Chapitre B-XV

Ondes sonores dans les fluides. Ondes de surface.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Après avoir défini l'approximation acoustique, on montre que les petites déformations d'un milieu fluide vérifient des équations de propagation couplées entre la vitesse et la pression. On vérifie que la gravité est sans influence même dans le cas d'un liquide. On retrouve les problématiques classiques des ondes : réflexion et transmission, ondes stationnaires avec de nombreux exemples musicaux sur les instruments à vents.

Les ondes à la surface d'un liquide sont d'abord étudiées dans le modèle simple de Saint-Venant, puis dans un cadre plus général. On étudie ainsi les ondes de gravité, les rides capillaires, leur génération par le vent (instabilité de Kelvin-Helmholtz). On profite de l'occasion pour comparer pour comparer le sillage de Mach (acoustique) et le sillage de Kelvin (surfacique).

Table des matières

B-XV Ondes sonores dans les fluides. Ondes de surface. 1

1 Onde sonores dans les fluides. 4

1.a La situation de référence. 4

1.b Paramétrage et approximation acoustique. 5

1.c Les équations disponibles. 5

1.d L'équation de propagation. 7

1.e Influence de la gravité dans le cas d'un liquide. 9

1.f Ondes sonores planes progressives sinusoïdales. 10

1.g Aspects énergétiques. 11

1.h Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux. 15

1.i Tuyaux sonores cylindriques, coniques, exponentiels. 21

1.j Sillage de Mach. 33

2 Ondes de surface en faible profondeur. Modèle de Saint-Venant. 34

2.a Le modèle de Saint-Venant. 34

2.b Ondes de surface. 35

3 Ondes de surface : la houle. 41

3.a Houle de gravité. 41

3.b Rides de capillarité. 48

3.c Génération de la houle par le vent : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. 49

3.d Sillage de Kelvin 53

La lecture de ce chapitre suppose la lecture préalable du chapitre D-II concernant les ondes progressives et stationnaires et D-IV concernant l'absorption et la dispersion (physique ondulatoire) et A-VI qui traite des bilans dans un volume de contrôle.

1 Onde sonores dans les fluides.

1.a La situation de référence.

En 1672, Otto von Guericke prouvait que le son nécessite un milieu matériel (l'air en l'occurence) pour se propager en enfermant une sonnette sous une cloche dans laquelle il réalisa un vide poussé (pour l'époque).

Il s'agit donc pour nous de comprendre puis de mettre en équation la propagation d'une perturbation dans un fluide. Imaginons que quelqu'un ferme violemment une porte. La couche d'air située entre la porte et la couche d'air suivante, immobile par inertie, voit son volume diminuer donc sa pression augmenter ; elle va donc pousser la seconde couche restée à la pression initiale et se comporter vis à vis d'elle comme une porte qui claque. On comprend dès lors que de proche en proche la perturbation va se propager. On comprend aussi que les paramètres pertinents sont thermodynamiques : pression, volume (ou mieux masse volumique).

Considérons l'air au repos. Sa masse volumique est notée μ_0 et sa pression p_0. Un premier problème se pose : ces paramètres dépendent de l'altitude via la loi fondamentale de l'hydrostatique. Faut-il en tenir compte ?

Dans l'air atmosphérique, on sait que la pression varie de façon significative sur une hauteur caractéristique H valant plusieurs kilomètres. Il suffit qu'une longueur caractéristique du phénomène acoustique soit petite devant H pour qu'on puisse considérer la pression comme uniforme et donc négliger la pesanteur. Pour un phénomène sinusoïdal, il suffira donc que sa longueur d'onde soit petite devant H.

Or, inutile d'en faire mystère, la vitesse du son dans l'air est voisin de 340 m/s [1] donc pour la fréquence où l'ouïe est la plus fine (4 kHz) la longueur d'onde est 85 mm, notre approximation est légitime.

Pour l'eau où la pression double en 10 m et où la vitesse du son est plus élevée, on est à la limite mais on y reviendra plus loin : la comparaison avec la longueur d'onde n'est en effet pas la plus pertinente.

1. Rappelez-vous, dans votre prime jeunesse, on vous a expliqué comment mesurer la distance en kilomètres du point de chute de la foudre : compter le nombre de secondes entre l'éclair et le tonnerre et diviser par trois.

1.b Paramétrage et approximation acoustique.

En présence d'une perturbation, les champs de pression, de masse volumique et de vitesse dépendent du temps et de l'espace. Ecrivons-les sous forme de la somme du champ de référence et d'un terme correctif, soit :

$$p(M,t) = p_0 + p_1(M,t)$$

$$\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$$

$$\overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{v}_1(M,t) = \overrightarrow{v}_1(M,t)$$

en n'oubliant pas que $\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{0}$ car, dans la situation de référence, l'air est au repos.

Il est d'usage d'appeler p_1 et $\overrightarrow{v}_1$ respectivement *pression acoustique* et *vitesse acoustique* ; par contre μ_1 n'est habituellement baptisé.

L'approximation acoustique consiste à traiter p_1, μ_1 et $v_1 = \|\overrightarrow{v}_1\|$ comme des infiniment petits et de négliger tous les termes d'ordre deux ou plus qui apparaîtront. Les négliger, oui mais par rapport à quoi ? Pour p_1 et μ_1, c'est clairement devant p_0 et μ_0, pour v_1, on verra le moment venu, même si l'on se doute que c'est devant la vitesse du son. On verra a posteriori que ces approximations sont largement légitimes.

1.c Les équations disponibles.

Conservation de la masse.

Elle se traduit, on le sait, par :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu\, \overrightarrow{v}) = 0$$

soit

$$\frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} + \operatorname{div}[(\mu_0 + \mu_1)\, \overrightarrow{v}_1] = 0$$

soit, avec $\mu_0 = Cte$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div}(\overrightarrow{v}_1) + \operatorname{div}(\mu_1\, \overrightarrow{v}_1) = 0$$

Le troisième terme fait intervenir deux grandeurs d'ordre un, il est d'ordre deux et on le néglige ; il reste donc :

$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \operatorname{div}(\overrightarrow{v}_1) = 0} \qquad \text{(équation 1)}$$

Equation d'EULER

Aux fréquences habituelles, la période du phénomène est petite devant l'échelle de temps des phénomènes diffusifs comme la viscosité, l'écoulement peut donc être considéré comme parfait. On a donc aussi, en négligeant (cf supra) l'effet de la pesanteur :

$$\mu \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\, \overrightarrow{v} \right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p$$

soit

$$(\mu_0 + \mu_1) \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\, \overrightarrow{v}_1 \right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, (p_0 + p_1)$$

Le terme d'accélération convective $(\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\, \overrightarrow{v}_1$ est d'ordre deux, on le néglige ; de même le produit $\mu_1 \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t}$; enfin $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p_0$ est nul car p_0 est uniforme. Il reste donc :

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p_1} \qquad \text{(équation 2)}$$

Remarquons que, pour une onde plane en $(\omega\, t - k\, x)$, l'accélération convective $(\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\, \overrightarrow{v}_1$ est négligeable devant $\frac{\partial v_1}{\partial t}$ si, en ordre de grandeur, $v.k.v$ est négligeable devant $\omega\, v$, soit si v est négligeable devant la vitesse de phase $\frac{\omega}{k} = v_\varphi$ (voir le chapitre D-II sur les ondes propagatives) ; c'est ce que nous avions pressenti plus haut.

Equation thermodynamique

La conduction thermique est un autre phénomène diffusif ; on la néglige aussi pour les mêmes raisons, ce qui revient à considérer les transformations du fluide comme adiabatiques. De plus les gradients de pression et de température vont rester faibles, on ne s'éloignera guère de l'équilibre et les transformations seront donc pratiquement réversibles. L'hypothèse isentropique est donc raisonnable. La donnée de la fonction entropie du fluide donne accès à sa *compressibilité isentropique* définie [2] par :

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S$$

Dans une transformation isentropique, on a donc :

$$\mathrm{d}\mu = \mu\, \chi_S\, \mathrm{d}p$$

Divisons par la durée dt de cette transformation élémentaire en notant que tacitement, le système est une masse élémentaire de fluide donnée, qu'on suit dans ses transformations

2. Puisque $\mu = m/V$, donc que $\ln \mu = \ln m - \ln V$, en prenant la différentielle avec m constante, $\mathrm{d}\mu/\mu = -\mathrm{d}V/V$, ce qui justifie l'égalité entre les deux formulations ci-dessous.

mais aussi, par obligation, dans ses *déplacements* ; on est par essence dans un point de vue lagrangien et il apparaît donc une dérivée particulaire, d'où :

$$\frac{D\mu}{Dt} = \mu\,\chi_S\,\frac{Dp}{Dt}$$

soit

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\,\mu = \mu\,\chi_S\,\left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\nabla})\,p\right)$$

soit

$$\frac{\partial(\mu_0+\mu_1)}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,(\mu_0+\mu_1) = (\mu_0+\mu_1)\,\chi_S\,\left(\frac{\partial(p_0+p_1)}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,(p_0+p_1)\right)$$

Faisons disparaître les dérivées des grandeurs constantes :

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,\mu_1 = (\mu_0+\mu_1)\,\chi_S\,\left(\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla})\,p_1\right)$$

Les termes en $\overrightarrow{v}_1.\overrightarrow{\nabla}$ appliqués à p_1 et μ_1 sont d'ordre deux, ainsi que $\mu_1\,\chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t}$; on les néglige, il reste donc :

$$\boxed{\frac{\partial\mu_1}{\partial t} = \mu_0\,\chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t}} \qquad \text{(équation 3)}$$

1.d L'équation de propagation.

Si l'on reporte[3] l'équation 3 dans l'équation 1 et qu'on simplifie par μ_0, on obtient avec l'équation 2 le système suivant :

$$\begin{cases} \chi_s\,\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{v}_1 = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1 + \mu_0\frac{\partial\overrightarrow{v}_1}{\partial t} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

qui fait apparaître mathématiquement le couplage mis en évidence physiquement plus haut. Physiquement, on voit qu'une compression (divergence de la vitesse non nulle) entraîne une variation de pression (dont la dérivée temporelle est donc non nulle) et de même un bilan non nul des forces de pression (gradient non nul) provoque une accélération.

On élimine ainsi la vitesse grâce au théorème de Schwartz, d'où successivement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\overrightarrow{v}_1 = \mathrm{div}\frac{\partial\overrightarrow{v}_1}{\partial t}$$

$$-\chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1)$$

3. certes pour éliminer μ_1 et se ramener à deux paramètres mais surtout parce que par intégration de l'équation 3 avec $p_1 = 0$ quand $\mu_1 = 0$ (état de référence) on tire $\mu_1 = \mu_0\,\chi_S\,p_1$ et l'on aurait tort de ne pas exploiter cette proportionnalité.

$$\mu_0\,\chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \Delta p_1$$

On reconnaît une équation de propagation tridimensionnelle où la célérité, appelée ici vitesse du son, est définie par :

$$V_{son}^2 = \frac{1}{\mu_0\,\chi_S}$$

Pour alléger l'exposé nous noterons $c^2 = \frac{1}{\mu_0\,\chi_S}$ (vu le contexte, on ne confondra pas avec la vitesse de la lumière).

Cette célérité est indépendante de la pulsation ; il en résulte que vis à vis des ondes sonores, les fluides sont des milieux non dispersifs (voir le chapitre D-IV traitant, entre autres, de la dispersion).

• Ordres de grandeur.

◦ *Liquides.*

Pour un liquide, la compressiblité isentropique et la compressibilité isotherme sont quasiment confondues, elles ne dépendent quasiment pas ni de la pression, ni de la température, mais aucun modèle simple ne permet de calculer leur valeur, il s'agit donc essentiellement d'un résultat expérimental. Par rapport à un gaz, on sait bien qu'un liquide se comprime très difficilement, donc que sa compressibilité est bien plus faible, par contre sa masse volumique est de l'ordre de mille fois plus élevée ; ces deux phénomènes se compensent partiellement dans la formule définissant la célérité du son, on ne s'étonnera donc pas de trouver des valeurs du même ordre de grandeur entre vitesse du son dans les gaz et dans les liquides, surtout que la racine carrée écrase les écarts.

Pour l'eau, on a $\mu_0 = 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3} et $\chi_S = 5.10^{-10}$ Pa^{-1}, d'où $c = 1,4.10^3$ m $\cdot$ s^{-1}.

◦ *Gaz.*

Dans le modèle le plus simple du gaz parfait, une évolution isentropique est gérée par la relation de Laplace $p\,V^\gamma = Cte$, soit $\ln p + \gamma\,\ln V = Cte$ d'où, en différentiant $\mathrm{d}p/p + \gamma\,\mathrm{d}V/V = 0$ et :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{\gamma\,p} \approx \frac{1}{\gamma\,p_0}$$

Par ailleurs l'équation d'état $p\,V = n\,R\,T = \frac{m}{M}\,R\,T$ entraîne :

$$\mu_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{M\,p_0}{R\,T_0}$$

d'où :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma\,R\,T_0}{M}}$$

Pour l'air ($M = 29.10^{-3}$ kg $\cdot$ mol^{-1} et $\gamma = 1,4$) à 300 K, on a $c = 347$ m $\cdot$ s^{-1}.

1.e Influence de la gravité dans le cas d'un liquide.

Revenons plus en détail sur l'influence de la gravité dans le cas d'un liquide car notre première approche la suspectait non négligeable.

La pression de référence dépend cette fois de la profondeur. Avec un axe des z vertical descendant et une pression égale à la pression atmosphérique p_a et une masse volumique quasiment constante μ_0, on a :

$$p_0(z) = p_a + \mu_0\, g\, z$$

Si l'on s'intéresse aux faibles variations de μ surtout là où le terme relatif à μ_0 disparaît par dérivation, on partira comme plus haut de $\mathrm{d}\mu = \mu_0\, \chi_S\, \mathrm{d}p$ dont on déduira en particulier :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mu = \mu_0\, \chi_S\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = (\mu_0\, \chi_S)\, (\mu_0\, g\, \overrightarrow{e_z}) = \mu_0^2\, \chi_S\, g\, \overrightarrow{e_z}$$

et puisque $p_0(z)$ ne dépend pas du temps :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu_0\, \chi_S\, \frac{\partial p}{\partial t} = \mu_0\, \chi_S\, \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

L'équation de conservation

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathrm{div}(\mu\, \overrightarrow{v}) = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\, \mathrm{div}\, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mu \cdot \overrightarrow{v_1}$$

donne au premier ordre, compte tenu de ce qui précède de façon brute puis après simplification :

$$\mu_0\, \chi_S\, \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mu_0\, \mathrm{div}\, \overrightarrow{v_1} + \mu_0^2\, \chi_S\, g\, v_{1z} = 0$$

$$\chi_S\, \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathrm{div}\, \overrightarrow{v_1} + \mu_0\, \chi_S\, g\, v_{1z} = 0$$

En régime sinusoïdal de longueur d'onde λ, le dernier terme est négligeable devant le second (il le sera alors devant le premier) si :

$$\mu_0\, \chi_S\, g\, v_1 \ll \frac{v_1}{\lambda} \qquad \text{soit} \qquad \lambda \ll \frac{1}{\mu_0\, \chi_S\, g}$$

et non pas comme nous l'avions pensé[4] initialement $\lambda \ll \frac{p_a}{\mu_0\, g}$. Avec $p_a \sim 10^5$ Pa et $\frac{1}{\chi_S} \sim 2 \cdot 10^9$ Pa, on passe de $\lambda \ll 10$ m à $\lambda \ll 200$ km. On a donc en pratique $\chi_S\, \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathrm{div}\, \overrightarrow{v_1} = 0$ comme pour un gaz.

L'équation d'Euler sans négliger la pesanteur et développée au premier ordre conduit aisément à :

$$\mu_0\, \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = \mu_0\, \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p_0 - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p_1 = -\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p_1$$

4. bêtement. Une intuition n'est pas forcément bonne !

car $p_0(z)$ est solution de $\overrightarrow{\text{grad}}\, p_0 = \mu_0\, \overrightarrow{g}$; l'équation est donc inchangée par rapport au gaz.

A priori, l'élimination de $\overrightarrow{v}_1$, menée plus haut, pourrait ici se passer différemment par le fait que p_0 dépend de z mais il ne paraît plus dans les équations à ce stade du calcul. La gravité ne perturbe pas les ondes sonores dans les liquides.

Signalons toutefois que sur les longueurs de propagation non horizontales assez longues (c'est-à-dire à l'echelle océanique), la faible variation de $\mu_0(z)$ donne une vitesse de propagation variant légèrement avec z et l'on sait que dans un tel milieu en optique, la propagation n'est plus rectiligne (voir chapitre D-V sur l'optique géométrique) ; il en est donc de même pour le son.

Il en est de même du reste pour la propagation dans un gaz en présence d'un gradient thermique. Au petit matin d'une claire et froide nuit d'hiver, des mirages acoustiques permettent au son d'avoir des rayons incurvés vers le bas et l'on entend ainsi des bruits très lointains habituellement arrêtés par des obstacles au sol et avec lesquels ils jouent ce matin-là à saute-mouton.

1.f Ondes sonores planes progressives sinusoïdales.

• Structure longitudinale.

L'équation de d'Alembert vérifiée par p_1 a des solutions planes progressives sinusoïdales [5], soit en notation complexe :

$$\underline{p_1} = \underline{p_m}\, \exp[j\,(\omega\, t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{OM})] = \underline{p_m}\, \exp[j\,(\omega\, t - k\, x)] = \underline{p_m}\, \exp[j\,\omega\,(t - x/c)]$$

Déduisons-en $\overrightarrow{v}_1$ par l'une des équations de couplage, par exemple l'équation 2 qui, en notation complexe, donne :

$$\mu_0\,(j\,\omega)\,\underline{\overrightarrow{v_1}} = -(-j\,\overrightarrow{k}\,)\,\underline{p_1} = j\,k\,\underline{p_1}\,\overrightarrow{e}_x$$

d'où :

$$\underline{\overrightarrow{v_1}} = \frac{k}{\mu_0 \omega}\,\underline{p_1}\,\overrightarrow{e_x} = \frac{1}{\mu_0\, c}\,\underline{p_1}\,\overrightarrow{e_x} = \frac{1}{\mu_0\, c}\,\underline{p_m}\, \exp[j\,\omega\,(t - x/c)]\,\overrightarrow{e_x}$$

ce qui montre clairement que la vitesse acoustique a la même direction que celle de propagation de l'onde : il s'agit donc d'une onde longitudinale.

Remarque : dans un solide, au contraire, on peut avoir des ondes de déformation, soit longitudinales, soit transversales (voir chapitre B-X sur l'élasticité). Lors d'un tremblement de terre, les deux types d'ondes sont créées dans la croûte terrestre, mais, expérimentalement, seules les longitudinales se réfractent dans le *manteau* sous la croûte et s'y propagent ; on en déduit que le manteau est liquide.

5. dont on sait l'intérêt en physique ondulatoire : à partir d'elles, on peut (théoriquement) en déduire toutes les autres.

• **Impédance acoustique.**

Par ailleurs, si l'on définit l'amplitude complexe de la vitesse acoustique par :

$$\underline{\overrightarrow{v_1}} = \underline{v_m}\, \exp \jmath\, \omega\, (t - x/c)\, \overrightarrow{e}_x$$

alors :

$$\underline{v_m} = \frac{1}{\mu_0\, c}\, \underline{p_m}$$

Il y a donc proportionnalité entre vitesse et pression acoustique. Le rapport de proportionnalité est indépendant de la pulsation ; on en déduira par analyse de FOURIER que ce rapport reste valable pour toute onde plane progressive même non sinusoïdale et même non périodique.

Le rapport de proportionnalité est réel, ce qui prouve que pression et vitesse acoustiques sont en phase.

Par convention, on appelle *impédance acoustique* le rapport de l'amplitude complexe de la pression acoustique à celle de la vitesse acoustique, soit :

$$Z = \frac{\underline{p_m}}{\underline{v_m}} = \mu_0\, c$$

d'où l'unité de Z : le $\mathrm{kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$ (et non l'ohm !)

Grâce à l'expression de c, on tire trois formulations possibles pour Z :

$$Z = \mu_0\, c = \frac{1}{\chi_S\, c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}}$$

◦ ***Impédance de l'onde inverse.***

Pour une onde en $\exp[j\, \omega\, (t + x/c)]$ pour laquelle $\overrightarrow{k} = -k\, \overrightarrow{e}_x = -(\omega/c)\overrightarrow{e_x}$, les mêmes calculs conduisent à un résultat opposé, qu'on peut noter $Z_- = -Z_+ = -\sqrt{\mu_0/\chi_S}$.

◦ ***Ordres de grandeur.***

Le point le plus important est que les variations de μ_0 et de χ_S quand on compare liquide et gaz, au contraire de la célérité où les effets se compensent, ont ici des effets qui s'ajoutent ; l'impédance acoustique d'un liquide et celle d'un gaz auront des ordres de grandeur fondamentalement différents.

Avec les valeurs numériques données plus haut, on trouve, $Z = 1,4 \cdot 10^6\ \mathrm{kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$ pour l'eau et $Z = 4,0 \cdot 10^2\ \mathrm{kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$ pour l'air à 300 K.

1.g Aspects énergétiques.

• **Densité volumique d'énergie et densité de courant énergétique.**

On réutilise ici des idées récurrentes en physique.

◦ ***Puissance surfacique transportée.***

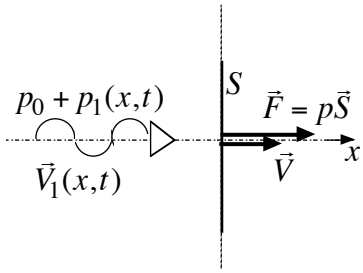

FIGURE 1 – Puissance surfacique.

Sur la figure 1 p. 12 (l'ondulation à gauche, avec un triangle en guise de flèche, symbolise[6] l'onde) considérons à l'abscisse x une surface S imaginaire orthogonale à la direction de propagation d'une onde plane progressive sinusoïdale. On peut considérer qu'à l'instant t l'air à gauche de S exerce sur l'air à droite une force de pression $\overrightarrow{F} = p(x,t)\, S\, \overrightarrow{e}_x = (p_0 + p_1(x,t))\, S\, \overrightarrow{e}_x$

Comme la vitesse est $v_1(x,t)\, \overrightarrow{e}_x$, la puissance exercée par l'air à gauche sur l'air à droite est :

$$\mathcal{P} = (p_0 + p_1(x,t))\, S\, \overrightarrow{e}_x . v_1(x,t)\, \overrightarrow{e}_x = (p_0 + p_1(x,t))\, v_1(x,t)\, \overrightarrow{e}_x . S\, \overrightarrow{e}_x$$

qu'on peut écrire $\overrightarrow{\Pi} . \overrightarrow{S}$ avec $\overrightarrow{\Pi} = (p_0 + p_1(x,t))\, v_1(x,t)\, \overrightarrow{e}_x$

On y reconnaît le formalisme de tout vecteur densité de courant (permettant de calculer l'intensité en électrocinétique, le débit massique en mécanique des fluides, la puissance transportée en électromagnétisme).

Ici, la densité de courant énergétique se compose de deux termes, le premier en $p_0 . v_1$ a une moyenne nulle en régime sinusoïdal puisque p_0 est une constante, nous conviendrons donc de ne pas en tenir compte ; on définit donc le vecteur densité de courant énergétique par le second terme qui est quadratique et nécessitera donc un retour au notations réelles. Compte tenu des résultats précédents, pour $p_1(x,t) = p_m \cos[\omega(t - x/c)]$, on a vu que $\overrightarrow{v}(x,t) = (p_m/Z) \cos[\omega(t - x/c)]\, \overrightarrow{e}_x$ et donc :

$$\overrightarrow{\Pi}(x,t) = \Pi(x,t)\, \overrightarrow{e}_x = p_1(x,t) . \overrightarrow{v}(x,t) = \frac{p_m^2}{Z} \cos^2[\omega(t - x/c)]\, \overrightarrow{e}_x$$

Cela dit, le résultat pertinent en est la moyenne temporelle, soit, abstraction faite du vecteur unitaire :

$$< \Pi >= \frac{p_m^2}{2\, Z}$$

6. J'ai fait ce que j'ai pu.

◦ ***Densité volumique d'énergie.***

Tentons de mettre en évidence une relation de conservation de la forme $\mathrm{div}\overrightarrow{\Pi} + (\partial u/\partial t) = 0$ comme pour la conservation de la charge, de la masse, de l'énergie électromagnétique. On part de :

$$\mathrm{div}\overrightarrow{\Pi} = \mathrm{div}(p_1\,\overrightarrow{v}_1) = p_1\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1.\overrightarrow{v}_1$$

Reportons-y $\mathrm{div}\,\overrightarrow{v}_1 = -\chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1 = -\mu_0\,\frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t}$ tirés des équations de couplage établies plus haut :

$$\mathrm{div}\overrightarrow{\Pi} = -\chi_S\,p_1\,\frac{\partial p_1}{\partial t} - \mu_0\,\overrightarrow{v}_1.\frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\chi_S\,p_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0\,v_1^2\right)$$

qui est bien de la forme $\mathrm{div}\overrightarrow{\Pi} + (\partial u/\partial t) = 0$ avec :

$$u = \frac{1}{2}\chi_S\,p_1^2 + \frac{1}{2}\mu_0\,v_1^2$$

qui doit donc être considéré comme une densité volumique d'énergie. Cela dit, il saute aux yeux que le second terme est une densité volumique d'énergie cinétique et on aurait pu la calculer directement. Le premier terme ne peut être justifié que par un raisonnement thermodynamique extrêmement délicat et pas totalement convainquant, nous admettrons [7] qu'il s'agit d'une densité volumique d'énergie potentielle liée aux forces de pression.

Avec l'onde ci-dessus on a :

$$u_{pot} = \frac{1}{2}\chi_S\,p_1^2 = \frac{1}{2}\chi_S\,p_m^2\,\cos^2[\omega(t - x/c)]$$

$$u_{cin} = \frac{1}{2}\mu_0\,v_1^2 = \frac{1}{2}\mu_0\,v_m^2\,\cos^2[\omega(t - x/c)] = \frac{1}{2\,Z^2}\mu_0\,p_m^2\,\cos^2[\omega(t - x/c)]$$

or on a $Z = \sqrt{\mu_0/\chi_S}$ et l'on montre l'équipartition entre les deux formes d'énergie :

$$u_{pot} = u_{cin} = \frac{1}{2}\chi_S\,p_m^2\,\cos^2[\omega(t - x/c)]$$

$$u = u_{pot} + u_{cin} = \chi_S\,p_m^2\,\cos^2[\omega(t - x/c)]$$

$$< u >= \frac{1}{2}\chi_S\,p_m^2$$

Enfin, comme en électromagnétisme, on peut définir la vitesse de l'énergie par $\overrightarrow{\Pi} = u\,\overrightarrow{V}_E$. En reportant les résultats précédents, on retrouve comme on s'y attend $V_E = (1/Z\,\chi_S)\,\overrightarrow{e}_x = c\,\overrightarrow{e}_x$ (car on a vu que $Z = 1/\chi_S\,c$).

7. N'oublions pas que l'énergie est une seconde couche d'abstraction que l'on construit au cas par cas à partir des lois fondamentales pour faire apparaître une loi de conservation.

• **Intensité sonore et ordres de grandeur.**

◦ ***Définition.***

A la fréquence à laquelle elle est la plus sensible (environ 4 kHz) l'oreille humaine est capable de percevoir un son dont la densité de courant énergétique vaut $10^{-12}\,\mathrm{W.m^{-2}}$ et la perception devient douloureuse à $1\,\mathrm{W.m^{-2}}$. Vu l'énorme différence d'ordre de grandeur entre ces deux extrêmes, une échelle logarithmique s'impose ; du reste des mesures physico-physiologiques ont montré que l'oreille humaine a une réponse logarithmique. On prend donc comme référence le seuil de perception $\Pi_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W.m^{-2}}$ et à une densité de courant énergétique, on associe une intensité sonore en décibels définie par :

$$I_{dB} = 10\,\log_{10}\left(\frac{<\Pi>}{\Pi_0}\right)$$

La figure 2 p. 14 donne la courbe intensité-fréquence (en échelle logarithmique elle aussi) de l'oreille humaine avec seuil de perception pour un individu jeune et seuil de douleur (forcément imprécis).

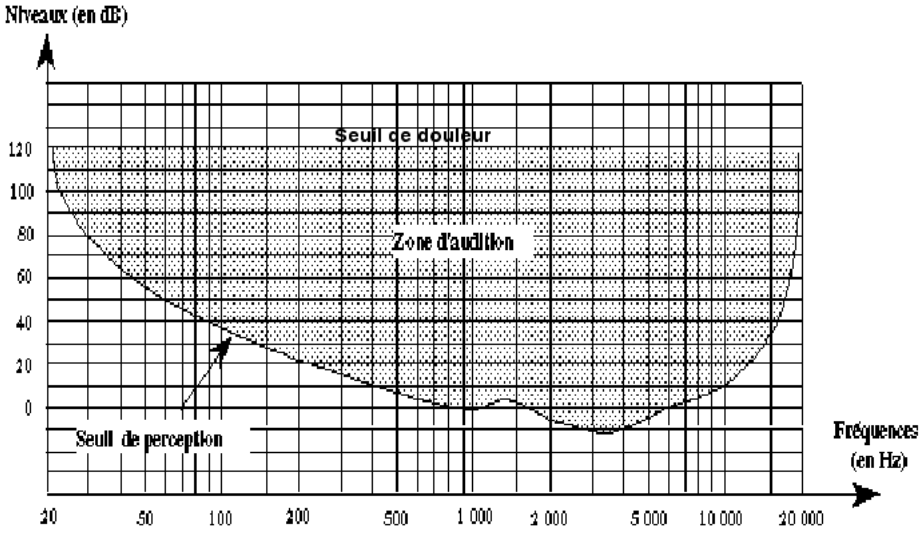

FIGURE 2 – Courbe intensité-fréquence du seuil de perception.

A titre indicatif, ci-dessous un tableau donnant l'intensité de sons caractéristiques :

seuil de perception	0 dB
pièce calme	30 dB
conversation	50 dB
rue animée	80 dB
fortissimo d'orchestre	110 dB
marteau-piqueur à 1 m	110 dB
seuil de douleur	120 dB

◦ ***Ordres de grandeurs.***

On a vu que pour l'air à 300K, $c = 3,5.10^2\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et $Z = 4,0.10^2\,\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}$.

Au seuil de perception, on a $< \Pi >= 10^{-12}\,\mathrm{W.m^{-2}}$;

de $< \Pi >= p_m^2/2\,Z$, on tire $p_m = 2,8.10^{-5}\,\mathrm{Pa}$;

de $v_m = p_m/Z$, on tire $v_m = 7,1.10^{-8}\,\mathrm{m.s^{-1}}$;

et puisque la vitesse est la dérivée du mouvement, on en déduit une amplitude de $\xi_m = v_m/\omega$, soit à 4 kHz, $\xi_m = 2,8.10^{-12}\,\mathrm{m}$ (non, il n'y a pas d'erreur, l'oreille humaine est sensible à ce point).

A 120 dB, seuil de la douleur on aura $p_m = 2,8.10^1\,\mathrm{Pa}$, $v_m = 7,1.10^{-2}\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et à la même fréquence $\xi_m = 2,8.10^{-6}\,\mathrm{m}$

• **Contrôle des approximations pour l'air.**

Même au seuil de douleur $p_m = 28$ Pa $\ll p_0 = 10^5$ Pa. L'intégration de l'équation 3 page 7 donne, sachant que $p_1 = 0$ correspond à la situation de référence donc à $\mu_1 = 0$, $\mu_1 = \mu_0\,\chi_S\,p_1$ et comme pour un gaz $\chi_S = 1/\gamma\,p_0$, on en tire :

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{1}{\gamma}\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{1,4}\cdot 28\cdot 10^{-5} = 2\cdot 10^{-4}$$

Enfin, dans les mêmes conditions $v_m = 7,1\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \ll c = 347\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Tout est donc pour le mieux dans le meilleur des mondes.[8]

1.h Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux.

• **Coefficients de réflexion et de transmission.**

◦ ***Exposé de la problématique.***

Considérons une interface plane[9] infinie (choisie comme plan Oyz) séparant d'un côté (côté $x < 0$) un fluide 1 d'impédance acoustique Z_1 et de vitesse du son c_1 et de l'autre

8. comme disait Pangloss.
9. les lois de la statique des fluides impose que l'interface soit horizontale et donc l'axe Ox vertical

(côté $x > 0$) un fluide 2 d'impédance acoustique Z_2 et de vitesse du son c_2. Soit une onde acoustique plane progressive sinusoïdale, dite onde incidente, émise par un générateur éloigné et se propageant, dans le milieu 1, dans le sens positif de Ox et caractérisée par sa pression et sa vitesse acoustique :

$$p_i = p_{im} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{v}_i = v_{im} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right] \overrightarrow{e}_x = \frac{p_{im}}{Z_1} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right] \overrightarrow{e}_x$$

Arrivée en $x = 0$, elle met en mouvement les premières couches du milieu 2 qui, à leur tour, agissent à la fois sur les autres couches du milieu 2 et les dernières couches du milieu 1 et génèrent ainsi une onde réfléchie et une onde transmise. L'onde réfléchie a la structure suivante (attention au changement de signe de l'impédance !) :

$$p_r = p_{rm} \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{v}_r = v_{rm} \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right] (-\overrightarrow{e}_x) = -\frac{p_{rm}}{Z_1} \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right] \overrightarrow{e}_x$$

et l'onde transmise a pour structure :

$$p_t = p_{tm} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right]$$

$$\overrightarrow{v}_t = v_{tm} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right] \overrightarrow{e}_x = \frac{p_{tm}}{Z_2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right] \overrightarrow{e}_x$$

où p_{rm} et p_{tm} sont les seules grandeurs à calculer.

On reconnaît bien sûr la problématique générale de réflexion et transmission d'ondes.

◦ ***Continuité de la vitesse acoustique.***

Montrons que la vitesse acoustique est continue. En fait, l'interface est par définition la surface où se cotoient les dernières molécules du milieu 1 et les premières du milieu 2, molécules qui collent à l'interface et ont donc la même vitesse que celle-ci, donc la même vitesse les unes que les autres. La suite est plus subtile qu'il n'y paraît, car l'interface vibre à la même pulsation que l'onde, son abscisse est de la forme $\xi(t) = \xi_m \cos(\omega\, t)$ et la continuité doit s'écrire rigoureusement :

$$\lim_{x \to \xi(t)^-} v_1(x,t) = \lim_{x \to \xi(t)^+} v_2(x,t)$$

soit

$$v_1(\xi(t), t) = v_2(\xi(t), t)$$

Heureusement, on a vu que les amplitudes de mouvements sonores sont très petites et l'on pourra dans v_1 et v_2, confondre $\xi(t)$ et 0, il suffit pour cela que ξ_m soit petit devant la longueur d'onde du phénomène ; dans l'air la plus petite longueur d'onde audible correspond à la plus grande fréquence audible (20 kHz) et vaut donc $\lambda_{min} = c/f_{max} = 347/20\,000 \approx 0,02\,\mathrm{m} = 2$ cm, c'est bien plus que les amplitudes mises en évidence plus haut. Donc :

$$v_1(0,t) = v_2(0,t)$$

où, dans le milieu 1 se superposent l'onde incidente et l'onde réfléchie et dans le milieu 2 seule se propage l'onde transmise, donc :

$$v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t)$$

soit successivement

$$v_{im}\,\cos(\omega\,t) + v_{rm}\,\cos(\omega\,t) = v_{tm}\,\cos(\omega\,t)$$

$$v_{im} + v_{rm} = v_{tm}$$

$$\frac{p_{im}}{Z_1} - \frac{p_{rm}}{Z_1} = \frac{p_{tm}}{Z_2}$$

◦ ***Continuité de la pression acoustique.***

Montrons maintenant que la pression est continue. Considérons un système cylindrique de section S de génératrices selon Ox entre $x = \xi(t) - \varepsilon \approx -\varepsilon$ et $x = \xi(t) + \varepsilon \approx \varepsilon$ de masse δm ; un bilan de quantité de mouvement projeté sur Ox donne (on rappelle qu'on néglige la pesanteur dans tout cet exposé) :

$$p_1(-\varepsilon,t)\,S - p_2(\varepsilon,t)\,S = \delta m\,\ddot{\xi}(t)$$

Faisons tendre ε vers 0 donc δm aussi, alors :

$$p_1(0,t) = p_2(0,t)$$

soit successivement

$$p_i(0,t) + p_r(0,t) = p_t(0,t)$$

$$p_{im}\,\cos(\omega\,t) + p_{rm}\,\cos(\omega\,t) = p_{tm}\,\cos(\omega\,t)$$

$$p_{im} + p_{rm} = p_{tm}$$

◦ ***Calcul des coefficients de réflexion et de transmission.***

On a donc à résoudre, en fonction de p_{im} et des constantes Z_1 etZ_2 des milieux, le système suivant en p_{rm} et p_{tm} :

$$\begin{cases} p_{im} + p_{rm} = p_{tm} \\ \frac{p_{im}}{Z_1} - \frac{p_{rm}}{Z_1} = \frac{p_{tm}}{Z_2} \end{cases}$$

Quelques lignes de calcul élémentaires plus loin, on en tire :

$$p_{rm} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\, p_{im} \quad \text{et} \quad p_{tm} = \frac{2\, Z_2}{Z_2 + Z_1}\, p_{im}$$

ce qui permet de définir les coefficients de réflexion et de transmission *relatifs à la pression* :

$$r_p = \frac{p_{rm}}{p_{im}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \text{ et } t_p = \frac{p_{tm}}{p_{im}} = \frac{2\, Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

Il est important de préciser qu'il s'agit de coefficients relatifs a la pression, car on peut (et on va) définir et calculer des coefficients relatifs à la vitesse :

$$r_v = \frac{v_{rm}}{v_{im}} = \frac{-p_{rm}/Z_1}{p_{im}/Z_1} = -r_p = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$t_v = \frac{v_{tm}}{v_{im}} = \frac{p_{tm}/Z_2}{p_{im}/Z_1} = \frac{Z_1}{Z_2} t_p = \frac{2\, Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

• **Coefficients énergétiques.**

L'onde incidente, si elle était seule, transporterait $\Pi_i\, \overrightarrow{e}_x$ avec $\Pi_i = p_i\, v_i$, comme on l'a vu plus haut. De même l'onde réfléchie, seule, transporterait $\Pi_r\, \overrightarrow{e}_x$ avec $\Pi_r = p_r\, v_r$, et l'onde transmise transporte $\Pi_t\, \overrightarrow{e}_x$ avec $\Pi_t = p_t\, v_t$. On constaterait aisément que Π_r est négatif car $v_r = -p_r/Z_1$, ce signe signifiant que l'énergie est renvoyée vers l'arrière. On définit des coefficients de réflexion et de transmission faisant abstraction du sens de propagation donc du signe par :

$$R = \frac{|\Pi_r|}{\Pi_i} = \frac{p_r}{p_i}\frac{|v_r|}{v_i} = r_p\, |r_v| = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

$$T = \frac{\Pi_t}{\Pi_i} = \frac{p_t}{p_i}\frac{v_t}{v_i} = t_p\, t_v = \frac{4\, Z_2\, Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

La conservation de l'énergie est assurée par $R + T = 1$.

On aura noté la grande analogie formelle entre ces formules et celles de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un dioptre.

∘ ***Ordres de grandeurs.***

Le point le plus important à noter est, qu'au contraire de l'électromagnétisme où les indices ne s'éloignent pas beaucoup de l'unité, les impédances acoustiques peuvent être notablement différentes surtout entre un gaz et un liquide. Par exemple on a pour l'air $Z_1 = 4,0 \cdot 10^2\ \mathrm{kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$ et pour l'eau $Z_2 = 1,4 \cdot 10^6\ \mathrm{kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$, ce qui donne pour T :

$$T = \frac{4 \cdot 4,0 \cdot 10^2 \cdot 1,4 \cdot 10^6}{(4,0 \cdot 10^2 + 1,4 \cdot 10^6)^2} \approx \frac{4 \cdot 4,0 \cdot 10^2 \cdot 1,4 \cdot 10^6}{(1,4 \cdot 10^6)^2} = \frac{4 \cdot 4,0 \cdot 10^2}{1,4 \cdot 10^6} = 1,14 \cdot 10^{-3}$$

et donc

$$R = 1 - T = 0,999$$

Sur l'interface air-eau, la quasi-totalité de l'énergie est renvoyée ; en échelle logarithmique le passage air-eau s'accompagne d'un affaiblissement de $10 \log T = -29\,\mathrm{dB}$. Quand on plonge la tête sous l'eau [10], les sons venant de l'extérieur semblent fortement étouffés.

Remarque : a priori donc, faire entrer dans un corps humain, essentiellement fait d'eau, des ultrasons provenant d'un émetteur placé dans l'air est inenvisageable. L'échographie a cependant été rendue possible par l'adaptation au son de la technique de la couche anti-reflet [11] en optique (impédance, au lieu de l'indice, égale à la racine carrée du produit de celles de l'air et de l'eau et épaisseur d'un quart de longueur d'onde) : on tartine la peau d'un gel adéquat.

• Transmission par un mur.

Voyons ici un autre problème classique de transmission, entre deux fluides identiques mais séparés par une paroi solide. Soit donc, par exemple, une onde sonore plane progressive sinusoïdale qui se propage dans l'air (vitesse du son c et impédance acoustique Z) de l'appartement de mon voisin et arrive sous incidence normale sur le mur qui le sépare de mon appartement.

Si l'on tient compte de l'aspect propagatif dans le mur, le champ de vitesse dans le mur dépend de la position par contre si le mur se déplace en bloc ce champ est uniforme. Les deux présentations se confondent si l'épaisseur du mur est négligeable devant la longueur d'onde du phénomène. Avec des vitesses du son dans les solides de l'ordre de plusieurs kilomètres par secondes et des fréquences acoustiques audibles autour du kilohertz, la longueur d'onde est de plusieurs mètres, ce qui valide un modèle de vibration en bloc. Cela dit, le mur ne se déplace pas comme un piston car ses bords restent accrochés au plafond, au sol et aux murs contigus. Si le centre du mur se déplace et ses bords restent fixes, le mur se cintre et l'élasticité va tendre à le redresser. Cette tendance sera qualitativement modélisée par un rappel élastique et le mouvement de la partie centrale du mur le sera par une masse mobile en translation. Le mur est donc modélisé par un piston de masse M, de surface S et soumis à un rappel élastique de raideur k autour de sa position de repos.

La structure des ondes incidente (indice i), réfléchie (indice r) et transmise (indice t) est la suivante (on allège l'écriture en ne tenant pas compte de l'épaisseur du mur) :

$$\begin{cases} p_i = p_{im} \exp j\,\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \\ v_i = \frac{p_{im}}{Z} \exp j\,\omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_r = p_{rm} \exp j\,\omega \left(t + \frac{x}{c}\right) \\ v_r = -\frac{p_{rm}}{Z} \exp j\,\omega \left(t + \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

10. drôle d'idée !
11. voir chapitre D-XI sur les interférences.

sans oublier le changement de signe pour v_r, classique mais piégeant.

$$\begin{cases} p_t = p_{tm} \exp j\,\omega\,\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ v_t = \frac{p_{tm}}{Z} \exp j\,\omega\,\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

Les vitesses de l'air au contact du mur de part et d'autre de celui-ci s'identifient, bien sûr, à sa vitesse. Si l'on note $X = X_m \exp j\omega t$ sa position et donc $j\omega\, X_m \exp j\omega t$ sa vitesse, on a :

$$\lim_{x\to 0^-} (v_i + v_r) = \lim_{x\to 0^+} (v_t) = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$$

où, du côté gauche, la vitesse résulte de la superposition des vitesses des ondes incidente et réfléchie. Poursuivons

$$\frac{p_{im}}{Z} \exp j\,\omega\,t - \frac{p_{rm}}{Z} \exp j\,\omega\,t = \frac{p_{tm}}{Z} \exp j\,\omega\,t = j\,\omega\,X_m \exp j\,\omega t$$

$$p_{im} - p_{rm} = p_{tm} = j\,\omega\,Z\,X_m \qquad \text{(équation 4)}$$

Quant à la pression, si elle était continue, le bilan des forces de pression sur le mur serait nul et celui-ci ne se déplacerait pas. Il faut donc remplacer cette hypothèse de continuité par un bilan de force sur le mur, sans oublier le rappel élastique :

$$S \lim_{x\to 0^-} (p_i + p_r) - S \lim_{x\to 0^+} (p_t) - k\,X = M\,\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}$$

$$S\,(p_{im} + p_{rm} - p_{tm}) \exp j\,\omega\,t - k\,X_m \exp j\,\omega\,t = -M\,\omega^2\,X_m \exp j\,\omega\,t$$

$$p_{im} + p_{rm} - p_{tm} = \frac{k - M\,\omega^2}{S}\,X_m \qquad \text{(équation 5)}$$

de l'équation 4, on tire

$$X_m = \frac{p_{tm}}{j\,\omega\,Z} \qquad \text{et} \qquad p_{rm} = p_{im} - p_{tm}$$

que l'on reporte dans l'équation 5 :

$$p_{im} + (p_{im} - p_{tm)} - p_{tm} = \frac{1}{S\,Z}\left(\frac{k}{j\,\omega} + j\,\omega\,M\right)\,p_{tm}$$

d'où l'on tire aisément :

$$t = \frac{p_{tm}}{p_{im}} = \frac{1}{1 + \frac{j}{2\,S\,Z}\,\left(M\,\omega - \frac{k}{\omega}\right)}$$

Le coefficient de transmission t dépend de la pulsation ω ; on peut donc le lire comme une fonction de transfert. On vérifie aisément que $t(0) = t(\infty) = 0$, donc qu'il s'agit d'un filtre passe-bande. Tout aussi aisément, le module de t est maximum pour $M\,\omega - \frac{k}{\omega} = 0$,

donc la pulsation de résonance est $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ expression qui, du reste, nous est familière. En pratique, la résonance a lieu dans le domaine des infrasons et il en résulte que dans le domaine audible, le coefficient de transmission réel diminue avec la fréquence : les sons graves traversent plus facilement le mur que les sons aigus ; le phénomène est du reste bien connu.

• Cas de la discontinuité de section dans un tuyau.

Pour un tuyau sonore cylindrique, rempli d'un fluide unique, qui passe en $x = 0$ d'une section S_1 à une section S_2 (cf figure 3 p. 21), on justifie comme d'habitude qu'en $x = 0$ la pression est continue. Par contre les résultats expérimentaux sont compatibles avec une continuité du débit massique donc au premier ordre du débit volumique $S\,v_1$, qu'il est difficile voire malhonnête de justifier théoriquement et que nous admettrons donc comme réalité expérimentale.

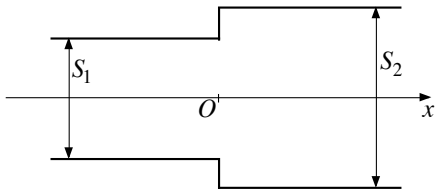

FIGURE 3 – Discontinuité de section.

Les calculs se mènent de la même façon que les exemples précédents et conduisent ici [12], avec $Z_1 = Z_2$, à un coefficient de transmission en énergie (défini ici logiquement à partir de la puissance $\langle S\,p\,v\rangle$) $T = \frac{4\,S_1\,S_2}{(S_1+S_2)^2}$.

En particulier, le son qui sort d'un instrument de musique est faible car S_1, surface de l'extrémité du tuyau sonore, est très petite devant S_2, surface de la salle de concert vue comme un autre tuyau. Voyez à la fin du paragraphe suivant le rôle du pavillon pour augmenter S_1.

1.i Tuyaux sonores cylindriques, coniques, exponentiels.

• Orchestre à vents.

Il serait ici dommage de ne pas en profiter pour parler, fût-ce sommairement de la physique des instruments de musique à vent. Il s'agit de tuyaux en bois ou en métal dans lesquels le souffle de l'instrumentiste (ou d'un dispositif pneumatique dans le cas de l'orgue) entretient une onde stationnaire. Pour le tuyau, on distingue les cas des tuyaux cylindriques

12. Comme d'habitude, je force mon lecteur à sortir papier et crayon car travailler ensemble crée des liens.

(flûte traversière, clarinette, etc.) ou coniques (flûte à bec, haubois, saxophone, etc.) ; on parle de *perce* cylindrique ou conique. Pour l'entretien de l'onde stationnaire, il y a deux méthodes :

- le biseau : l'air est dirigé par un canal (flûte à bec) ou les lèvres (flûte traversière) vers un biseau autour duquel est généré un écoulement turbulent ; il s'en détache régulièrement des tourbillons qui injectent l'énergie suffisante à l'entretien de l'onde stationnaire.
- l'anche : on souffle entre deux roseaux (anche double comme le hautbois et le basson), ou entre un roseau et un support fixe (anche simple comme la clarinette et le saxophone), voire entre ses lèvres pincées (comme la trompette, le trombone et le cor). Le principe est le suivant : l'air canalisé entre les deux parties de l'anche crée une dépression par effet VENTURI qui les aspire l'une vers l'autre et ferme le canal. L'effet cesse donc et par élasticité l'anche retrouve sa forme initiale et rouvre le canal ; il s'ensuit la vibration qui entretient l'onde stationnaire.

Signalons enfin le rôle du pavillon : c'est un adaptateur d'impédance qui permet d'augmenter la puissance de l'onde sonore qui s'échappe de l'instrument (voir plus bas dans ce long paragraphe).

• Tuyaux sonores cylindriques.

Nous n'étudierons ici qu'un tuyau cylindrique d'axe Ox. L'hypothèse d'un fluide parfait permet de négliger l'épaisseur de la couche limite à la périphérie du tuyau et donc de considérer la vitesse et la pression comme homogènes [13] dans une section d'abscisse donnée ; le modèle de l'onde plane convient donc. La pression acoustique vérifie l'équation de d'ALEMBERT dont on connaît les solutions stationnaires ; on peut donc écrire :

$$p_1(x,t) = p_m \, \sin(\omega\, t + \varphi) \, \sin(\omega\, x/c + \psi)$$

L'équation 2 page 6 donne accès à la vitesse acoustique ; on a successivement :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1 = \frac{\omega}{c}\, p_m \, \sin(\omega\, t + \varphi) \, \cos(\omega\, x/c + \psi) \, \overrightarrow{e}_x$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\frac{\omega}{\mu_0 c}\, p_m \, \sin(\omega\, t + \varphi) \, \cos(\omega\, x/c + \psi) \, \overrightarrow{e}_x$$

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{p_m}{\mu_0 c} \, \cos(\omega\, t + \varphi) \, \cos(\omega\, x/c + \psi) \, \overrightarrow{e}_x = \frac{p_m}{Z} \, \cos(\omega\, t + \varphi) \, \cos(\omega\, x/c + \psi) \, \overrightarrow{e}_x$$

On remarque, qu'au contraire d'une onde progressive, pression et vitesse sont en quadrature dans le temps et dans l'espace. Du reste, c'est une propriété classique.

Reste à exploiter les conditions aux limites.

Si l'une des extrémités du tuyau est fermée (comme les *bourdons* de l'orgue), il y a forcément un nœud de vitesse (puisque le mouvement est impossible) donc un ventre

13. On verra plus loin dans ce paragraphe comment gérer la situation dans le cas contraire.

de pression. L'expérience prouve qu'une embouchure à anche se comporte comme une extrémité fermée. On pouvait s'en douter car l'aire ouverte par l'anche dans l'extrémité fermée du tuyau est négligeable.

Par contre à une extrémité ouverte, l'expérience prouve qu'on a un nœud de pression donc un ventre de vitesse ; l'explication théorique viendra un peu plus loin dans ce paragraphe. Retenons que l'air extérieur impose sa pression comme pression limite du tuyau, ce qui entraîne une surpression nulle. L'expérience prouve qu'une embouchure à biseau se comporte comme une extrémité ouverte. L'aire ouverte autour du biseau pour laisser passer l'air qui l'excite est assez importante pour cela.

Pour un tuyau de longueur L ouvert à ses deux extémités et puisqu'entre deux nœuds successifs de la même grandeur physique, il y a une demi-longueur d'onde, les longueurs d'ondes possibles sont telles que :

$$L = p\,\frac{\lambda_p}{2} = p\,\frac{c\,T_p}{2} = p\,\frac{c}{2f_p} \quad p \in N$$

d'où une fréquences fondamentale $f_1 = \dfrac{c}{2L}$ et des harmoniques $f_p = p\,f_1$. A titre d'exemple, pour le fondamental, on arrive aisément à :

$$p_1(x,t) = p_m\,sin\left(\pi\,\frac{x}{L}\right)\,sin\left(\pi\,\frac{c\,t}{L} + \varphi\right)$$

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{p_m}{Z}\,cos\left(\pi\,\frac{x}{L}\right)\,cos\left(\pi\,\frac{c\,t}{L} + \varphi\right)\,\overrightarrow{e}_x$$

Pour un tuyau ouvert en $x = 0$ et fermé en $x = L$, on aurait de même :

$$L = (2\,p+1)\,\frac{\lambda_p}{4} = (2\,p+1)\,\frac{c\,T_p}{4} = (2\,p+1)\,\frac{c}{4f_p} \quad p \in N$$

d'où une fréquences fondamentale $f_0 = \dfrac{c}{4L}$ et des harmoniques $f_p = (2\,p+1)\,f_0$. A titre d'exemple, pour le fondamental, on arrive aisément à :

$$p_1(x,t) = p_m\,sin\left(\pi\,\frac{x}{2\,L}\right)\,sin\left(\pi\,\frac{c\,t}{2\,L} + \varphi\right)$$

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{p_m}{Z}\,cos\left(\pi\,\frac{x}{2\,L}\right)\,cos\left(\pi\,\frac{c\,t}{2\,L} + \varphi\right)\,\overrightarrow{e}_x$$

Lorsqu'on souffle de façon relachée dans un instrument, on excite le fondamental. Au vu de ce qui précède, à longueur égale, une clarinette joue une octave en-dessous d'une flûte.

Si l'on débouche les trous un à un à partir du bout de l'instrument, cela revient à en raccourcir la longueur utile donc à augmenter la fréquence, donc à produire des notes plus

hautes. Remarquons en conséquence que, tous trous bouchés, on joue la note la plus basse que puisse produire l'instrument.

Si l'on souffle de façon plus tendue dans l'instrument on excite le premier harmonique et l'on facilite la chose en débouchant sous l'instrument un trou pour provoquer un nœud de pression au bon endroit. Pour un instrument « ouvert-ouvert » on passe à $f_2 = 2\,f_1$, c'est à dire à l'octave ; on dit que l'instrument octavie et le trou d'octave est à mi-longueur. Pour un instrument « ouvert-fermé », on passe à $f_1 = 3\,f_0$, c'est à dire à la douzième (l'octave de la quinte) ; on dit (improprement) que l'instrument quintoie et le trou de douzième est au tiers de la longueur ; c'est ce qui donne sa sonorité nasillarde à la clarinette. Signalons par anticipation que, pour compliquer le tout, un instrument « ouvert-fermé » à perce conique octavie au lieu de quintoyer (voir plus loin dans ce paragraphe).

Ne nous reste plus qu'à réécouter « Pierre et le Loup » de Serge Prokofiev.

• Tuyaux sonores aux hautes fréquences.

On étudie ici la possibilité d'onde non planes ; les paramètres ne sont alors plus homogènes dans une section droite du tuyau. Un tuyau sonore orienté selon Ox a une section carrée ($0 < y < a$ et $0 < z < a$). On pose donc ici :

$$p_1(x, y, z, t) = f(y)\,g(z)\,\sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t)$$

On part de l'équation d'Euler linéarisée (cf supra) et l'on trouve successivement :

$$\mu_0\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_1}{\mathrm{d}t} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\mu_0}\left|\begin{array}{l} k\,f(y)\,g(z)\,\cos(k\,x)\,\sin(\omega\,t) \\ f'(y)\,g(z)\,\sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t) \\ f(y)\,g'(z)\,\sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{1}{\mu_0\,\omega}\left|\begin{array}{l} k\,f(y)\,g(z)\,\cos(k\,x)\,\cos(\omega\,t) \\ f'(y)\,g(z)\,\sin(k\,x)\,\cos(\omega\,t) \\ f(y)\,g'(z)\,\sin(k\,x)\,\cos(\omega\,t) \end{array}\right.$$

Sur les parois, la vitesse doit être tangentielle et ne peut pas avoir de composante normale. Donc pour les plans $y = 0$ et $y = a$, u_y doit s'annuler, ce qui impose $f'(0) = f'(a) = 0$. Comme pour les cordes vibrantes, on peut considérer f', définie entre 0 et a, comme restriction d'une fonction impaire $2\,a$-périodique et donc f comme restriction d'une fonction paire $2\,a$-périodique. On peut donc écrire

$$f(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m\,\cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right)$$

ou encore, à un changement de notation près pour le terme constant,

$$f(y) = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_m \cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right)$$

De même

$$g(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n \cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right)$$

On s'intéresse au « mode m, n » avec $f(y) = p_{max} \cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right)$ et $g(z) = \cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right)$. On a donc :

$$p(x, y, z, t) = p_{max} \cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right) \cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right) \sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t)$$

Or p vérifie l'équation de D'ALEMBERT, d'où

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
-\frac{\omega^2}{c^2}\,p_{max} \cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right) \cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right) \sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t) = \\
-k^2\,p_{max} \cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right) \cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right) \sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t) \\
-\left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 p_{max} \cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right) \cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right) \sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t) \\
-\left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2 p_{max} \cos\left(m\,\pi\,\frac{y}{a}\right) \cos\left(n\,\pi\,\frac{z}{a}\right) \sin(k\,x)\,\sin(\omega\,t)
\end{aligned}$$

soit après simplifications

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2$$

qu'on peut réécrire

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2$$

ce qui prouve que pour m et n donnés, k^2 est négatif, donc k imaginaire et le phénomène amorti, si $\omega < \omega_c = \frac{\pi\,c}{a}\,\sqrt{m^2 + n^2}$; chaque mode a donc un comportement passe-haut.

La figure 4 p. 26 montre les courbes ω en fonction de k avec les grandeurs « réduites » $X = \dfrac{k\,a}{\pi}$ en abscisse et $Y = \dfrac{a\,\omega}{\pi\,c}$ en ordonnée. De

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{m\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2$$

on tire

$$\frac{\omega^2\, a^2}{\pi^2\, c^2} = \frac{a^2\, k^2}{\pi^2} + m^2 + n^2$$
$$Y^2 = X^2 + m^2 + n^2$$

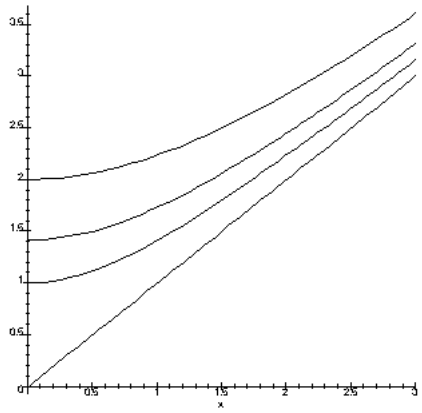

FIGURE 4 – Relation de dispersion..

Pour $m = n = 0$, on a donc $Y = X$, c'est la droite du bas ; pour les autres courbes (des hyperboles en fait), le point le plus simple à localiser est le celui de coordonnées $X = 0$ et $Y = \sqrt{m^2 + n^2}$. On reconnaît de bas en haut :

- la courbe avec $\sqrt{m^2 + n^2} = 1$ obtenue pour $(m, n) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$
- la courbe avec $\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{2}$ obtenue pour $(m, n) = (1, 1)$
- la courbe avec $\sqrt{m^2 + n^2} = 2$ obtenue pour $(m, n) = (2, 0)$ ou $(0, 2)$

Remarque : pour un tuyau à section circulaire, il faudra passer par les coordonnées cylindriques et les fonctions de BESSEL (voir le chapitre A-II en physique ondulatoire).

◦ ***Application à la conception d'un tuyau d'orgue.***

On considère un tuyau d'orgue à section carré de côté a et de longueur L, ouvert à ses deux extrémités. A quelle condition émet-il un son harmonieux, c'est-à-dire n'émettant que des multiples d'un fondamental audible par l'oreille humaine (dans la plage 20 Hz-20 kHz) ?

Les deux extrémités sont des nœuds de pression, donc pour le fondamental $L = \lambda/2$ et pour l'harmonique de rang q, $L = q\,(\lambda/2)$. d'où

$$k_q = \frac{2\,\pi}{\lambda_q} = q\,\frac{\pi}{L}$$

A chaque valeur de q, correspond un point sur chacune des courbes représentant un mode. Les points obtenus pour le mode (0,0) sont équidistants et correspondent aux solutions classiques pour lesquelles les fréquences sont multiples de la plus basse, les sons sont

harmonieux. Pour les points relatifs aux autres modes, les fréquences n'ont pas de rapport simple avec le fondamental du mode (0,0), ces sons sont inharmonieux. Il convient donc de les rendre inaudibles, en les plaçant dans le domaine des ultrasons. Comme le point le plus bas de ces courbes est celui du mode (0,1) avec $X = 0$ correspondant à $Y = 1$ soit $\omega = \frac{\pi\, c}{a}$ ou encore $f = \frac{c}{2\, a}$, il suffit que cette fréquence soit supérieure à $f_m = 20\,\mathrm{kHz}$ limite supérieure de la plage des sons audibles, soit

$$\frac{c}{2\, a} > f_m \qquad \text{d'où} \quad a < a_{max} = \frac{c}{2\, f_m}$$

Avec $c \approx 350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, on tire $a_{max} \approx 9\,\mathrm{mm}$.

• Ondes sphériques. Tuyaux sonores coniques.

○ *Ondes sphériques propagatives.*

On cherche ici des solutions à l'équation de propagation relative à la pression acoustique de la forme $p(r,t)$. La pression acoustique $p_1(r,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert tridimensionnelle, soit, grâce à la formule du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \Delta p = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (r\, p_1)}{\partial r^2}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial^2 (r\, p_1)}{\partial r^2} = \frac{r}{c^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 (r\, p_1)}{\partial t^2}$$

ce qui montre que le produit $r\, p_1$ vérifie l'équation de d'Alembert monodirectionnelle dont les solutions propagatives sinusoïdales sont bien connues :

$$r\, p_1(r,t) = A\, \exp j\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \text{d'où} \quad p_1(r,t) = \frac{A}{r}\, \exp j\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

L'approximation acoustique appliquée à l'équation d'Euler $\mu_0\, \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p_1$ donne ici :

$$\mu_0\, \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} = j\,\omega\,\mu_0\, \overrightarrow{v}_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial r}\, \overrightarrow{e_r} = \left[\frac{A}{r^2}\, \exp j\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{j\,\omega\, A}{c\, r}\, \exp j\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \overrightarrow{e_r}$$

d'où :

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{1}{\mu_0\,\omega} \left[-\frac{J\, A}{r^2}\, \exp J\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{A\,\omega}{c\, r}\, \exp J\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \overrightarrow{e_r}$$

soit, avec $\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$

$$v(r,t) = \frac{A}{\mu_0\,\omega} \left[-\frac{j}{r^2}\, \exp j\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{2\,\pi}{\lambda\, r}\, \exp j\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

Si r est grand devant λ, le premier terme est négligeable et

$$v(r,t) = \frac{A}{\mu_0\,\omega}\,\frac{2\,\pi}{\lambda\,r}\,\exp j\,\omega\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{A}{\mu_0\,c\,r}\,\exp j\,\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

et l'on retrouve le lien classique entre pression et vitesse (division par $Z = \mu_0\,c$). Cette zone $r \gg \lambda$ est appelée zone de rayonnement. Dans un « laboratoire » dont la taille est petite par rapport à la distance à la source, les surfaces d'onde sphériques sont perçues classiquement comme des plans parallèles.

Si r est petit devant λ, le second terme est négligeable et

$$v(r,t) = -\frac{j\,A}{\mu_0\,\omega}\,\frac{1}{r^2}\,\exp j\,\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

On a déjà remarqué qu'à grande distance, on retrouve $v(r,t) = p(r,t)/Z_\infty$ avec encore $Z_\infty = \mu_0\,c$, c'est-à-dire le même résultat que pour une onde plane. A une distance $a \ll \lambda$, on a :

$$\begin{cases} p(a,t) = \frac{A}{a}\,\exp \jmath\omega\left(t-\frac{a_0}{c}\right) \\ v(a,t) = -\frac{\jmath\,A}{\mu_0\,\omega}\,\frac{1}{a^2}\,\exp \jmath\omega\left(t-\frac{a_0}{c}\right) \end{cases}$$

qui permet de définir une impédance au niveau de la source (dont a est la taille en ordre de grandeur), dite impédance de rayonnement

$$Z_0 = \frac{p(a,t)}{v(a,t)} = j\,\mu_0\,\omega\,a$$

soit, toujours avec $\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$:

$$Z_0 = 2\,j\,\pi\frac{\mu_0\,c\,a}{\lambda} = 2\,j\,\pi\,Z_\infty\,\frac{a}{\lambda}$$

On en déduit que $|Z_0| \ll Z_\infty$ car $a \ll \lambda$ par hypothèse.

A la sortie d'un tuyau sonore l'onde sonore diffracte sous forme d'une onde sphérique ; par continuité, la vitesse acoustique est la même dans le tuyau et dans l'onde diffractée. La faible valeur de Z_0 permet donc de dire que la pression acoustique est quasiment nulle et par continuité elle l'est dans le tuyau : on a donc un nœud de pression à l'extrémité du tuyau sonore. C'est à cela en fait que je voulais arriver : la justification du nœud de pression en sortie d'un tuyau sonore ouvert.

◦ ***Tuyaux sonores coniques.***

Soit un tuyau conique de sommet imaginaire O qui se limite à la portion de cône entre les rayons a et b. Il est siège d'une onde sphérique stationnaire, somme de deux ondes progressives dans les deux sens de même amplitude mais déphasées.

Au vu de l'étude précédente, on peut écrire

$$p_1(r,t) = \frac{A}{r}\, j\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{B}{r}\, \exp j\,\omega \left(t + \frac{r}{c}\right)$$

On tire toujours la vitesse par

$$\mu_0\, \frac{\partial v_1}{\partial t} = j\,\omega\,\mu_0\, v_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial r}$$

on trouve ici

$$v_1(r,t) = \frac{j}{\mu_0\,\omega} \left[-\frac{A}{r^2}\, \exp j\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{B}{r^2}\, \exp j\,\omega \left(t + \frac{r}{c}\right) \right] + \cdots$$
$$\cdots \frac{j}{\mu_0\,\omega} \left[-\frac{j\,\omega\,A}{c\,r}\, \exp j\,\omega \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{j\,\omega\,B}{c\,r}\, \exp j\,\omega \left(t + \frac{r}{c}\right) \right]$$

Dans le cas où l'extrémité $r = b$ débouche sur l'atmosphère et se comporte comme un nœud de pression, on a :

$$0 = \frac{A}{b}\, \exp j\,\omega \left(t - \frac{b}{c}\right) + \frac{B}{b}\, \exp j\,\omega \left(t + \frac{b}{c}\right)$$

$$\text{d'où} \qquad A\, \exp \left(-j\, \frac{\omega\, b}{c}\right) = -B\, \exp j\, \frac{\omega\, b}{c} \qquad \text{ou encore} \qquad A = -B\, \exp \frac{2\, j\,\omega\, b}{c}$$

Pour une flûte à bec ; l'extrémité $r = a$ est un biseau qui se comporte lui aussi comme un nœud de pression . On a donc aussi

$$A = -B\, \exp \frac{2\, j\,\omega\, a}{c}$$

$$\text{d'où} \qquad \exp \frac{2\, j\,\omega\, a}{c} = \exp \frac{2\, j\,\omega\, b}{c}$$

$$\text{d'où} \qquad \frac{2\,\omega\, b}{c} - \frac{2\,\omega\, a}{c} = 2\, p\,\pi \qquad \text{avec} \qquad p \in \mathbb{N}$$

$$\text{soit} \qquad \frac{2\,\omega}{c}\,(b-a) = \frac{4\,\pi\, f}{c}\,(b-a) = \frac{4\,\pi}{\lambda}\,(b-a) = 2\, p\,\pi$$

On retrouve la condition classique $L = p\,\lambda/2$ avec ici $L = b - a$ et les mêmes fréquences qu'un tuyau cylindrique (flûte traversière par exemple) :

$$f_p = p\, \frac{c}{2\, L}$$

Le premier harmonique est l'harmonique 2, l'octave du fondamental : les flûtes à bec, de perce conique, « octavient ».

Pour un hautbois (ou un saxophone) ; l'extrémité $r = a$ est une anche et se comporte comme un nœud de vitesse. La condition $v(a,t) = 0$ s'écrit, en simplifiant par $\exp j\,\omega\,t$ et par a^2

$$A \exp\left(-j\,\frac{\omega\,a}{c}\right) + B \exp\left(j\,\frac{\omega\,a}{c}\right) + j\,\frac{\omega\,a}{c}\,A \exp\left(-j\,\frac{\omega\,a}{c}\right) - j\,\frac{\omega\,a}{c}\,B \exp\left(j\,\frac{\omega\,a}{c}\right) = 0$$

On multiplie par $\exp\left(-j\,\frac{\omega\,b}{c}\right)$, on reporte $A \exp\left(-j\,\frac{\omega\,b}{c}\right) = -B \exp j\,\frac{\omega\,b}{c}$, on simplifie par B et l'on pose $\varphi = \frac{\omega\,(b-a)}{c}$, d'où

$$-\exp(j\,\varphi) + \exp(-j\,\varphi) - \jmath\,\frac{\omega\,a}{c}\,\exp(j\,\varphi) - \jmath\,\frac{\omega\,a}{c}\,\exp(-j\,\varphi) = 0$$

$$-2\,j\,\sin\varphi - 2\,j\,\frac{\omega\,a}{c}\,\cos\varphi = 0$$

$$\tan\varphi = -\frac{\omega\,a}{c} = -\frac{a}{b-a}\,\frac{\omega\,(b-a)}{c} = -K\,\varphi$$

avec $K = \dfrac{a}{b-a} \approx 1/3$ où la valeur $K = 1/3$ valeur correspondant à la perce d'un hautbois qui passe d'un diamètre $D_a = 4$ mm à un diamètre $D_b = 12$ mm car, si l'on en croit l'immortel Thalès, $a/(b-a) = D_a/(D_b - D_a)$. On résout graphiquement en superposant les graphes des deux membres (voir figure 5 p. 30).

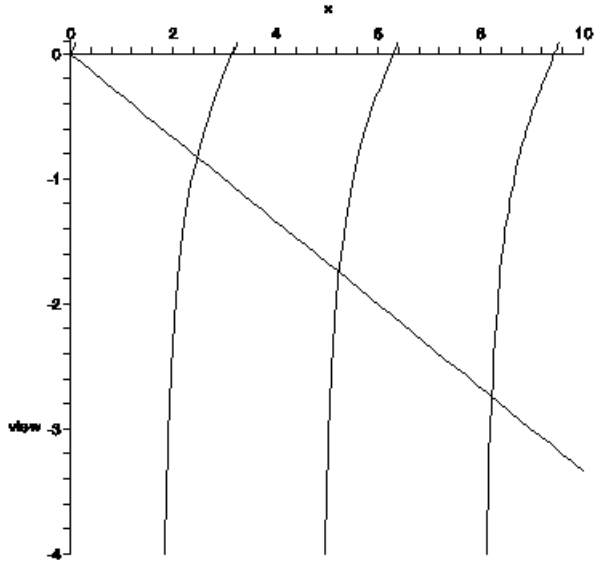

Figure 5 – Instruments à perce conique.

Par rapport à un instrument à perce cylindrique, on n'a plus la condition classique $L = (2\,p+1)\,\lambda/4$ avec ici $L = b - a$ ni les mêmes fréquences qu'un tuyau cylindrique, qui seraient :

$$f_{2\,p+1} = (2\,p{+}1)\,\frac{c}{4\,L} \quad \text{ou} \quad \omega_{2\,p+1} = (2\,p{+}1)\,\frac{\pi\,c}{2\,L} \quad \text{correspondant à} \quad \varphi = \frac{\omega\,L}{c} = (2\,p{+}1)\,\frac{\pi}{2}$$

Pour trouver des valeurs numériques, il est plus parlant de poser $\varphi = x\,\pi/2$ et de demander à un logiciel de calcul de résoudre

$$\tan\left(\frac{\pi\,x}{2}\right) = -K\,\frac{\pi\,x}{2}$$

Là où une clarinette[14] donne x=1, 3, 5, 7..., le hautbois donne $x = 1,56$ et puis $x = 3,33$, $x = 5,22$, $x = 7,17$, etc. On n'a plus du tout des multiples entiers et impairs du fondamental, les rapports des valeurs de x à la première sont $2,13$ puis $3,34$ et $4,60$ ce qui montre qu'on est plus près d'un instrument qui octavie que d'un qui quintoie. En réalité la présence du pavillon, la forme et la taille des trous modifie tout cela et un bon facteur[15] de haubois en fait malgré tout un instrument harmonieux.

• **Pavillon exponentiel.**

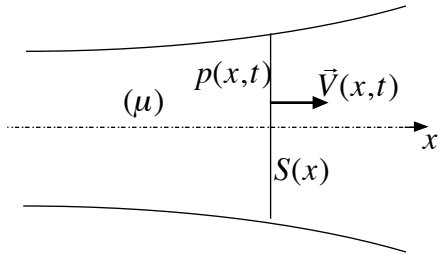

FIGURE 6 – Pavillon exponentiel.

Considérons une onde quasi-plane acoustique se déplace dans un tuyau de section lentement variable $S(x)$ (cf figure 6 p. 31) de sorte que la vitesse puisse être considérée comme presque parallèle à l'axe Ox. On note toujours :

$$\begin{cases} p = p_0 + p_1(x,t) \\ \mu = \mu_0 + \mu_1(x,t) \\ \overrightarrow{v} \approx v_1(x,t)\,\overrightarrow{e}_x \end{cases}$$

14. Le premier harmonique est l'harmonique 3, une douzième, à savoir une octave plus une quinte, au dessus du fondamental : la clarinette «quintoie»

15. pour les instruments de musique, on ne parle pas de fabricant sauf, bien sûr, dans le cas de flutes à bec en plastique

L'équation d'Euler linéarisée et la thermodynamique dans le cadre de transformations adiabatiques réversibles donnent toujours d'une part :

$$\mu_0 \, \frac{\partial \overrightarrow{v}_1}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}} \, p_1 = 0$$

soit ici, en projection :

$$\mu_0 \, \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \, \chi_S \, \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

Par contre, l'équation de conservation de la masse nous conduirait à une erreur subtile car la divergence de la vitesse ne se résume pas à $\frac{\partial v_1}{\partial x}$; en effet, la vitesse comporte un composante radiale certes négligeable mais qui varie du tout au tout si l'on traverse radialement le tuyau d'un bord à l'autre, donc sur une distance petite devant celle qui, dans le sens du tuyau, donne une variation significative de section. Il vaut mieux la remplacer par un bilan de masse entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ pendant un temps $\mathrm{d}t$. Il entre en x au premier ordre $\delta_e m = \mu_0 \, S(x) \, v_1(x) \, \mathrm{d}t$ et il sort en $x + \mathrm{d}x$ au premier ordre $\delta_e m = \mu_0 \, S(x + \mathrm{d}x) \, v_1(x + \mathrm{d}x) \, \mathrm{d}t$ et le bilan est :

$$\mathrm{d}m = \mu_0 \, [S(x) \, v_1(x) - S(x + \mathrm{d}x) \, v_1(x + \mathrm{d}x)] \, \mathrm{d}t = -\mu_0 \, \frac{\partial}{\partial x}(S \, v_1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

et on a par ailleurs la masse à l'instant t dans la tranche de volume constant égal au premier ordre à $S(x) \, \mathrm{d}x$ qui est $m(t) = \mu(t) \, S(x) \, \mathrm{d}x$ et à l'instant $t + \mathrm{d}t$ $m(t + \mathrm{d}t) = \mu(t + \mathrm{d}t) \, S(x) \, \mathrm{d}x$; on a donc aussi :

$$\mathrm{d}m = [\mu(t + \mathrm{d}t) - \mu(t)] \, S(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \, \mathrm{d}t \, S(x) \, \mathrm{d}x$$

En égalant les deux expressions, on arrive après simplification à :

$$\mu_0 \, \frac{\partial}{\partial x}(S \, v_1) + S(x) \, \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \, \frac{\partial}{\partial x}(S \, v_1) + \mu_0 \, \chi_S \, S(x) \, \frac{\partial p_1}{\partial t} = \mu_0 \, \frac{\partial}{\partial x}(S \, v_1) + \frac{1}{c^2} \, S(x) \, \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0$$

où c est la vitesse du son définie plus haut. En développant, on arrive à :

$$\mu_0 \, S(x) \, \frac{\partial v_1}{\partial x} + \mu_0 \, \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \, v_1 + \frac{1}{c^2} \, S(x) \, \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0$$

Dérivons par rapport au temps pour utiliser $\mu_0 \, \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$ (cf supra la conservation de la masse ; on arrive successivement à :

$$\mu_0 \, S(x) \, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} + \mu_0 \, \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \, \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \, S(x) \, \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$$

$$S(x)\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\,S(x)\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{1}{S(x)}\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

Cette équation est parfois appelée équation de WEBSTER [16].

On se place maintenant dans le cas d'un pavillon exponentiel pour lequel la section est $S(x) = S_0 \exp\left(\frac{x}{a}\right)$ (il n'est réellement à section lentement variable que si sa longueur totale reste assez petite devant a). L'équation précédente devient alors :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{1}{a}\,\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

Une onde plane en $\exp\ j\,(\omega\,t - k\,x)$ est solution de cette équation si, après quelques calculs de routine :

$$k^2 + \frac{j\,k}{a} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Pour ω donné, c'est une équation du second degré en k de discriminant $\Delta = -\frac{1}{a^2} + \frac{4\,\omega^2}{c^2}$. Si $\omega < \omega_c = \frac{c}{2\,a}$, les solutions sont imaginaires pures et ne correspondent, on le sait bien (voir physique ondulatoire), à une absence de propagation ; le pavillon a donc un comportement de filtre passe-bas. Si $\omega > \omega_c = \frac{c}{2\,a}$, alors $k = \frac{1}{2}\left(-\frac{j}{a} \pm \sqrt{\Delta}\right)$ compatible avec des ondes propagatives directes ou rétrogrades, donc aussi stationnaires, mais avec un coefficient d'amortissement en $\exp\left(-\frac{x}{2\,a}\right)$. Toutefois, ce facteur se retrouvera dans la vitesse et puisque $S(x) = S_0 \exp\left(\frac{x}{a}\right)$, la puissance totale transportée $\mathcal{P}(x) = S(x)\,p_1(x)\,v_1(x)$ sera constante : l'amortissement ne provient que de la répartition d'une puissance constante sur une surface croissante [17].

Quel est l'intérêt de ce pavillon ? Augmenter la surface sans perdre d'énergie. Quel intérêt à augmenter la surface ? Il suffit de relire plus haut le paragraphe 1.h p. 15 concernant la transmission du son au passage d'une discontinuité de surface d'un tuyau pour y trouver la réponse.

1.j Sillage de Mach.

La figure 7 p. 34 schématise la trajectoire rectiligne uniforme d'un mobile, disons un avion, se déplaçant dans un fluide, l'air dans l'exemple, à une vitesse V supersonique, c'est-à-dire supérieure à la vitesse du son c dans le fluide. On y a placé des positions A, B, C, D et E du mobile à des instants régulièrement espacés, notés respectivement $t = -4\,T$, $t = -3\,T$, $t = -2\,T$, $t = -T$ et $t = 0$ et deux à deux distantes de $L = V\,T$.

Les perturbations engendrées par le passage du mobile en A à l'instant $t = -4\,T$ se sont propagées, dans l'air initialement au repos, d'une distance $4\,c\,T$ (notée $4\,l$ avec $l = c\,T$)

16. Arthur Gordon Webster, physicien américain, 1863–1923.
17. cf le facteur $\frac{1}{r}$ des ondes sphériques.

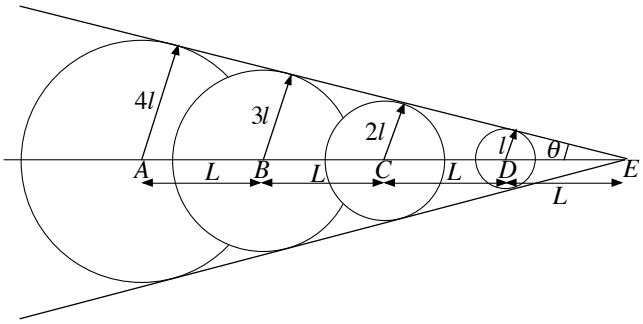

FIGURE 7 – Sillage de Mach.

entre $t = -4\,T$ et $t = 0$ et ceci dans toutes les directions. La zone perturbée, à l'instant $t = 0$, par ce passage est donc l'intérieur d'une sphère de centre A et de rayon $4\,l$. De même, la zone perturbée, à l'instant $t = 0$, par le passage du mobile en B à l'instant $t = -3\,T$ est donc l'intérieur d'une sphère de centre B et de rayon $3\,l$ et ainsi de suite pour les sphères de centres C et D et de rayons respectifs $2\,l$ et l.

Toujours à l'instant $t = 0$, l'ensemble de la zone perturbée par le passage du mobile en tous les points de sa trajectoire en amont de sa position à cet instant est la réunion des intérieurs de ces sphères et aussi de celles qu'on pourrait concevoir sur ce principe aux instants intermédiaires à ceux de l'exposé. La figure est suffisamment parlante pour se convaincre qu'il s'agit d'un cône de révolution de sommet E, tangent à toutes ces sphères et de demi-angle au sommet θ tel que :

$$\sin\theta = \frac{l}{L} = \frac{c\,T}{V\,T} = \frac{c}{V}$$

Il est tout aussi aisé de se convaincre que ce cône se déplace avec le mobile, son sommet étant confondu avec la position de celui-ci. Si le vol est horizontal, ce cône découpe le sol, supposé ici horizontal, selon une branche d'hyperbole, mobile à la vitesse V et séparant la zone où l'on n'entend pas le mobile de celle où on l'entend. Le passage de cette séparation au niveau d'un promeneur est perçue comme le fameux « bang supersonique ».

2 Ondes de surface en faible profondeur. Modèle de Saint-Venant.

2.a Le modèle de Saint-Venant.

Il s'agit d'un modèle simpliste, attribué à Adhémar BARRÉ de SAINT-VENANT [18], permettant d'étudier les déformations unidirectionnelles de la surface d'un liquide incompres-

18. ingénieur, physicien et mathématicien français, 1797–1886.

sible de masse volumique μ occupant un bassin à fond plat horizontal. Au repos le liquide a une hauteur H. La pression atmosphérique p_0 est uniforme et stationnaire.

Lorsque la surface se déforme, on note $h(x,t) = H + \zeta(x,t)$ la hauteur de liquide à l'instant t et à l'abscisse x, indépendamment de l'ordonnée y (modèle unidirectionnel). On supposera ici que le bassin a une largeur constante L selon y. Les variations de niveau sont supposées petites ($|\zeta| \ll H$). Elles s'accompagnent de mouvement de liquide dont on néglige les composantes verticales par rapport aux composantes horizontales, simple conséquence de la petitesse des changements de niveau. On néglige aussi l'épaisseur de la couche limite au fond du bassin en considérant que la vitesse est indépendante de la cote z ; on note donc la vitesse $\overrightarrow{v} = v(x,t)\,\overrightarrow{e_x}$. Enfin, la pression au sein de fluide dans le champ de pesanteur vertical est notée $p(x,z,t)$.

2.b Ondes de surface.

• Etude de la pression.

Projetons l'équation d'Euler, soit :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p$$

sur la verticale ; puisque $\overrightarrow{v}$ est horizontale, on obtient :

$$0 = -g - \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial z}$$

d'où par intégration et sachant qu'en $z = h(x,t)$, en surface donc, on trouve la pression atmosphérique p_0 :

$$p(x,z,t) = p_0 + \mu\, g\,[h(x,t) - z]$$

• Bilan de masse.

On considère l'évolution d'une « tranche » de fluide sur la largeur L entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ (voir figure 8 p. 36).

A l'instant t sa masse est au premier ordre $M(t) = \mu\, L\, h(x,t)\,\mathrm{d}x$ et à l'instant $t + \mathrm{d}t$ elle est $M(t + \mathrm{d}t) = \mu\, L\, h(x, t + \mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x$; elle varie donc de :

$$\mathrm{d}M = M(t + \mathrm{d}t) - M(t) = \mu\, L\,[h(x, t + \mathrm{d}t) - h(x,t)]\,\mathrm{d}x = \mu\, L\,\frac{\partial h}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

On peut calculer cette variation autrement : pendant $\mathrm{d}t$ il est entré [19] à l'abscisse x une masse $\delta M_e = \mu\, L\, h(x,t)\, v(x,t)\,\mathrm{d}t$ et dans le même temps il est sorti de l'abscisse $x + \mathrm{d}x$

19. voir le chapitre A-VI consacré aux bilans dans la partie des méthodes de la physique.

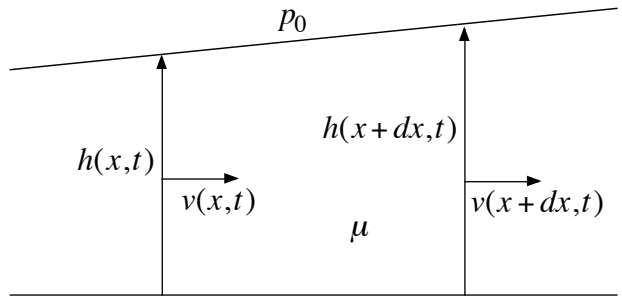

FIGURE 8 – Bilan de masse.

une masse $\delta M_s = \mu\, L\, h(x+\mathrm{d}x,t)\, v(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t$; le bilan en est :

$$\mathrm{d}M = \delta M_e - \delta M_s = \mu\, L\,[h(x,t)\, v(x,t) - h(x+\mathrm{d}x,t)\, v(x+\mathrm{d}x,t)]\,\mathrm{d}t = -\mu\, L\,\frac{\partial}{\partial x}(h\, v)\, dx\,\mathrm{d}t$$

En égalant les deux expressions et après simplification, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\, v) = 0$$

Pour des mouvements de faible amplitude, on peut linéariser cette équation en négligeant les termes d'ordre deux. Ici $h\, v = (H+\zeta)\, v = H\, v + \zeta\, v \approx H\, v$ et par ailleurs, puisque H est une constante, $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, d'où finalement :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{(équation 6)}$$

• **Bilan de quantité de mouvement.**

On s'intéresse à la projection sur l'axe horizontal de la quantité de mouvement, notée ici q_x pour éviter la confusion avec la pression, d'un système constitué à l'instant t de la tranche précédemment étudiée et de ce qui y entrera pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ et donc constitué à l'instant $t+\mathrm{d}t$ de la tranche à cet instant et de ce qui en est sorti. Pour raisonner, il suffit de multiplier les différentes masses calculées plus haut par la vitesse correspondante. On a donc au premier ordre :

$$q_x(t) = M(t)\, v(x,t) + \delta M_e\, v(x,t) = \mu\, L\, h(x,t)\, v(x,t)\,\mathrm{d}x + \mu\, L\, h(x,t)\, v(x,t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$q_x(t+\mathrm{d}t) = M(t+\mathrm{d}t)\, v(x,t+\mathrm{d}t) + \delta M_s\, v(x+\mathrm{d}x,t) = \cdots$$
$$\cdots = \mu\, L\, h(x,t+\mathrm{d}t)\, v(x,t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x + \mu\, L\, h(x+\mathrm{d}x,t)\, v(x+\mathrm{d}x,t)^2\,\mathrm{d}t$$

d'où par différence et approximation de TAYLOR à l'ordre 1 :

$$\mathrm{d}q_x = q_x(t+\mathrm{d}t) - q_x(t) = \mu\, L\, \frac{\partial}{\partial t}(h\, v)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x + \mu\, L\, \frac{\partial}{\partial x}(h\, v^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

Or le principe fondamental de la dynamique indique que $\frac{\mathrm{d}q_x}{\mathrm{d}t}$ est la somme des forces, en projection horizontale. Les forces de gravité sont verticales et les forces de pression vont être calculées rapidement grâce à leur équivalent volumique $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p$. On a donc, pour le système considéré, de volume $L\, h(x,t)\, \mathrm{d}x$ (la masse entrante ou sortante est d'ordre supérieur) et au premier ordre (la non-uniformité de la hauteur génère des correctifs d'ordre supérieur), $F_x = -L\, h(x,t)\, \mathrm{d}x\, \frac{\partial p}{\partial x}$, soit en utilisant l'expression de la pression établie plus haut :

$$F_x = -L\, h(x,t)\, \mu\, g\, \frac{\partial h}{\partial x}\, \mathrm{d}x$$

et, en égalant F_x et $\frac{\mathrm{d}q_x}{\mathrm{d}t}$, on arrive après simplification à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\, v) + \frac{\partial}{\partial x}(h\, v^2) + g\, h(x,t)\, \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

que l'on linéarise comme ci-dessus (le terme en v^2 est donc négligé) pour arriver à :

$$H\, \frac{\partial v}{\partial t} + g\, H\, \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \qquad \text{(équation 7)}$$

Remarque : La projection sur l'axe des x de l'équation d'EULER où $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\, \overrightarrow{v}$ est d'ordre deux, donc négligé dans le cadre de cette étude, donne, en utilisant l'expression de la pression ci-dessus :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\, \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\mu}\, \mu\, g\, \frac{\partial h}{\partial x} = -g\, \frac{\partial h}{\partial x} = -g\, \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

qui n'est autre que l'**??** simplifiée par H. C'est beaucoup plus rapide mais il est bon que mes lecteurs s'habituent aussi à penser en terme de bilan ; c'est plus universel comme démarche.

• Equation de propagation.

L'équation 6 et l'équation 7 forment le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + H\, \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ H\, \frac{\partial v}{\partial t} + g\, H\, \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

On y élimine v (par exemple) en dérivant la première par rapport à t, la seconde par rapport à x puis en soustrayant [20] membre à membre, ce qui conduit, grâce au théorème de SCHWARTZ sur la commutativité des dérivées partielles à :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g\,H\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

qui donne des solutions propagatives ou stationnaires non dispersives à la vitesse de phase $c = \sqrt{g\,H}$ (voir le chapitre D-II en physique ondulatoire).

• Exemple d'application.

Si le milieu étudié est un bassin de largeur L selon Oy et avec une hauteur d'eau H au repos comme ci dessus, limité par deux parois verticales en $x = 0$ et $x = D$ (une piscine par exemple). Pour la fréquence fondamentale puisque, quelles qu'elle soient, les conditions aux limites sont identiques aux deux extrémités on a successivement :

$$D = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\,f} = \frac{\sqrt{g\,H}}{2\,f}$$

$$f = \frac{\sqrt{g\,H}}{2\,D}$$

Avec $g \approx 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $D = 25$ m et $H = 2,5$ m, on trouve $f = 0,1$ Hz soit une fréquence de 10 secondes. Les amateurs d'eau javelisée [21] peuvent aller contrôler à la piscine la plus proche.

• Exercice de style : modèle à deux couches.

La figure 8 p. 36 montre un modèle à deux fluides incompressibles et non miscibles. Celui du bas a une masse volumique μ_1 et celui du haut une masse volumique μ_2. La hauteur du fluide du bas est H_1 au repos et $h_1(x,t) = H_1 + \zeta_1(x,t)$ en mouvement avec $|\zeta_1| \ll H_1$, sa vitesse est alors pratiquement horizontale de valeur $v_1(x,y)$ et il y règne la pression $p_1(x,z,t)$. La hauteur totale est H_2 au repos et $h_2(x,t) = H_2 + \zeta_2(x,t)$ en mouvement avec $|\zeta_2| \ll H_2$; le fluide du haut a donc une épaisseur $h_2 - h_1$, sa vitesse est pratiquement horizontale de valeur $v_2(x,y)$ et il y règne la pression $p_2(x,z,t)$. A titre d'exercice, les calculs sont laissés à la charge du lecteur ; les résultats intermédiaires seront affirmés sans démonstration.

Les pressions dans les deux fluides vérifient :

$$\begin{cases} p_2(x,z,t) = p_0 + \mu_2\,g\,[h_2(x,t) - z] \\ p_1(x,z,t) = p_0 + \mu_2\,g\,[h_2(x,t) - h_1(x,t)] + \mu_1\,g\,[h_1(x,t) - z] \end{cases}$$

20. ce qui explique, ô mon lecteur, que je n'ai pas simplifié l'équation 7 par H ; tu peux me conserver ta confiance.

21. plutôt qu'anisée

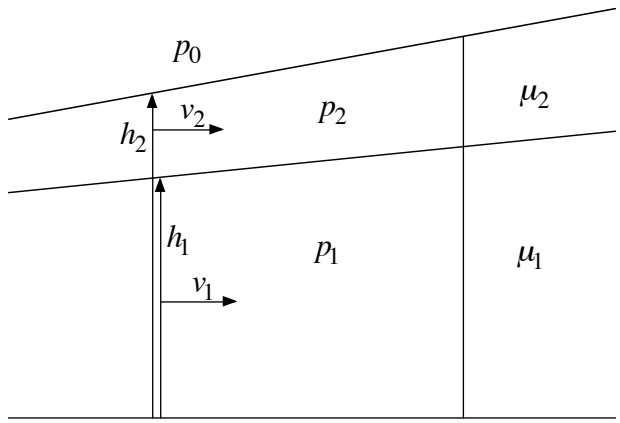

FIGURE 9 – Modèle à deux couches.

où l'on a exploité la continuité de la pression à l'interface.

Les bilans de masse appliqués aux deux fluides conduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_1}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(h_1\, v_1) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(h_2 - h_1) + \dfrac{\partial}{\partial x}[(h_2 - h_1)\, v_2] \end{cases}$$

qui se linéarisent en :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial t} + H_1\, \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\zeta_2 - \zeta_1) + (H_2 - H_1)\, \dfrac{\partial v_2}{\partial x} \end{cases}$$

Les bilans de quantité de mouvement appliqués aux deux fluides conduisent à :

$$\begin{cases} \mu_1\, \dfrac{\partial}{\partial t}(h_1\, v_1) + \mu_1\, \dfrac{\partial}{\partial x}(h_1\, v_1^2) + \mu_2\, g\, h_1\, \left[\dfrac{\partial h_2}{\partial x} - \dfrac{\partial h_1}{\partial x}\right] + \mu_1\, g\, h_1\, \dfrac{\partial h_1}{\partial x} = 0 \\ \\ \mu_2\, \dfrac{\partial}{\partial t}[(h_2 - h_1)\, v_2] + \mu_2 \dfrac{\partial}{\partial x}[(h_2 - h_1)\, v_2^2] + \mu_2\, g\, (h_2 - h_1)\, \dfrac{\partial h_2}{\partial x} \end{cases}$$

qui se linéarisent (on néglige donc les termes en v^2) en :

$$\begin{cases} \mu_1\, H_1\, \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + \mu_2\, g\, H_1\, \left[\dfrac{\partial \zeta_2}{\partial x} - \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right] + \mu_1\, g\, H_1\, \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial x} = 0 \\ \\ \mu_2\, (H_2 - H_1)\, \dfrac{\partial v_2}{\partial t} + \mu_2\, g\, (H_2 - H_1)\, \dfrac{\partial \zeta_2}{\partial x} \end{cases}$$

L'élimination, respectivement de v_1 et v_2 conduit à :

$$\begin{cases} \mu_1 \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} = \mu_2 \, c_1^2 \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2} + (\mu_1 - \mu_2) \, c_1^2 \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} = (c_2^2 - c_1^2) \dfrac{\partial^2 \zeta_2}{\partial x^2} \end{cases}$$

où l'on a noté $c_1^2 = g \, H_1$ et $c_2^2 = g \, H_2$.

La recherche de solutions en $\zeta_1 = \zeta_{1m} \exp i \, (\omega \, t - k \, x)$ et $\zeta_2 = \zeta_{2m} \exp i \, (\omega \, t - k \, x)$ conduit, en posant $\mu_2 = \mu_1 \, (1 - \varepsilon)$, à :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \varepsilon \, c_1^2 \, k^2 & -(1 - \varepsilon) \, c_1^2 \, k^2 \\ \\ -\omega^2 & \omega^2 - (c_2^2 - c_1^2) \, k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{1m} \\ \\ \zeta_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

On n'a de solutions non nulles que si le déterminant est nul, ce qui fournit l'équation de dispersion :

$$\omega^4 - [\varepsilon \, c_1^2 + (c_2^2 - c_1^2) + (1 - \varepsilon) \, c_1^2] \, k^2 \, \omega^2 + \varepsilon \, c_1^2 \, (c_2^2 - c_1^2) \, k^4 = 0$$

$$\omega^4 - c_2^2 \, k^2 \, \omega^2 + \varepsilon \, c_1^2 \, (c_2^2 - c_1^2) \, k^4 = 0$$

qui fournit au signe près deux vitesses de phase $\frac{\omega}{k}$ et pour chacune d'elle le rapport $\frac{\zeta_{1m}}{\zeta_{2m}}$.

Un cas particulier intéressant est le modèle océanique à deux couches du chapitre B-XIV (influence de forces de Coriolis sur l'interface entre courant superficiel d'eau chaude et eau froide profonde) où ε est positif et très petit. Au premier ordre en ε, les carrés de vitesses de phase sont :

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} \left\{ c_2^2 \pm \left[c_2^2 - 2 \, \varepsilon \, c_1^2 \left(1 - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) \right] \right\}$$

et l'on calculera le rapport des amplitudes en reportant ces expressions dans la relation :

$$\frac{\zeta_{1m}}{\zeta_{2m}} = \frac{\frac{\omega^2}{k^2} - (c_2^2 - c_1^2)}{\frac{\omega^2}{k^2}}$$

tirée du système d'équations en ζ_{1m} et ζ_{2m}.

Avec le signe plus et au premier ordre non nul en ε, soit ici l'ordre nul, on a :

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_2^2 = g \, H_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\zeta_{1m}}{\zeta_{2m}} = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{H_2}{H_1}$$

La vitesse est la même qu'un océan de même hauteur en une seule couche et les amplitudes sont proportionnelle aux hauteurs à l'équilibre, les déformations verticales sont

« bêtement » en proportion de la position de départ. Ce type d'onde correspond à une houle tout à fait ordinaire. Rien à voir, circulez !

Avec le signe moins et au premier ordre non nul en ε, soit ici l'ordre un, on a :

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \varepsilon\, c_1^2 \left(1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}\right) = \varepsilon\, g\, \frac{H_1\,(H_2 - H_1)}{H_2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\zeta_{1m}}{\zeta_{2m}} = -\varepsilon\, \frac{c_1^2}{c_2^2} = -\varepsilon\, \frac{H_1}{H2}$$

Dans notre cas, ε est extrêmement petit devant l'unité et de plus $(H_2 - H_1)$ est assez petit devant H_1 et donc H_2 ; la vitesse de propagation de ce type d'onde est donc extrêmement lente. Par ailleurs ζ_{2m} est très petit par rapport à ζ_{2m} et de signe opposé. Dans ce modèle non dispersif, ces conclusions restent valables pour la propagation d'un soliton et l'énorme masse d'eau chaude qui traverse l'Océan Pacifique lors du phénomène El Niño (voir chapitre B-XIV au même endroit que ci-dessus) est comprise entre une petite bosse en surface et un énorme creux en dessous et effectue le trajet en une bonne semaine.

Attention, nous utilisons le modèle en dehors de son domaine de validité (à savoir une faible épaisseur). Il donne toutefois des résultats qualitativement corrects qu'il serait très difficile de mettre en évidence avec le formalisme correct qui va suivre.

3 Ondes de surface : la houle.

3.a Houle de gravité.

• Linéarisation.

L'axe Oz est vertical ascendant. On cherche des ondes de surface sinusoïdales propagatives unidirectionnelles en $\exp j\,(\omega\, t - k\, x)$, ce qui suppose que les équations aient été linéarisées. Il faut pour cela que que l'accélération convective, non linéaire, soit négligeable devant l'accélération temporelle (cf équation d'Euler). En ordre de grandeur, une dérivation par rapport au temps (respectivement à l'espace) revient à diviser par un temps (resp. une longueur) caractéristique, soit pour un phénomène ondulatoire par la période T (resp. la longueur d'onde λ). Donc la condition

$$\left\| (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, \overrightarrow{v} \right\| \ll \left\| \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} \right\|$$

devient

$$v \frac{v}{\lambda} \ll \frac{v}{T} \qquad \text{soit} \qquad v \ll \frac{\lambda}{T} = \frac{v_\varphi\, T}{T} = v_\varphi$$

ce qui signifie que les vitesses matérielles des quasi-particules doivent être négligeables devant la vitesse immatérielle de propagation de l'onde.

Une autre formulation possible, plus parlante, est la suivante : si l'amplitude des mouvements est notée a pour un phénomène est sinusoïdal de pulsation ω, alors l'amplitude de

la vitesse est $a\,\omega$ de l'ordre de $\frac{a}{T}$. La condition $v \ll \frac{\lambda}{T}$ devient $\frac{a}{T} \ll \frac{\lambda}{T}$, soit $a \ll \lambda$ ce qui signifie que l'amplitude du mouvement (en pratique la différence d'altitude entre les creux et les sommets des vagues pour l'amplitude « crête-crête ») doit être négligeable devant la longueur d'onde (en pratique la distance entre deux sommets successifs de vagues) ; les marins appellent cela une mer peu creusée.

• Existence et exploitation d'un potentiel des vitesses.

En régime sinusoïdal de pulsation ω, l'accélération temporelle est, en notation complexe,

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = j\,\omega\,\overrightarrow{v}$$

Reportons dans l'équation d'Euler, en y négligeant $(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\overrightarrow{v}$

$$j\,\omega\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(g\,z + \frac{p}{\mu}\right)$$

où l'on a tenu compte que μ et constant puisqu'il s'agit d'un liquide, donc d'un fluide incompressible. Prenons-en le rotationnel, en se souvenant que le rotationnel d'un gradient est nul

$$j\,\omega\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

L'écoulement est irrotationnel donc le champ de vitesses dérive d'un potentiel ; on note $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$. Le fluide est incompressible, donc div $\overrightarrow{v} = 0$ soit div $\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi\right) = \Delta\Phi = 0$

Puisqu'on veut que le phénomène sinusoïdal propagatif unidirectionnel soit aussi un phénomène de surface, on va rechercher un potentiel de la forme $\Phi = f(z)\,\cos(\omega\,t - k\,x)$, d'où :

$$0 = \delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = f''(z)\,\cos(\omega\,t - k\,x) + 0 - k^2\,f(z)\,\cos(\omega\,t - k\,x)$$

soit, après simplification :

$$f''(z) = k^2\,f(z)$$

• Résolution en profondeur infinie.

○ *Expression du potentiel.*

Une mer très profonde pourra être assimilée à une mer de profondeur infinie. Il suffit pour cela que sa profondeur soit grande devant la longueur d'onde, distance entre les crêtes de deux vagues successives. Ici donc, «la mer est infinie... et mes rêves sont fous» [22].

22. poème de Jean de la Ville de Mirmont (1886–1914) mis en musique par Gabriel Fauré (1845–1924) dans son cycle de chants "L'horizon chimérique" opus 118, à écouter sur Internet.

La solution générale de l'équation précédente peut s'écrire $A\,\exp(k\,z)+B\,\exp(-k\,z)$. Le second terme diverge quand on s'éloigne indéfiniment vers le bas ; on doit donc choisir $B=0$ et l'on peut peut donc écrire, en changeant légèrement la notation, $f(z)=\Phi_0\,\exp(kz)$

◦ ***Mouvement de l'eau.***

On a donc $\Phi=\Phi_0\,\exp(k\,z)\,\cos(\omega\,t-k\,x)$ donc les composantes de la vitesses sont

$$v_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=k\,\Phi_0\,\exp(k\,z)\,\sin(\omega\,t-k\,x)$$

$$v_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0$$

$$v_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=k\,\Phi_0\,\exp(k\,z)\,\cos(\omega\,t-k\,x)$$

On est tenté d'intégrer la vitesse pour trouver le mouvement, mais attention ! On n'a pas quelque chose comme[23] $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(t)$ mais $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(t,x,z)$ qu'on ne sait pas résoudre. Si l'amplitude du mouvement est $a\ll\lambda$, alors $k\,x$ et $k\,z$ varient au plus de $k\,a=2\,\pi\,\dfrac{a}{\lambda}\ll 1$ et l'on peut donc considérer dans le second membre que x reste voisin d'une valeur moyenne x^* et z de z^*, d'où $f(z)\approx f(z^*)$ et $\cos(\omega\,t-k\,x)\approx\cos(\omega\,t-k\,x^*)$ et, là, on peut intégrer, d'où, en assimilant les constantes d'intégrations aux coordonnées de la position moyenne x^* et z^* de la particule choisie,

$$x(t)=x^*-\frac{k}{\omega}\,\Phi_0\,\exp(k\,z^*)\,\cos(\omega\,t-k\,x^*)$$

$$y(t)=y^*$$

$$z(t)=z^*+\frac{k}{\omega}\,\Phi_0\,\exp(k\,z^*)\,\sin(\omega\,t-k\,x^*)$$

où l'on reconnaît un mouvement circulaire dans le sens horaire et dont le rayon $\frac{k}{\omega}\,\Phi_0\,\exp(k\,z^*)$ décroît exponentiellement avec la profondeur. La houle est donc bien un phénomène surfacique.

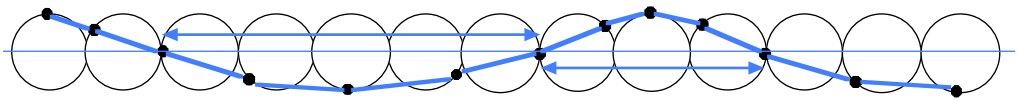

FIGURE 10 – La houle.

La figure 10 p. 43 montre huit particules de la surface avec un mouvement circulaire d'amplitude un peu exagérée (pour la lisibilité) et déphasées les unes des autres d'un huitième de tour. La surface a été naïvement tracée en joignant leurs positions à un même

23. Dans l'approximation linéaire de l'étude, les approches lagrangienne et eulérienne se confondent.

instant (trait bleu épais). On remarque que par rapport au niveau moyen (trait bleu mince), la largeur des crêtes est plus petite que la largeur des creux (doubles flèches bleues), ce que le lecteur vérifiera la prochaine fois qu'il sera en mer.

◦ ***Expression de la pression.***

L'équation d'Euler, dans le cadre de la linéarisation et avec un fluide incompressible donne :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} \approx \frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = \overrightarrow{g} - \frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

$$\frac{\partial\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi}{\partial t} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(g\,z + \frac{p}{\mu}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\,z + \frac{p}{\mu}\right) = 0$$

L'expression dont le gradient est nul ne dépend ni de x, ni de y, ni de z, elle pourrait dépendre du temps, mais il ne faut pas s'en soucier : c'est un faux problème. En effet, on peut, sans changer le champ de vitesses (qui, seul, a une réalité physique) ajouter au potentiel n'importe quelle fonction du temps ; on choisira celle-ci de façon que la grandeur considérée soit constante et même nulle. Donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\,z + \frac{p}{\mu} = 0$$

En reportant l'expression de Φ, on en déduit celle de la pression (laissé à la charge du lecteur).

◦ ***Conditions aux limites à la surface.***

Soit $\zeta(x,t)$ l'équation de la surface de l'eau, l'origine de Oz étant la surface au repos. Pour $z = \zeta(x,t)$ la pression est égale à la pression atmosphérique uniforme et stationnaire, notée p_0, d'où en reportant dans le résultat précédent :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\,\zeta + \frac{p_0}{\mu} = 0$$

Ensuite, c'est tout bête, on dérive par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

Tout aussi bêtement $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ est la vitesse verticale de la surface de la mer qui se confond avec la vitesse de la quasi-particule d'eau en surface, soit $v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, d'où en reportant :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

qui, en reportant l'expression de Φ va nous donner l'équation de dispersion.

C'est tout bête ? Non c'est très bête ! C'est loin d'être aussi simple qu'il n'y paraît. Il y a là deux erreurs théoriques grossières, heureusement négligeables ; encore faut-il le montrer. Allons-y, Alonso ! [24].

On a dit qu'en surface, c'est à dire que pour $z = \zeta(x,t)$, la pression est p_0, soit en explicitant la substitution de $\zeta(x,t)$ à z dans les arguments de $\Phi(x,z,t)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, \zeta(x,t), t) + g\,\zeta(x,t) + \frac{p_0}{\mu} = 0$$

Les règles de dérivation des fonctions composées [25] conduisent à

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t}\,\frac{\partial \zeta}{\partial t} + g\,\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

Au vu des expressions de Φ, vis-à-vis des dérivations par rapport à x ou z, on a une même distance caractéristique en $\frac{1}{k}$ ou λ et le temps caractéristique est la période T. Quant à ζ, on a noté a l'ordre de grandeur de l'amplitude du mouvement. Le premier terme de l'équation ci-dessus a donc pour ordre $\frac{\Phi}{T^2}$ et le second $\frac{\Phi}{\lambda T}\,\frac{a}{T}$; on peut donc négliger le second devant le premier si $a \ll \lambda$ ce qui est l'hypothèse initiale de travail.

De même, l'affirmation que la vitesse verticale de la surface de la mer se confond avec la vitesse de la quasi-particule d'eau en surface est bien légère car une particule en surface n'y reste pas et donc le mouvement de la surface n'est pas le même que celui de la particule. Imaginons une particule qui soit en surface à un instant particulier τ ; ses coordonnées notées $x_P(\tau)$ et $z_P(\tau)$ vérifient donc

$$z_P(\tau) = \zeta(x_P(\tau), \tau)$$

A un instant t appartenant à un intervalle de temps de part et d'autre de l'instant τ la particule est sous la surface, notons

$$z_P(t) = \zeta(x_P(t), t) + \Delta z(t)$$

$$\text{avec} \qquad \Delta z(t) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \Delta z(\tau) = 0$$

24. Réplique-culte dans *Pierrot le fou* de Jean-Luc Godard (1965).
25. On les retrouve aisément à partir de la différentielle

$$\mathrm{d}\Phi^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi^*}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

où $\Phi^* = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, dans laquelle on remplace la différentielle $\mathrm{d}z$ par

$$\mathrm{d}\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

et il suffit d'extraire le coefficient de $\mathrm{d}t$.

Dérivons par rapport au temps avec les mêmes complications que plus haut

$$\frac{\mathrm{d}z_P}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x_P(t), t) + \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x_P(t), t)\,\frac{\mathrm{d}x_P}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}\Delta z}{\mathrm{d}t}(t)$$

En particulier en $t = \tau$ où Δz est manifestement maximal donc de dérivée nulle

$$\frac{\mathrm{d}z_P}{\mathrm{d}t}(\tau) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x_P(\tau), \tau) + \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x_P(\tau), \tau)\,\frac{\mathrm{d}x_P}{\mathrm{d}t}(\tau)$$

A un instant donné, on peut confondre vitesse lagrangienne et eulérienne (voir le chapitre sur les outils de la mécanique des fluides) donc ici $\frac{\mathrm{d}x_P}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}z_P}{\mathrm{d}t}$ avec $v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, soit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Mais pour les mêmes raisons que ci-dessus, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ a pour ordre de grandeur $\frac{\Phi}{\lambda}$ et le terme supplémentaire $\frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ a pour ordre de grandeur $\frac{a}{\lambda}\frac{\Phi}{\lambda}$ et est lui aussi négligeable toujours parce que $a \ll \lambda$

Subtil, tout cela, non ?

◦ ***Relation de dispersion.***

Reportons donc $\Phi = \Phi_0\,\exp(k\,z)\,\cos(\omega\,t - k\,x)$ dans l'équation $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ désormais validée comme approximation du même ordre que les hypothèses de linéarisation ; on arrive à :

$$-\omega^2\,\Phi_0\,\exp(k\,z)\,\cos(\omega\,t - k\,x) + k\,\Phi_0\,\exp(k\,z)\,\cos(\omega\,t - k\,x) = 0$$

soit encore, après simplifications, $\omega^2 = g\,k$. Puisque ω n'est pas proportionnel à k, le milieu (la surface de la mer) est dispersif. On peut exprimer la vitesse de phase en fonction de ω (donc de la fréquence ou de la période) ou de k (donc du nombre ou de la longueur d'onde) ; par exemple

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k}\,\sqrt{g\,k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\,\lambda}{2\,\pi}}$$

A titre d'exemple, une houle dont les vagues seraient distantes de cinq mètres se propagerait à la vitesse de $2,8$ mètres par seconde soit quasiment dix kilomètres à l'heure. Il ne nous reste qu'à aller à la plage et à le vérifier, en se dévouant ainsi corps et âme à la science.

• Résolution en profondeur finie.

On se place dans un bassin de profondeur finie H et l'on prend l'origine au fond. Reprenons les choses au minimum [26].

26. Il faut gouverner l'Empire comme on fait frire un petit poisson. Lao Tseu.

La première modification porte sur la condition aux limites : la vitesse du fluide est tangentielle au contact du fond du bassin. On a donc au fond ($z = 0$) $v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ d'où en repartant de $\Phi = f(z)\,\cos(\omega\,t - k\,x)$, $f'(0) = 0$.

En écrivant cette fois la solution générale de l'équation différentielle à l'aide de fonctions hyperboliques : $A\,\mathrm{ch}(k\,z) + B\,\mathrm{sh}(k\,z)$, on en déduit $B = 0$. On notera

$$\Phi = \Phi_0\,\mathrm{ch}(k\,z)\,\cos(\omega\,t - kx)$$

La condition en surface donne :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

devient cette fois :

$$-\Phi_0\,\omega^2\,\mathrm{ch}(k\,z)\,\cos(\omega\,t - kx) + g\,k\,\phi_0\,\mathrm{sh}(k\,z)\,\cos(\omega\,t - kx) = 0 \quad \text{à la surface}$$

soit

$$\omega^2 = g\,k\,\mathrm{th}(k\,z) \quad \text{à la surface}$$

Or la surface est en $z = H + \zeta(x,t) \approx H$ d'où

$$\omega^2 = g\,k\,\mathrm{th}(k\,H)$$

Pour H très grand devant $\lambda = 2\,\pi/k$, $\mathrm{th}(k\,H) \sim 1$ et l'on retrouve le résultat d'une mer infiniment profonde ; pour H très petit devant $\lambda = 2\,\pi/k$, $\mathrm{th}(k\,H) \sim k\,H$ et l'on trouve :

$$\omega^2 = g\,H\,k^2$$

d'où

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g\,H}$$

N'oublions pas de remarquer qu'en eau peu profonde, la vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence et que le milieu n'est pas dispersif, au contraire d'une mer profonde.

Remarque : de $\Phi = \Phi_0\,\mathrm{ch}(k\,z)\,\cos(\omega\,t - k\,x)$, on tire :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = k\,\Phi_0\,\mathrm{ch}(k\,z)\,\sin(\omega\,t - k\,x) \\ \\ v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = k\,\Phi_0\,\mathrm{sh}(k\,z)\,\cos(\omega\,t - k\,x) \end{cases}$$

et le rapport des amplitudes des deux composantes de la vitesse est :

$$\frac{v_{zm}}{v_{xm}} = \frac{k\,\Phi_0\,\mathrm{sh}(k\,z)}{k\,\Phi_0\,\mathrm{ch}(k\,z)} = \frac{\mathrm{sh}(k\,z)}{\mathrm{ch}(k\,z)} = \mathrm{th}(k\,z) \leqslant \mathrm{th}\,k\,H$$

Si $H \ll \lambda$, alors $k\,H$ est négligeable ainsi que $k\,z$ car $z < H$, $\mathrm{sh}(k\,z)$ est négligeable et $\mathrm{ch}(k\,z)$ égal à l'unité. Donc v_z est négligeable et v_x ne dépend pas de z, ce qui valide a posteriori le modèle de Saint-Venant.

3.b Rides de capillarité.

Reprenons l'étude en tenant compte des phénomènes de capillarité. On se placera, pour fixer les idées, en profondeur infinie. Les calculs précédents sont inchangés jusque l'exploitation, exclue, des conditions aux limites donc jusque la relation suivante, incluse :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\,z + \frac{p}{\mu} = 0$$

A la surface, il y a une discontinuité de pression en $A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}\right)$ où A est la tension superficielle de l'eau (en présence d'air) et où R_1 et R_2 sont deux rayons de courbures dans deux directions orthogonales. Dans notre cas avec invariance selon Oy, l'un des rayons est infini et le second celui de la courbe, à un instant donné, d'équation $z = \zeta(x,t)$; les mathématiciens, qui sont gens affables et serviables, nous affirment qu'alors :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

qui donne un rayon de courbure algébrique positif si la concavité est dirigée vers le haut.

En ordre de grandeur $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1$ dont le carré, d'ordre deux est parfaitement négligeable dans nos hypothèses de travail ; d'où $\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$. La pression limite de l'eau en surface est donc $p_0 - A\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ (le signe moins tient compte de la convention algébrique pour R et des lois de la capillarité : la pression est plus grande dans le milieu qui emplit la concavité). Enfin, on a vu qu'avec nos approximations, on a $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, ce qui suffit à se convaincre [27] que ζ est en $\exp i(\omega\,t - k\,x)$ donc que $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -k^2\,\zeta$. En surface, on a donc dans l'eau une pression $p_0 + k^2\,\zeta$ et la relation $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\,z + \frac{p}{\mu} = 0$ y devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\,\zeta + \frac{p_0}{\mu} + \frac{A\,k^2}{\mu}\,\zeta = 0$$

On poursuit alors comme plus haut, avec la même approximation cachée, d'où par dérivation temporelle

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{A\,k^2}{\mu}\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

et en reportant l'expression de Φ :

$$\omega^2 = g\,k + \frac{A}{\mu}\,k^3$$

27. La figure 10 p. 43 ne contredit cette affirmation que parce qu'elle ne respecte pas l'hypothèse $a \ll \lambda$.

relation de dispersion dont on tire la vitesse de phase ($v_\varphi = \frac{\omega}{k}$) en fonction soit de ω, soit de k, plus parlant dans le cas de la houle, car k est lié à la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\,\pi}{k}$ aisé à visualiser pour la houle (distance entre crêtes successives ; on a donc :

$$v_\varphi^2 = \frac{g}{k} + \frac{A}{\mu}\,k$$

Pour $k \ll \frac{\mu\,g}{A}$ (grandes longueurs d'onde), $v_\varphi = \sqrt{\frac{g}{k}}$ et l'on retrouve les ondes de gravité précédemment étudiées. Pour $k \gg \frac{\mu\,g}{A}$ (petites longueurs d'onde), $v_\varphi = \sqrt{\frac{A}{\mu}\,k}$ et l'on dit avoir affaire à des rides de capillarité. Dans les cas intermédiaires, il est aisé de monter que la vitesse de phase passe par un minimum égal à $v_{min} = \left(\frac{4\,A\,g}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}}$ obtenu pour $k = \frac{\mu\,g}{A}$.

Pour l'eau avec $g = 9,81\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, $\mu = 10^3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ et $A = 75\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, on trouve une vitesse minimale de $0,23\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ pour une longueur d'onde de $17\cdot 10^{-3}$ m.

3.c Génération de la houle par le vent : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.

Montrer que la houle est possible, c'est bien mais insuffisant. On sait pertinemment qu'une vibration finit toujours par s'amortir par quelque phénomène dissipatif négligé (ici, ce sera la viscosité) et qu'il faut donc s'intéresser aux phénomènes excitateurs. Pas besoin d'être marin au long cours pour remarquer que plus le vent est violent, plus la houle est forte.

On va donc gérer plus finement l'interaction de l'eau avec l'atmosphère. On se place encore dans le cadre d'une onde de surface sinusoïdale propagative unidirectionnelle d'amplitude négligeable devant la longueur d'onde et dans le cas le plus simple d'une profondeur infinie ; l'altitude nulle est celle de la surface au repos.

Pour les mouvements de l'eau, de masse volumique μ_1, on reprend mot pour mot, ou presque, ce qui a déjà été étudié, en adaptant à peine les notations. On choisit un potentiel des vitesses :

$$\Phi_1 = f_1(z)\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x)$$

de laplacien nul et donnant une vitesse nulle en $z \to -\infty$, d'où $f_1(z) = \varphi_1\ \exp(k\,z)$ où φ_1 est une constante.

L'équation d'Euler conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} + g\,z + \frac{p}{\mu_1} = 0$$

soit, en régime sinusoïdal

$$i\,\omega\,\Phi_1 + g\,z + \frac{p}{\mu_1} = 0$$

On a vu que dans le cadre de l'hypothèse de faible amplitude que $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, dérivée temporelle de l'altitude de la surface de la mer en mouvement s'identifie à $\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}z}$ calculé rigoureusement pour $z = \zeta$, en bonne approximation pour $z = 0$, d'où :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = i\,\omega\,\zeta = \left.\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = \varphi_1\,k\ \exp(k\,z)|_{z=0}\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x) = \varphi_1\,k\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x)$$

d'où

$$\zeta = -\frac{i\,k}{\omega}\,\varphi_1\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x)$$

En surface, la pression[28], notée p_S, s'obtient en remplaçant dans la conséquence de l'équation d'Euler, z par ζ dans $g\,z$ et (cf supra) par 0 dans Φ_1 d'où successivement :

$$i\,\omega\ \Phi_1|_{z=0} + g\,\zeta + \frac{p_S}{\mu_1} = 0$$

$$p_S = -i\,\omega\,\mu_1\ \Phi_1|_{z=0} - \mu_1\,g\,\zeta = \cdots$$

$$\cdots = -i\,\omega\,\mu_1\,\varphi_1\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x) + \frac{i\,k}{\omega}\,\mu_1\,g\,\varphi_1\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x) = \cdots$$

$$\cdots = i\,\mu_1\left(\frac{k\,g}{\omega} - \omega\right)\varphi_1\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x)$$

Pour l'air, on va considérer que c'est un fluide incompressible de masse volumique μ_2 (voir le chapitre B-XIII pour la validité de cette approximation) ; les seules différences avec l'eau sont qu'il occupe l'espace de $z = 0$ à $z = +\infty$ et que l'on suppose que, loin de la surface, il a une vitesse uniforme et stationnaire, horizontale, notée $U_2\,\overrightarrow{e_x}$.

Pour éviter d'avoir à gérer cette vitesse non nulle loin de la surface, on se place dans un référentiel mobile par rapport au sol à cette vitesse-là ; la nouvelle abscisse x' est liée à l'ancienne x par la relation $x = U_2\,t + x'$. La conséquence essentielle est que la phase $\omega\,t - k\,x$ se réécrit $(\omega - k\,U_2)\,t - k\,x'$ et donc que ω est remplacé formellement par $\omega - k\,U_2$, ce qui du reste n'est qu'un banal effet Doppler.

On choisit pour l'air, dans le référentiel relatif, un potentiel des vitesses :

$$\Phi = f_2(z)\ \exp i\,[(\omega - k\,U_2)\,t - k\,x']$$

de laplacien nul et donnant une vitesse (relative) nulle en $z \to +\infty$, d'où, en remarquant bien le changement de signe dans l'exponentielle réelle, $f_2(z) = \varphi_2\ \exp(-k\,z)$ où φ_2 est une constante.

L'équation d'Euler dans le référentiel relatif conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} + g\,z + \frac{p}{\mu_2} = 0$$

28. ou plutôt la partie propagative de la pression qui s'ajoute à la pression à l'équilibre.

soit, en régime sinusoïdal

$$i\,(\omega - k\,U_2)\,\Phi_2 + g\,z + \frac{p}{\mu_2} = 0$$

Une fois de plus, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, dérivée temporelle de l'altitude de la surface de la mer en mouvement s'identifie à $\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}z}$ calculé rigoureusement pour $z = \zeta$, en bonne approximation pour $z = 0$, d'où, dans le référentiel relatif :

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = i\,(\omega - k\,U_2)\,\zeta = \left.\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = -\varphi_1\,k\ \exp(-k\,z)|_{z=0}\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x) = -\varphi_1\,k\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x)$$

d'où

$$\zeta = \frac{i\,k}{(\omega - k\,U_2)}\,\varphi_1\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x)$$

où l'on a écrit $\omega\,t - k\,x$ pour $(\omega - k\,U_2)\,t - k\,x'$, ce qui est parfaitement équivalent.

En surface, la pression p_S, s'obtient encore une fois en remplaçant dans la conséquence de l'équation d'Euler, z par ζ dans $g\,z$ et par 0 dans Φ_1 d'où successivement :

$$i\,(\omega - k\,U_2)\ \Phi_2|_{z=0} + g\,\zeta + \frac{p_S}{\mu_2} = 0$$

$$\begin{aligned} p_S &= -i\,(\omega - k\,U_2)\,\mu_2\ \Phi_2|_{z=0} - \mu_2\,g\,\zeta = \cdots \\ \cdots &= -i\,(\omega - k\,U_2)\,\mu_2\,\varphi_2\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x) - \frac{i\,k}{(\omega - k\,U_2)}\,\mu_2\,g\,\varphi_2\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x) = \cdots \\ \cdots &= -i\,\mu_2\left(\frac{k\,g}{(\omega - k\,U_2)} + (\omega - k\,U_2)\right)\varphi_2\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x) \end{aligned}$$

toujours avec $\omega\,t - k\ = (\omega - k\,U_2)\,t - k\,x'$

Il ne reste qu'à raccorder les deux solutions, celle dans l'eau et celle dans l'air. Elles doivent donner d'une part la même vitesse verticale pour la surface donc :

$$\zeta = -\frac{i\,k}{\omega}\,\varphi_1\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x) = \frac{i\,k}{(\omega - k\,U_2)}\,\varphi_2\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x)$$

d'où $\varphi_2 = -\varphi_1\,\frac{(\omega - k\,U_2)}{\omega}$ et d'autre part la même pression en surface, soit en reportant le dernier résultat puis en simplifiant et ordonnant après multiplication par ω :

$$i\,\mu_1\left(\frac{k\,g}{\omega} - \omega\right)\varphi_1\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x) = -i\,\mu_2\left(\frac{k\,g}{(\omega - k\,U_2)} + (\omega - k\,U_2)\right)\varphi_2\ \exp i\,(\omega\,t - k\,x)$$

$$\mu_1\left(\frac{k\,g}{\omega} - \omega\right) = \mu_2\left(\frac{k\,g}{(\omega - k\,U_2)} + (\omega - k\,U_2)\right)\frac{(\omega - k\,U_2)}{\omega}$$

$$\mu_1 \left(k\,g - \omega^2\right) = \mu_2 \left[k\,g + (\omega - k\,U_2)^2\right]$$
$$0 = (\mu_1 + \mu_2)\,\omega^2 - 2\,\mu_2\,U_2\,k\,\omega - (\mu_1 - \mu_2)\,g\,k + \mu_2\,k^2\,U_2^2$$

qui est l'équation de dispersion liant ω et k.

Si l'on cherche la pulsation correspondant à une valeur donnée de la longueur d'onde (distance entre deux crêtes) donc à une valeur donnée de k, l'équation du second degré en ω a pour discriminant réduit :

$$\Delta' = \mu_2^2\,U_2^2\,k^2 + (\mu_1^2 - \mu_2^2)\,g\,k - (\mu_1 + \mu_2)\,\mu_2\,k^2\,U_2^2 = (\mu_1^2 - \mu_2^2)\,g\,k - \mu_1\,\mu_2\,k^2\,U_2^2$$

Bien que ce ne soit pas nécessaire pour la suite du raisonnement, utilisons le fait qu'ici (les fluides sont l'eau et l'air) on a $\mu_2 \ll \mu_1$ d'où

$$\Delta' \approx \mu_1^2\,g\,k - \mu_1\,\mu_2\,k^2\,U_2^2 = \mu_1\,k\,(\mu_1\,g - \mu_2\,k\,U_2^2)$$

Il ne reste qu'à discuter le signe de Δ' sans céder à la facilité qui nous ferait intervertir les conclusions. Si $\Delta' > 0$ tout se passe bien dans notre modèle et on a des solutions sinusoïdales progressives, *mais* il faut comprendre que, dans ce cas, les phénomènes dissipatifs négligés vont introduire un amortissement et que donc l'onde *n*'est *pas* entretenue. Un contraire si $\Delta' < 0$, il y a pour ω deux solutions imaginaires conjuguées dont une correspond classiquement à une onde amortie exponentiellement et l'autre à une onde spontanément croissante exponentiellement. Il faut se garder d'exclure cette seconde solution car dès que l'amplitude a atteint une grande valeur, les non-linéarités ne sont plus négligeables et elle finissent par borner la solution. Comprenons qu'à partir d'une fluctuation statistique, l'onde pourra croître spontanément jusqu'à la limite de le linéarité et c'est ainsi que le vent génère la houle.

La condition pour que le vent génère une houle est donc $\Delta' < 0$ soit de façon brute puis en introduisant la longueur d'onde par $\omega = \frac{2\,\pi}{\lambda}$:

$$k > \frac{\mu_1\,g}{\mu_2\,U_2^2}$$

$$\lambda < \frac{2\,\pi\,\mu_2\,U_2^2}{\mu_1\,g}$$

Avec $\mu_1 = 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\mu_2 = 1,3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et $g = 9,8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, un vent de vitesse $U_2 = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3,6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ (une « très légère brise » en marine) ne génère que des vagues de longueur d'onde maximale égale à environ 1 mm (il faudrait alors en fait tenir compte de la capillarité) et la mer est calme ; avec un vent de $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 36\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ (une « bonne brise » en marine), on arrive à un clapotis de 1 dm et avec un ouragan de $50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 180\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ à une houle de $2,5$ m qui, une fois générée en haute mer, peut se propager sur des centaines voire des milliers de kilomètres.

Ce mécanisme est connu sous le nom d'*instabilité de* KELVIN-HELMHOLTZ.

On pourra bien sûr écouter [29] le troisième et dernier mouvement de *La Mer* de Claude Debussy, intitulé *Le dialogue du vent et de la mer*.

3.d Sillage de Kelvin

• Conditions d'obtention d'un sillage.

La figure 11 p. 53, qui s'inspire de la figure 7 p. 34, montre différentes positions successives équidistantes dans le temps et l'espace d'un mobile en translation uniforme à la surface de l'eau, notées A, A' et A''. Par rapport au sillage de Mach, le problème se complique du fait que le milieu est dispersif et qu'il va falloir bien gérer la vitesse de phase v_φ et celle de groupe v_g et leur dépendance envers la pulsation ω. La vitesse du mobile est notée V.

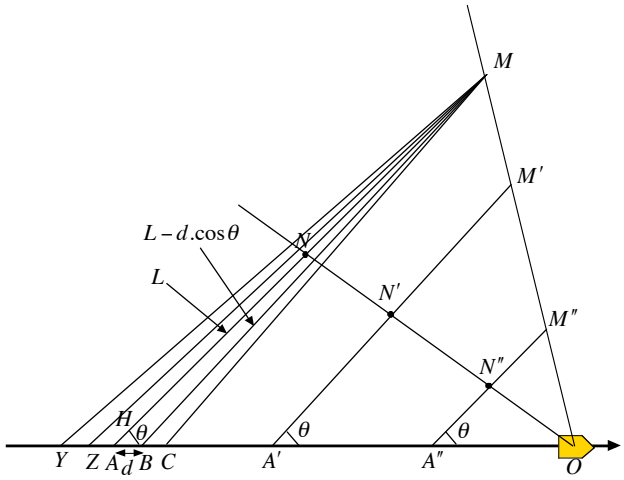

Figure 11 – Sillage de Kelvin (1).

Commençons par proposer un modèle de perturbations engendrées par le passage du mobile. Quand le centre de celui-ci passe en un point A, ses différentes parties génèrent localement toutes sortes de signaux en forme de courte oscillation, en gros de courts trains d'onde sinusoïdaux de fréquences diverses. Un de ceux-ci, de pulsation ω, a une courte durée au cours de laquelle le mobile se déplace d'un point Y à un point C, en passant par les points Z, A et B (entre autres). La déformation qui lui correspond est en gros liée au mobile [30] et est donc réémise à l'identique par les différents points évoqués ci-dessus avec un retard lié à la vitesse du mobile.

Considérons un point M quelconque et demandons nous si le même train d'onde émis

29. On le trouvera aisément sur Internet.
30. Que le lecteur regarde par dessus bord la prochaine fois qu'il prend un bateau, le profil de la surface a, pour partie, une forme fixe par rapport au navire.

successivement par les points Y, Z, A, B et C (entre autres) y provoquent une oscillation notable.

◦ ***Condition sur la phase.***

Une première condition porte sur la phase : les différentes contributions des différents points doivent donner des interférences constructives, c'est à dire arriver en phase soit encore en même temps. Prenons comme origine le passage du mobile en A et comparons dans un premier les temps d'arrivée en M des perturbations émises en $t = 0$ au point A et en $t = \tau = \frac{AB}{V} = \frac{d}{V}$ en B (on note $d = AB$).

En notant $L = AM$, la perturbation émise à $t = 0$ en A arrive en M au temps $t = \frac{L}{v_\varphi}$ où la vitesse de phase v_φ est calculée pour la pulsation ω de la perturbation considérée et en notant $L' = BM$, la perturbation émise à $t = \tau$ en B arrive en M au temps $t = \tau + \frac{L'}{v_\varphi}$. On veut donc sous forme brute puis optimisée :

$$\tau + \frac{L'}{v_\varphi} = \frac{L}{v_\varphi}$$

$$\tau = \frac{L - L'}{v_\varphi}$$

En choisissant τ assez petit, l'angle AMB est suffisamment petit pour confondre la longueur $L' = BM$ avec sa projection HM sur AM (on confond, au second ordre près le cosinus de projection avec l'unité) ; d'où

$$L - L' \approx AM - HM = AH = AB\,\cos\theta = d\,\cos\theta = V\,\tau\,\cos\theta$$

où θ est l'angle OAM et O un point quelconque de la trajectoire du mobile. La condition de phase est donc de façon brute puis simplifiée :

$$\tau = \frac{V\,\tau\,\cos\theta}{v_\varphi}$$

$$v_\varphi = V\,\cos\theta$$

Si on reprend l'étude pour les couples de point A et C, A et Z et A et Y, il suffit de changer τ respectivement en $2\,\tau$, $-\tau$ et $-2\,\tau$ et on arrive à la même conclusion, à savoir que les seuls points M où le passage du mobile en A peut produire quelque chose de visible se trouvent dans la direction θ telle que $v_\varphi = V\,\cos\theta$.

Mais ce n'est pas tout.

◦ ***Condition sur l'amplitude.***

Considérons sur la même figure 11 p. 53 que O est la position du mobile en $t = 0$, A, A' et A'' ses positions à $t = -3\,T$, $t = -2\,T$ et $t = -T$ (T est arbitraire). C'est dans la direction θ à partir de ces points que l'on peut espérer observer quelque chose mais la condition de phase ne suffit pas, encore faut-il que l'amplitude soit non négligeable. Or il

s'agit de trains d'onde et l'on sait que la zone d'amplitude non négligeable se propage à la vitesse de groupe v_g calculée pour la pulsation ω du train d'onde. La durée de propagation entre l'instant d'émission et $t = 0$ est, pour les trois points considérés, respectivement $3\,T$, $2\,T$ et T et l'on n'observe donc, à $t = 0$, quelque chose qu'aux points N, N' et N'' à la distance respective $3\,v_g\,T$ de M, $2\,v_g\,T$ de M' et $v_g\,T$ de M'' dans la direction θ calculée précédemment.

Grâce à l'immortel Thalès de Milet, on sait que les points O, N, N' et N'' sont alignés.

◦ ***Variation avec la pulsation.***

La figure 12 p. 55 allège la précédente. On y place la position O du mobile à $t = 0$ et A à $t = -T$ arbitraire ; on a donc $AO = V\,T$. Pour un train d'onde de pulsation ω donné, on trace une droite faisant avec AO un angle θ tel que $v_\varphi = V\,\cos\theta$ et on y place un point M à une distance $AM = v_\varphi\,T$, étant entendu que, physiquement, il ne se passe rien de particulier en ce point ; géométriquement, par contre on a :

$$AM = v_\varphi\,T = V\,\cos\theta\,T = AO\,\cos\theta = AO\,\cos\widehat{OAM}$$

ce qui prouve que le triangle OAM est rectangle en M.

Plaçons sur la même droite un point N à une distance $AN = v_g\,T$, l'étude précédente montre que c'est sur la droite ON que l'on observe une oscillation non négligeable à cette pulsation.

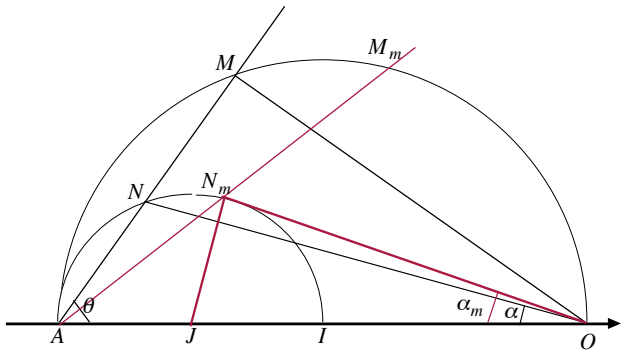

Figure 12 – Sillage de Kelvin (2).

C'est en eau profonde que les choses deviennent spectaculairement simples ; en effet on a vu qu'alors l'équation de dispersion est $\omega^2 = g\,k$ ou $\omega = \sqrt{g\,k}$, ce qui conduit à :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} \qquad \text{et} \qquad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

d'où $v_g = \frac{1}{2}\,v_\varphi$ et N est le milieu de AM.

Faisons maintenant varier ω pour tenir compte de toutes les perturbations élémentaires, v_φ et v_g varient donc l'angle θ et les longueurs AM et AN. Comment allons-nous nous en

sortir ? Plutôt qu'un raisonnement trigonométrique, préférons la bonne vieille géométrie injustement délaissée de nos jours. L'angle AMO est droit, donc, même si tout varie, le point M reste sur le cercle de diamètre AO. De plus $AN = \frac{1}{2}\,AM$ donc si tout varie, le point N varie sur la courbe déduite de ce cercle par homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ donc le cercle de diamètre AI où I est le milieu de AO, de centre J milieu de AI et de rayon $JA = JN = JI = \frac{AO}{4}$.

Quand N décrit ce second cercle, l'angle $\alpha = \widehat{AON}$ varie mais la figure montre à l'évidence qu'il est maximal (on ajoute l'indice « m » partout) lorsque ON est tangent au cercle (position dessinée en rouge). On a alors clairement :

$$\sin \alpha_m = \frac{JN_m}{JO} = \frac{\frac{1}{4}\,AO}{\frac{3}{4}\,AO} = \frac{1}{3}$$

ce qui correspond à $\alpha_m = 19,5^\circ$. Les déformations sont donc incluse dans un secteur de sommet O de demi-angle α_m et d'angle total $2\,\alpha_m = 39^\circ$.

A la différence du sillage de Mach, ce sillage de Kelvin a une forme indépendante de la vitesse du mobile. Le sillage d'un canard et celui d'une vedette d'interception sont identiques.

Figure 13 – Sillage de Kelvin (3).

La figure 13 p. 56 montrent quelques images de sillage trouvées sur internet [31]. Il eût été plus probant qu'elles eussent toutes été prises à la verticale mais elles semblent bien confirmer que le canard, le voilier, le bateau-mouche et le hors-bord ont le même angle de sillage.

31. Je n'ai pas réussi à trouver leurs auteurs.