* (ou *saturé*) est plus faible que le *gradient adiabatique sec*. Au contraire du gradient sec à peu près constant, il dépend à la fois de la pression (un peu) et de la température (beaucoup) ; typiquement, il est compris entre 3 et 9 degrés par kilomètre, donc 6 en moyenne, dans les basses couches de l'atmosphère.

L'étude de ce comportement est extrêmement délicate et il serait valorisant de montrer que je sais m'en sortir ; ce serait toutefois pas très honnête. En effet dès que la vapeur se condense en gouttes d'eau ou cristaux de glace ceux-ci se mettent à descendre sous l'effet de la pesanteur et une masse d'air devient un système ouvert qui reçoit des gouttes par en-dessus et en perd par en-dessous ce qui complique les choses encore plus ; par ailleurs les gouttes descendent d'autant plus vite qu'elles sont grosses et, en outre, leur taille grossit par condensation (la vapeur se condense soit sur les poussières, soit sur les petites gouttes déjà formées, voir en thermodynamique le chapitre E-V sur les potentiels thermodynamiques) ou par coalescence (quand une goutte moyenne rattrape une petite, elle l'absorbe pour donner une grosse, voir plus loin dans la partie traitant de la capillarité). Bref, le nombre de paramètres à gérer devient trop énorme.

Signalons que la chute des gouttes ou glaçons est ralentie par le frottement de l'air, important pour les petites et négligeable pour les grosses (pour une goutte de rayon r , le

poids, proportionnel au volume, varie en r^3 et la force de frottement proportionnellement soit à r soit à r^2 selon le nombre de REYNOLDS, voir mécanique de fluides au chapitre B-XIII). Les petites gouttes sont souvent entraînées par les courants ascendants ou ont le temps de se revaporiser lors de leur descente ; les grosses arrivent au sol (pluie, neige, grêle).

- **L'effet de foehn.**

Imaginons qu'un vent apporte de l'air humide vers une chaîne de montagne ; celle-ci contraint les masses d'air à s'élever, elles subissent une adiabatique humide, se refroidissent disons de 6 degrés par kilomètre vertical, perdent toute leur eau sous forme de pluie ou de neige et arrivent au sommet totalement asséchées ; de là elles redescendent environ de la même distance verticale selon une adiabatique sèche et se réchauffent de 9 degrés par kilomètre vertical. Au pied de la montagne arrive donc un air très sec et relativement chaud. Il s'agit de l'*effet de foehn* qui existe un peu partout sur le globe et sous des noms variés (tramontane²⁴, vent d'autan²⁵, lombarde et d'autres encore, rien qu'en France).

3.h Aérostats.

- **Historique.**

La première tentative de faire voler un engin dans l'air est celle de LOURENÇO DE GUSMÃO en 1709, de petits ballons gonflés à l'air chaud mais incontrôlables et trop inflammables. L'invention des ballons atmosphériques a donc été attribuée aux frères MONGOLFIER (premiers essais en 1782) ; le premier vol habité (par des animaux) eut lieu à Versailles devant Louis XVI en 1783 et les premiers hommes en ballon (ils étaient trois mais l'on cite souvent le seul nom de PILÂTRE DE ROZIER) s'envolèrent (le ballon est resté attaché au sol par une corde) quelques mois plus tard.

Le principe est simple ; pour qu'un ballon vole et emporte une charge de masse M occupant un volume négligeable, il faut une masse de gaz de masse volumique ρ occupant un volume V et s'arranger pour que la poussée d'Archimède due à l'air extérieur de masse volumique ρ_0 l'emporte sur le poids total, soit successivement :

$$\rho_0 V g > (\rho V + M) g$$

$$\rho < \rho_0 - \frac{M}{V}$$

Il faut donc que le gaz utilisé soit plus léger que l'air extérieur.

24. Dans ce cas la cause de la baisse de pression qui provoque l'assèchement de l'air est un effet Venturi (voir le chapitre B-XIV de mécanique des fluides) du vent qui doit passer entre les Pyrénées et le Massif Central.

25. qui combine l'effet de foehn dû aux Pyrénées et un effet Venturi.

La solution la plus simple et la première utilisée est de l'air chaud, ce qui nécessite pour un vol long d'embarquer un système de chauffage pour compenser les pertes thermiques (de nos jours, c'est le plus couramment un brûleur de propane). Une autre d'utiliser à température ambiante un gaz de masse molaire plus petite que celle de l'air ou un mélange de tels gaz, la plus efficace est donc l'hydrogène, c'est celle des Zeppelins²⁶ construits en Allemagne dès la fin du XIX^e siècle qui furent utilisés jusqu'à la catastrophe du *Hindenburg* qui pris feu à son arrivée aux USA en 1937 (voir figure 11 p. 31). L'hélium est plutôt onéreux et ne sert qu'aux petits ballons festifs... qui cessent de l'être quand ils s'échappent des mains de nos charmants bambins. On a aussi utilisé le *gaz d'éclairage*, mélange d'hydrogène, de méthane (tous deux inflammables) et de monoxyde de carbone (toxique) dans les *ballons à gaz*.

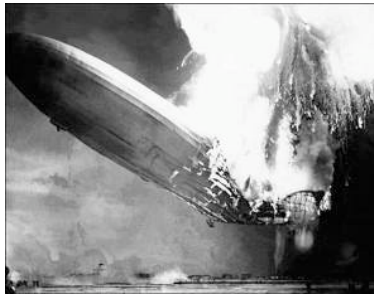


FIGURE 11 – Incendie du Zeppelin Hindenburg.

• Variantes.

Le ballon qui contient le gaz léger peut être fermé ou ouvert à sa base, il peut être rigide ou élastique ; mais comme il est léger donc mince, il n'est jamais isolant et le gaz peut être chauffé pour compenser les pertes thermique ou être, sans chauffage, à la température extérieure.

Pour un ballon fermé de volume V fixe ou variable la masse m de gaz qu'il contient est constante et il est pertinent d'écrire ainsi la force ascensionnelle (différence entre la poussée d'ARCHIMÈDE et le poids total) :

$$F = \rho_0 V g - (M + m) g$$

Pour un ballon fermé rigide de volume V constant, au fur et à mesure qu'il s'élève, la masse volumique ρ_0 de l'air extérieur, diminue, donc F aussi et l'on comprend bien que l'aérostat se stabilisera à l'altitude où F s'annule. Classiquement, si l'altitude atteinte est trop basse, on remonte en diminuant M , l'astuce consiste à passer par-dessus bord quelques sacs de sable (du *lest*) qu'on a eu la sage précaution d'embarquer. Tout aussi

26. du nom de celui qui lança leur construction.

classiquement, si l'altitude atteinte est trop haute, on diminue m en ouvrant une soupape en haut du ballon, ce qui suppose que le gaz léger soit en surpression.

Pour un ballon fermé élastique sans dispositif de chauffage, le gaz intérieur de masse volumique ρ et le gaz extérieur de masse volumique ρ_0 sont en bonne approximation des gaz parfaits à la même température et la même pression ; le rapport des masses volumiques est alors celui des masses molaires (la densité d introduite ci-dessus) qui est une constante. On a alors :

$$F = \rho_0 V g - (M + m) g = \frac{\rho}{d} V g - (M + m) g = \left[\frac{m}{d} - (M + m) \right] g$$

c'est une constante et il n'y a plus de stabilisation possible : le ballon monte jusqu'à l'éclatement. Un parachute permet alors une redescente en douceur ; c'est le principe d'un type de ballon-sonde permettant des mesures automatiques de paramètres en haute altitude.

Pour un ballon ouvert (nécessaire en cas de chauffage embarqué), rigide donc sinon il se ratatinerait, l'équilibre des pressions est acquis ; le volume V fixe est partagé en un volume v de gaz léger dans la partie supérieure et d'un volume $(V - v)$ d'air extérieur dans la partie inférieure pour lequel le bilan du poids et de la poussée d'ARCHIMÈDE est nul. On se ramène au cas précédent, celui du ballon de volume v variable tant que $v < V$; au delà, l'air léger s'échappe par le bas ; le volume v devient constant et égal à V et c'est la masse m qui décroît ; on aura alors :

$$F = \rho_0 (1 - d) V g - M g$$

ce qui assure la stabilisation car ρ_0 décroît avec l'altitude. Pour remonter, on lâche du lest, pour redescendre on ouvre la soupape ; ici plus besoin de surpression pour que le gaz léger s'échappe. C'est le système le plus souple pour un vol habité.

Je ne crois pas utile d'approfondir plus avant car les notions à manipuler sont relativement simples.

4 Capillarité.

Certains paragraphes nécessitent a priori des connaissances sur les courbures des arcs et des surfaces, mais leur rédaction a été conçue afin qu'une lecture en soit possible sans les posséder.

4.a Energie de surface.

Imaginons, au sein d'un liquide, une molécule au contact de ses proches voisines qui l'attirent par le biais des forces de VAN DER WAALS ; les molécules plus lointaines l'attirent de façon négligeable car ces forces diminuent très rapidement avec la distance. La figure 12

p. 33 montre, en deux dimensions²⁷, à gauche et dessinée en vert, une telle molécule supposée sphérique. L'isotropie de la répartition des proches voisines donne un bilan de forces nul.

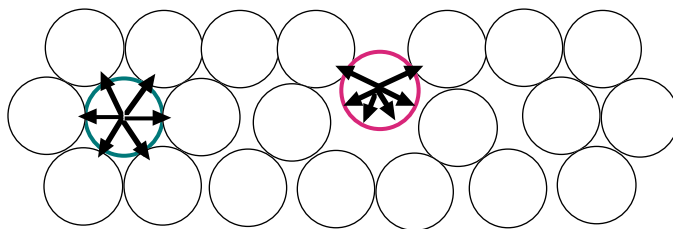


FIGURE 12 – Bilan de forces de Van der Waals.

Imaginons maintenant une molécule (à droite et en rouge) qui se faufile vers la surface ; cette fois le bilan des forces est légèrement vers le bas par la dissymétrie apportée par la surface (beaucoup de molécules en dessous, pratiquement pas au-dessus). Il faudra donc exercer une force au moins opposée pour amener une molécule en surface donc fournir un travail qui sera le même pour chaque molécule amenée en surface.

On conçoit donc l'existence d'une énergie de surface proportionnelle au nombre de molécules en surface. Sur la figure en deux dimensions, il est clair que la longueur de la surface est proportionnelle au nombre de molécules qu'elle contient. A trois dimensions, ce sera son aire qui le sera ; car, en gros, des molécules en contact occupent toutes la même place.

En notant E cette énergie et S l'aire, on aura donc :

$$E = A S$$

où la constante de proportionnalité A s'appelle *constante de capillarité*²⁸ ou *tension*²⁹ *superficielle*.

Remarque : la capillarité dépend de la température, au moins par la dilatation thermique qui écarte les molécules et diminue donc les forces de VAN DER WAALS, parfois aussi, quand les molécules sont polaires, parce que ces forces dépendent elles aussi de la température

4.b Forces de capillarité.

Imaginons qu'un liquide ait une surface rectangulaire de longueur L et de largeur ℓ et que par un dispositif non précisé à ce stade, on fasse passer la longueur à $L+dL$ en déplaçant

²⁷. Ça simplifie le dessin dans sa confection et dans sa lecture.

²⁸. appelée par référence à une conséquence que l'on verra plus loin : l'ascension des liquides dans les vaisseaux capillaires, c'est-à-dire du diamètre d'un cheveu.

²⁹. dans le sens de force, ici de force linéique, cf infra

l'un des petit côtés. L'aire de la surface passe de $L \ell$ à $(L + dL) \ell$ et l'énergie de surface de $A L \ell$ à $A (L + dL) \ell$; il a donc fallu fournir une énergie $A dL \ell$. Quand et comment l'a-t-on fait ? Au moment de la seule action que l'on ait faite à savoir le déplacement d'un côté et ce ne peut être que par l'intermédiaire d'une force F dont le travail sur un déplacement dL est $W = F dL$. Par identification du travail à l'énergie fournie on a donc :

$$F = A \ell$$

donc une force exercée sur un bord de la surface proportionnelle à la longueur. Le raisonnement qui l'introduit sous-entend qu'elle est tangente à la surface et orthogonale au côté considéré. Certains insectes légers ont l'extrémité des pattes hydrofuges; s'ils se posent sur l'eau, celle-ci se creuse sous les pattes et les forces de capillarité, tangentes à la surface sont alors orientées vers le haut ce qui assure la sustentation de l'insecte comme le montre la figure 13 p. 34.



FIGURE 13 – Un insecte sur l'eau.

Remarque 1 : L'expérience est plus aisée à réaliser avec une mince lame d'eau savonneuse déposée sur un fil de fer tordu en forme de U et complété par une autre tige mobile de façon à former un rectangle d'aire variable. Dans ce cas l'aire donc la force sont doublées car la lame (disons qu'elle est horizontale) a deux surfaces l'une au-dessus du liquide et l'autre en dessous.

Remarque 2 : l'unité de tension superficielle peut être indifféremment dénommée joule par mètre carré ($\text{J} \cdot \text{m}^{-2}$) ou newton par mètre ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$); c'est une question de point de vue (énergie surfacique ou force linéique).

Ordres de grandeurs : pour les liquides courants, la tension superficielle est comprise, en ordre de grandeur, entre $10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $10^{-1} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

Ce qui précède reste valable qualitativement si l'on remplace l'air par un autre fluide; la dissymétrie entre milieux suffit à expliquer l'existence d'une force non nulle pour une molécule qui s'approche de la surface de séparation entre les deux fluides, donc justifie l'énergie de surface et les forces de capillarité.

4.c Angles de raccordement.

- Cas de trois fluides.

Il peut s'agir de deux liquides non miscibles et d'un gaz ou de trois liquides non miscibles.

Prenons l'exemple d'une goutte d'huile que l'on dépose délicatement à la surface horizontale d'une grande quantité d'eau ; la goutte d'huile prend une forme bombée à la fois du côté de l'air et du côté de l'eau. Il existe alors une courbe qui encercle la goutte et qui est l'ensemble des points en contact avec les trois fluides. Expérimentalement, cette courbe est un cercle et en chacun de ses points, les trois plans tangents aux trois interfaces (ici eau-air, huile-air et eau-huile) forment entre eux des angles constants et reproductibles, ne dépendant que de la nature des trois fluides et pas du tout de la taille de la goutte. Tous ceci est résumé par la partie supérieure de la figure 14 p. 35 où deux de ces angles sont notés α et β .

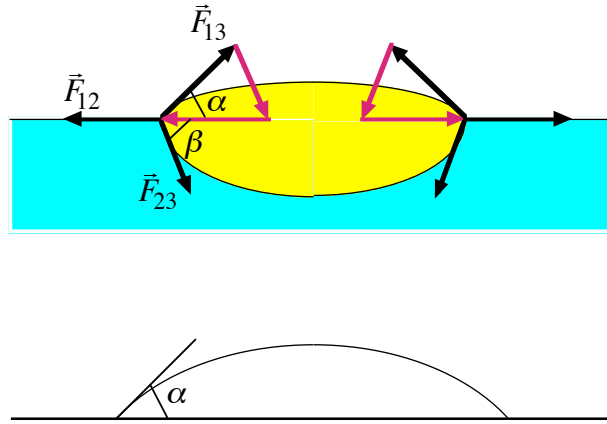


FIGURE 14 – Angles de raccordement.

On peut justifier ainsi ce résultat expérimental : soit une portion infiniment petite et de longueur $d\ell$ de la courbe du contact entre les trois fluides, chacune des trois surfaces qui s'y raccordent exerce sur elle une force de capillarité de module $A d\ell$ mais avec trois valeurs de A différentes et caractéristiques des trois couples de fluides (si l'on numérote 1, 2 et 3 ces fluides, on numérotera 12, 13 et 23 les trois couples). Ces forces sont tangentes aux trois surfaces et orthogonales à la longueur $d\ell$; la figure montre donc ce qui se passe dans un plan perpendiculaire à cette longueur. A l'équilibre, la somme nulle des trois forces (dessinées en noir) conduit donc successivement en introduisant des vecteurs unitaires tangents (notés en $\vec{t}$) aux interfaces :

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \vec{0}$$

$$A_{12} d\ell \vec{t}_{12} + A_{13} d\ell \vec{t}_{13} + A_{23} d\ell \vec{t}_{23} = \vec{0}$$

$$A_{12} \vec{t}_{12} + A_{13} \vec{t}_{13} + A_{23} \vec{t}_{23} = \vec{0}$$

La solution se trouve en traçant un triangle (en rouge sur la figure) dont les trois côtés ont pour longueurs les trois valeurs de tensions superficielles. Or les triangles dont on connaît les trois côtés sont tous identiques, à une rotation et/ou une symétrie près ; donc leur angles sont imposés par cette unicité de construction.

Une démonstration énergétique eût été envisageable (l'équilibre correspond à un minimum d'énergie, cf infra) ; mais ce que l'on obtient après dérivation (pour exploiter la condition minimale) n'est autre que l'équilibre des forces.

Remarque : la courbe qui limite les interfaces est un cercle car c'est la seule façon d'avoir des angles partout identiques par symétrie de révolution.

• Cas d'un liquide au contact avec l'air et un solide.

Un goutte de liquide posée sur un solide prend elle aussi une forme avec symétrie de révolution et au niveau du cercle où elle est en contact avec le solide, l'angle α que fait la surface tangente à l'interface liquide-air et l'interface solide-air est constant (à liquide et matériau du solide donnés). Si $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (comme sur la partie inférieure de la figure 14 p. 35), l'on dit que le liquide *mouille le solide* et si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, qu'il ne le mouille pas.

On peut justifier comme ci-dessus l'existence d'énergies de surface solide-air et solide-liquide mais l'indéformabilité du solide empêche de conceptualiser des forces de capillarité. La condition de raccordement ne peut plus se faire que par des considérations énergétiques. Tenter une démonstration serait un peu lourd et nous admettons donc que l'analogie de situation en tient lieu.

4.d Surfaces minimales.

Nous revenons ici sur le cas d'un seul liquide en contact avec l'air.

Vu du point de vue thermodynamique, il faut ajouter à toutes les fonctions énergétiques classiques (énergie interne U , enthalpie H , énergie libre F et enthalpie libre G) le terme d'énergie de surface $A\Sigma$ (on note ici Σ l'aire de la surface et non S pour éviter la confusion avec l'entropie). A température extérieure donnée et à volume ou pression extérieure donnée, l'énergie libre ou l'enthalpie libre évolue spontanément vers un minimum (cf dans le cours de thermodynamique, le chapitre E-V sur les potentiels thermodynamiques) donc vers une surface minimale.

Si pour un couple de liquides non miscibles de même masse volumique (en pratique l'un est un mélange pour arriver à cette égalité) de façon que les effets de pesanteur soient compensés exactement par la poussée d'ARCHIMÈDE ; une goutte de l'un versée dans l'autre prend une forme qui, à volume donné, offre la plus petite surface ; il s'agit d'une sphère.

Si avec un matériel pour bulles d'eau savonneuse, on assujettit une lame mince du

liquide miracle à une armature métallique, la lame s'organise de façon à offrir la surface minimale. Un premier exemple classique consiste à accrocher une telle lame mince d'eau savonneuse entre deux cercles concentriques, la surface minimale est de révolution et dans le plan méridien, l'équation de la courbe fait intervenir un cosinus hyperbolique ; il s'agit d'une *caténoïde*. Le prouver logiquement nécessite des connaissances approfondies sur les notions de courbure d'une surface et cela cesse d'être de la physique ; en fait la nature « trouve » spontanément la solution d'un problème mathématique compliqué³⁰.

Parfois, la surface minimale est formée de plusieurs nappes ; le sujet a été étudié par le physicien belge Joseph PLATEAU au XIX^e siècle et il a montré que lorsque trois nappes se rencontrent sur une courbe les trois plans tangents aux trois nappes en un point de cette courbe forment deux à deux un angle de 120° et que lorsque quatre nappes se rencontrent en un point, les quatre courbes qui se rencontrent en ce point ont des tangentes qui forment deux à deux un angle de 109° soit une géométrie tétraédrique. Là encore, la nature trouve toute seule et sans calcul la solution et nul doute que J. PLATEAU avait observé cette solution avant de la prouver ; ce qui lui a simplifié la tâche sans pour autant rien enlever à son mérite car une des deux démarches-types du physicien est de trouver la loi dont on puisse déduire mathématiquement le résultat expérimental (voir le chapitre sur les méthodes de la physique).

J'ai renoncé, en mon âme et conscience, à démontrer les résultats précédents (caténoïde et surfaces de PLATEAU) pour deux raisons : cela nécessiterait une longue et lourde digression mathématique et surtout cela détruirait à jamais toute la poésie qu'il peut y avoir dans une bulle de savon.

4.e Coalescence.

Imaginons deux gouttes de rayons suffisamment petits pour que les phénomènes de pesanteur (proportionnels au volume donc au cube du rayon) soient négligeables devant ceux de capillarité (proportionnels à la surface donc au carré du rayon) ; elles sont donc sphériques pour avoir une forme minimale (cf supra). Notons a_0 le rayon de la première et $a_1 = \xi a_0$ celui de la seconde.

L'énergie de surface totale est :

$$E = E_0 + E_1 = A S_0 + A S_1 = 4 \pi A (a_0^2 + a_1^2) = 4 \pi a_0^2 A (1 + \xi^2)$$

Mettons-les en contact et envisageons qu'elles puissent fusionner en une goutte unique de rayon a_2 . La conservation de la masse donc du volume (liquide incompressible) impose successivement :

$$\begin{aligned} \frac{4 \pi}{3} a_2^3 &= \frac{4 \pi}{3} a_0^3 + \frac{4 \pi}{3} a_1^3 \\ a_2^3 &= a_0^3 + a_1^3 = a_0^3 (1 + \xi^3) \end{aligned}$$

30. En l'occurrence celui-ci a été élucidé par Euler.

$$a_2 = a_0 (1 + \xi^3)^{\frac{1}{3}}$$

et l'énergie de surface serait :

$$E' = A S_2 = 4 \pi A a_2^2 = 4 \pi a_0^2 A (1 + \xi^3)^{\frac{2}{3}}$$

Comparer E et E' pour savoir si la surface minimale correspond aux deux gouttes de départ ou à la goutte unique revient, après simplification, à comparer $(1 + \xi^2)$ et $(1 + \xi^3)^{\frac{2}{3}}$ ou encore à comparer les cubes de ces expressions $(1 + \xi^2)^3$ et $(1 + \xi^3)^2$, c'est à dire après développement $1 + 3\xi^2 + 3\xi^4 + \xi^6$ et $1 + 2\xi^3 + \xi^6$ dont la différence $3\xi^4 - 2\xi^3 + 3\xi^2$ est du signe de $3\xi^2 - 2\xi + 3$, binôme de discriminant négatif donc de signe constant, positif ici. La réunion des deux gouttes en une seule, plus grosse, en est la conclusion thermodynamique ; il s'agit du phénomène de *coalescence*.

4.f Formule de Laplace.

• La bulle de savon.

Soit une mince bulle d'eau savonneuse (ou bulle de savon dans un raccourci audacieux) sphérique (cf supra) de rayon intérieur r et de volume intérieur $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, de rayon extérieur $r' \approx r$ et de volume extérieur $V' = \frac{4}{3} \pi r'^3$ avec, puisque le liquide est quasiment incompressible, $V' - V = Cte$.

Supposons que la pression intérieure p_i augmente légèrement de sorte que r varie de dr et V de $dV = 4 \pi r^2 dr$; les forces de pression intérieures, ici dirigées vers l'extérieur, fournissent un travail $\delta W_i = p_i dV$ (cf thermodynamique au signe près car la force pressante est vers l'extérieur). De même, les forces de pression extérieures, liées à la pression extérieure p_e , fournissent un travail $\delta W_e = -p_e dV'$, avec $dV' = dV$ car $V' - V = Cte$. Le travail total fourni est donc :

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e = (p_i - p_e) dV = 4 \pi (p_i - p_e) r^2 dr$$

Ce travail s'identifie (cf supra) à l'augmentation dE d'énergie de surface E somme de l'énergie de surface interne, soit $AS = 4 \pi A r^2$ et de l'énergie de surface externe, soit $AS' = 4 \pi A r'^2 \approx 4 \pi A r^2$, d'où :

$$dE = d(8 \pi A r^2) = 16 \pi A r dr$$

Par identification de dE et δW on en déduit :

$$p_i - p_e = \frac{4 A}{r}$$

ce qui montre qu'il faut créer une surpression pour créer une bulle, ce qui n'est certes pas un scoop³¹, mais ce qui permet aussi de la chiffrer.

31. en new french.

- **Un paradoxe classique**

Si à l'aide d'un robinet à trois voies, on crée, à pression extérieure donnée, une petite bulle au bout d'un premier tuyau puis une grosse au bout d'un second et puis enfin si l'on met en communication leurs intérieurs, il y aura un courant d'air de la grande pression intérieure vers la petite donc de la petite bulle vers la grande (loi en $\frac{1}{r}$) et c'est la petite bulle qui se dégonfle au profit de la grande et ce jusqu'à disparition de la petite car l'évolution des deux rayons ne fait qu'aggraver les choses.

Au vu de cette loi, les différents alvéoles³² d'un poumon sont instables ; en généralisant ce qui précède aux alvéoles pris deux à deux, tous sauf le plus grand doivent se vider dans celui-ci. La nature qui a plus d'un tour dans son sac³³ a recouvert les bronches et bronchioles d'un mucus très visqueux qui bloque les échanges inter-alvéoles et contrecarre ainsi cette instabilité.

- **La formule de Laplace.**

Soit la surface, supposée non plane, d'un liquide en contact avec l'air, un point O de cette surface et son plan tangent en O . Imaginons une surface élémentaire se projetant sur le plan tangent en O en un rectangle de centre O et dont les côtés ont pour longueur 2ℓ et $2L$ (voir l'encart en bas à gauche de la figure 15 p. 39).

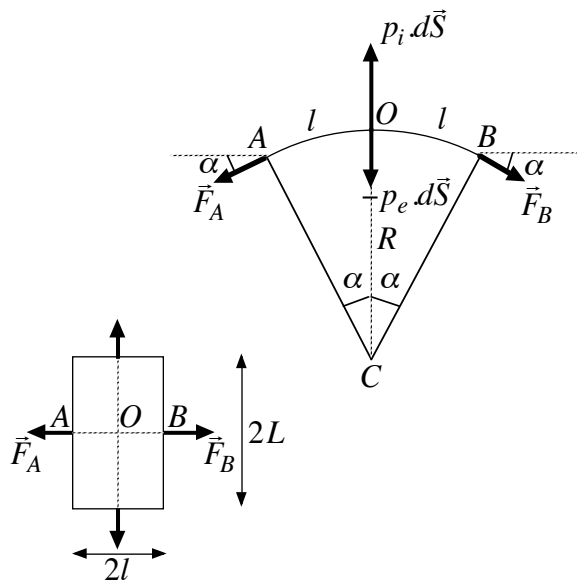


FIGURE 15 – Formule de Laplace.

32. « Alvéole » est masculin.

33. mais elle met un bon million d'années pour trouver un de ces tours.

Sur les côtés de longueurs $2L$ de milieux A et B s'exercent deux forces de capillarité $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ de modules $A(2L)$ (cf supra), tangentes à la surface et normales aux côtés. La figure 15 p. 39 tracée dans le plan normal en O à la surface et passant par les points A et B (avec le liquide en bas) montre que ces forces pointent vers la concavité de l'arc AOB intersection de ce plan avec la surface et forment un petit angle α avec le plan tangent en O . La projection de chacune de ces forces sur la normale en O à la surface, orientée du liquide vers l'air, est donc $-2AL \sin \alpha \approx -2AL\alpha$. L'arc AOB se confond à très bonne approximation à son *cercle osculateur*³⁴ de centre C et de rayon R que l'on comptera positivement si la concavité est vers le liquide, comme sur la figure, et négativement si c'est vers l'air. La figure montre que $\ell = R \tan \alpha \approx R\alpha$; la somme des deux projections de forces est donc $-4AL \frac{\ell}{R} = -A \frac{S}{R}$ où $S = 4\ell L$ est l'aire de la surface élémentaire étudiée.

De la même façon, sur les deux autres côtés s'exercent deux forces de module $2A\ell$ formant avec le plan tangent un angle $\beta \approx \frac{L}{R'}$ avec un nouveau rayon de courbure R' algébrique qui n'a aucune raison d'être égal à R (penser par exemple à une surface cylindrique où le « rectangle » aurait un côté circulaire et l'autre rectiligne). La somme des deux nouvelles projections est alors $-A \frac{S}{R'}$ et la somme des quatre est $-AS \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$.

La surface sans épaisseur donc sans masse (à la rigueur la masse négligeable d'une couche atomique, celle concernée par les forces de VAN DER WALLS responsables de la capillarité), qu'elle soit à l'équilibre ou en mouvement, a selon les lois de la dynamique un bilan de forces nul, ce qui est en apparence contradiction avec la formule qui vient d'être établie. Certes elle est vérifiée si $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ est nul, mais il est des cas expérimentaux flagrants où ce n'est pas le cas, comme la bulle de savon qui nous donne la piste à explorer, celle d'une discontinuité de pression. Si la pression côté liquide est p_i (pression intérieure) et celle côté air p_e (extérieure), on rajoute deux forces normales dont les projections algébriques sont $p_i S$ et $-p_e S$. En projection et après simplification par S , le bilan nul conduit à la *formule de LAPLACE* :

$$p_i - p_e = A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

Remarque : R et R' sont les rayons de courbures de deux arcs orthogonaux tracés sur la surface et passant par O ; si l'on change la direction de l'un donc de l'autre, les rayons R et R' varient mais bien sûr pas $p_i - p_e$ donc pas non plus la grandeur $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ qui est appelée *courbure* de la surface en O . Cette propriété d'invariance se démontre mathématiquement, mais la physique le pressent sans avoir à le démontrer.

34. littéralement, le cercle qui donne des baisers. Pour toutes les courbes (deux fois dérivables) passant par le même point O et y admettant la même tangente, en particulier l'arc AOB et les cercles centrés sur sa normale en O , si l'on s'écarte de ε du point O , l'écart entre la courbe et le plan tangent, donc aussi entre les courbes est classiquement de second ordre en ε^2 . Pour une position particulière du centre l'écart entre l'arc AOB et le cercle, cet écart est d'ordre trois en ε^3 ; c'est le centre de courbure, le cercle correspondant est dit osculateur, son rayon est le *rayon de courbure* et l'inverse de ce rayon la *courbure*.

4.g Forme d'un liquide pesant en contact avec un solide. Loi de Jurin.

- Ascension d'un liquide le long d'une paroi plane verticale.

Imaginons un liquide contenu dans un récipient limité par des parois verticales de grande largeur. En l'absence de capillarité, les lois de l'hydrostatique prévoient que le liquide a une surface horizontale qui se raccorde donc orthogonalement aux parois. La capillarité prévoit (cf supra), elle, un raccordement avec un angle donné, noté ici α_0 . Dans le cas d'un liquide qui mouille solide des parois, la contradiction est levée par son ascension sur les parois aux bords de la surface plane ; pour un liquide qui ne mouille pas la paroi, la surface plane se creuse à ses bords.

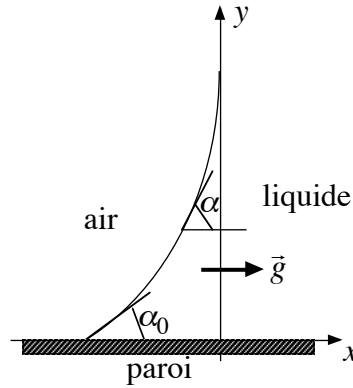


FIGURE 16 – Ascension d'un liquide mouillant le long d'une paroi.

La figure 16 p. 41 montre l'ascension d'un liquide mouillant le long d'un paroi. Pour utiliser aisément les formules mathématiques classiques, l'axe vertical *descendant* est noté Ox et est dessiné *horizontalement* ; la paroi verticale est le plan Oxz suffisamment large pour qu'il y ait invariance selon Oz ; la surface libre hydrostatique aurait dû être le plan horizontal Oyz mais a une équation $y = f(x)$ que nous nous proposons de rechercher.

Pour $x = 0$ et y grand, on retrouve asymptotiquement la surface plane hydrostatique pour laquelle la pression est continue (cf formule de LAPLACE) et est égale à la pression atmosphérique que nous noterons p_0 . La pression au sein du liquide de masse volumique ρ suit les lois de l'hydrostatique et vaut donc $p(x) = p_0 + \rho g x$ tandis que la pression au sein de l'air est quasiment uniforme et égale à p_0 . En un point quelconque de la surface, d'abscisse x , la différence des pressions est donc $\rho g x$ qui s'identifie à $A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$ (formule de LAPLACE). Par ce point, les deux courbes orthogonales qu'il est pertinent de tracer dans le plan tangent sont d'une part la courbe de la figure, tracée dans un plan $z = Cte$, de rayon de courbure R compté ici négativement (concavité vers l'air) et d'autre part une droite parallèle à Oz (invariance selon Oz) de rayon de courbure R' infini. On peut donc affirmer :

$$\rho g x = \frac{A}{R}$$

◦ **Approche abscisse-angle.**

On rappelle qu'entre deux points M et M' d'une courbe de coordonnées (x, y) et $(x + dx, y + dy)$, la longueur MM' , notée ds , est égale à $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ et permet par intégration de trouver la longueur d'un arc et que la longueur d'un arc en un point choisi comme origine et un point quelconque est l'*abscisse curviligne*. Enfin, si α désigne l'angle entre Ox et la tangente à la courbe en un point M , direction limite de MM' , on a à l'évidence $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$, $\cos \alpha = \frac{dx}{ds}$ et $\sin \alpha = \frac{dy}{ds}$.

On admet l'une des formules donnant la courbure d'une courbe plane : $\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$ qui donne un résultat positif si la concavité est vers le haut, soit la convention inverse de la précédente ; on a donc :

$$\rho g x = -A \frac{d\alpha}{ds}$$

et, en combinant avec $dx = ds \cos \alpha$, on sépare les variables en :

$$\rho g x dx = -A \cos \alpha d\alpha$$

Par intégration avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$ pour $x = 0$, on tire :

$$\frac{1}{2} \rho g x^2 = A (1 - \sin \alpha)$$

En particulier, le point de raccordement avec la surface (manifestement négatif, ce qui correspond, avec le choix d'un axe descendant, à une ascension) d'angle imposé α_0 est en :

$$x_0 = -\sqrt{\frac{2 A (1 - \sin \alpha_0)}{\rho g}}$$

Par exemple, pour l'eau ($A \sim 7 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$) pour laquelle, selon la nature du solide, α_0 peut varier de 0 à 45 degrés (rarement plus) d'où $(1 - \sin \alpha_0)$ de 0,3 à 1 donc de l'ordre de 0,65 (on prend la moyenne des valeurs extrêmes), on trouve une ascension de l'ordre de trois millimètres.

◦ **Approche abscisse-ordonnée.**

Nous venons de trouver un lien entre α , angle que fait la tangente à la courbe d'équation $y(x)$ et l'axe des x , et l'abscisse x ; c'est certes intéressant mais cela ne nous donne pas l'équation de cette courbe. Poursuivons grâce à la propriété classique de la dérivée d'une fonction, à savoir $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$. La relation trouvée ci-dessus et $\frac{1}{2} \rho g x^2 = A (1 - \sin \alpha)$ et il nous fait donc lier $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$. On se sert des relations trigonométriques classiques $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha$ et $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$, d'où, en agitant le tout :

$$1 - \frac{\rho g x^2}{2 A} = \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1 - \frac{\rho g x^2}{2A}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\rho g x^2}{2A}\right)^2}}$$

et la suite relève en fait de méthodes numériques, ce qui ne nous empêche pas de considérer le problème comme résolu.

Remarque : de façon générale les relations suivantes, établies pour une courbe plane (cf supra), $\frac{dy}{ds} = \tan \alpha$, $\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$ et $dx = ds \cos \alpha$ conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = \cos \alpha \frac{d\alpha}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \frac{d}{dx} \left[\arctan \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] = \dots \\ \dots &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{y''}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

formule ultra-classique mais dont l'usage direct eût été plus difficile à gérer.

• Goutte posée sur un plan.

◦ *Cas général.*

La figure 17 p. 44, avec la même convention pour les axes que la précédente mais dessinée dans l'orientation naturelle, montre une goutte liquide posée sur un plan horizontal. L'angle de raccordement est noté ici β_0 que l'on a pris, pour changer, supérieur à $\frac{\pi}{2}$ (liquide non mouillant). L'invariance des données du problème par rotation autour d'un axe vertical permet d'affirmer que la goutte aura une symétrie de révolution.

Le même raisonnement que précédemment conduit encore à :

$$\rho g x = A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

mais cette fois R' (voir sa signification plus haut) n'est plus infini. Les mathématiciens, qui sont gens serviables, démontrent la propriété suivante : pour la courbe considérée relative au point M de la surface, le centre de courbure C se trouve à l'intersection de la normale au plan tangent (évidemment) et de l'axe de symétrie de révolution. En introduisant la projection K de M sur l'axe, on a donc :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{MC} = \frac{\cos \alpha}{MK} = \frac{\cos \alpha}{y} = \frac{1}{y \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{y \sqrt{1 + y'^2}}$$

La relation $\rho g x = A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$ devient donc, en y réinjectant aussi un résultat précédent :

$$\frac{\rho g x}{A} = \frac{y''}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y [1 + y'^2]^{\frac{1}{2}}}$$

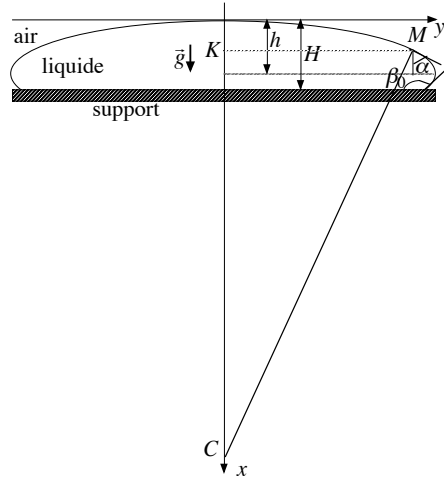


FIGURE 17 – Goutte posée sur un plan.

qu'on ne pourra espérer résoudre que par des voies numériques. Comme il s'agit d'une équation différentielle d'ordre deux, il faut donner deux renseignements, l'un est mathématiquement et physiquement naturel : l'angle de raccordement, l'autre est physiquement naturel mais difficile à exploiter mathématiquement : le volume total de liquide.

◦ *Cas de la goutte large.*

Lorsque le rayon maximal de la goutte est grand devant sa hauteur, on peut négliger R devant R' donc $\frac{1}{R'}$ devant $\frac{1}{R}$. On est donc ramené formellement au cas de l'ascension d'un liquide sur une paroi plane verticale (cf supra) ; il faut juste faire attention que l'angle de raccordement β_0 n'est plus la valeur limite de α à cause du changement d'orientation du plan solide et que les positions relative liquide/air sont inversées. On se convaincra aisément que les résultats antérieurs se modifient ainsi :

- la hauteur h entre le sommet de la goutte (correspondant à $\alpha = 0$) et sa section la plus large (correspondant à $\alpha = 0$) est $h = \sqrt{\frac{2A}{\rho g}}$ (qui donne une méthode élégante de mesure de la tension superficielle A)
- la hauteur H entre le sommet de la goutte (correspondant à $\alpha = 0$) et le support (correspondant à $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta_0$) est $h = \sqrt{\frac{2A(1+\cos \beta_0)}{\rho g}}$

Remarque : Une goutte large est finalement une goutte de grand volume qui présente en son sommet une face quasiment plane qui ne commence à s'incurver notablement que près de ses bords. Des deux renseignements évoqués plus haut, le seul sur lequel, pour un liquide et un solide donnés, on puisse jouer est le volume total et c'est bien lui qui fera la distinction entre une petite goutte et une large goutte.

- **Le compte-gouttes.**

Une variante de ce qui précède est le compte-gouttes. La figure 18 p. 45 est la même que la précédente mais la goutte est au-dessous du support solide, percé d'un mince conduit relié à un réservoir qui alimente la goutte par gravité. La volume de la goutte, qui est (cf supra) un des paramètres de la résolution du problème, croît donc la forme de la goutte varie ; au début on a la forme de gauche et à la fin la forme de droite.

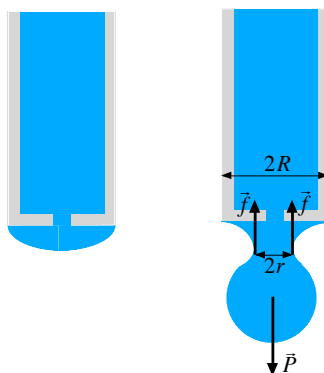


FIGURE 18 – Compte-gouttes.

Pour la forme de droite avec un étranglement de rayon r , si l'on considère comme système la masse de liquide sous le plan de l'étranglement, il est soumis à son poids mg vers le bas et aux forces de capillarité $A\ell$ vers le haut où ℓ est la circonférence du cercle de rayon r . Il est raisonnable de penser que si le poids est supérieur aux force de capillarité, alors la goutte se détache. La masse d'une goutte qui se détache est donc, dans ce modèle :

$$m = \frac{2\pi r A}{g}$$

mais cette formule n'est pas directement exploitable car r varie pendant la phase de croissance de la goutte. On peut toutefois deviner que la valeur critique de r au moment où la goutte se détache est liée au rayon a du disque qui forme la base du compte-gouttes et, à défaut de pouvoir mener une étude mathématique explicite, on peut se rabattre sur une série d'expérience, lesquelles prouvent que r est à peu près proportionnel à a . En notant $r = k a$ (pour l'eau k est voisin de 0,6), on a donc :

$$m = \frac{2\pi k a A}{g}$$

ce qui permet de fabriquer, pour un liquide donné³⁵, de fabriquer des compte-gouttes donnant des gouttes calibrées.

35. Ma fille est élève-infirmière et apprend que les compte-gouttes qui délivrent des solutions aqueuses et ceux qui délivrent des produits sanguins ont des gouttes de volumes différents car la tension superficielle n'est pas la même ; c'est essentiel à savoir pour une perfusion.

• **Loi de Jurin.**

La figure 19 p. 46 montre un liquide non mouillant (typiquement du mercure) d'angle de raccordement noté ici $\pi - \alpha$ dans un tube cylindrique capillaire, c'est-à-dire de rayon r inférieur au millimètre. Les différences de niveau entre le haut de la surface libre et ses bords est suffisamment petite pour considérer que la pression intérieure au niveau de cette surface est quasiment constante (cf hydrostatique) ; la pression extérieure, celle de l'air l'est aussi, ainsi la différence de pression et donc la courbure de la surface, ce qui milite pour une surface sphérique de rayon R . Un peu de trigonométrie élémentaire donne $R = \frac{r}{\cos \alpha}$ et la loi de LAPLACE conduit à la loi de JURIN³⁶ :

$$\Delta p = p_i - p_e = \frac{2A}{R} = \frac{2A \cos \alpha}{r}$$

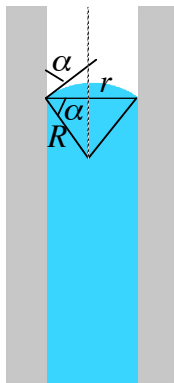


FIGURE 19 – Goutte posée sur un plan.

De par sa conception fondée sur les lois de l'hydrostatique, un baromètre à mercure (voir plus haut, bien plus haut) mesure p_i et non p_e et donne donc une erreur systématique de $\frac{2A \cos \alpha}{r}$. Avec, par exemple, $r = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ et, pour le mercure dans du verre, $A \sim 0,5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\cos \alpha \sim 0,7$, on en tire $\Delta p \sim 700 \text{ Pa}$, ce qui correspond à une hauteur de mercure $h = \frac{\Delta p}{\rho g}$, soit avec $g \sim 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\rho \sim 14 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ donne une erreur systématique de l'ordre de 5 millimètres de mercure. C'est loin d'être négligeable et il importe d'en tenir compte.

³⁶. James JURIN, médecin et physicien anglais (on prononce donc vraisemblablement « djourine ») 1684–1750, essentiellement connu pour cette loi.