Chapitre B-XXI

Espaces courbes, le minimum vital.

RÉSUMÉ :

La théorie de la relativité générale s'appuie sur la géométrie des espaces de Riemann, dits espaces courbes. Cette théorie mathématique relève du second cycle universitaire et un exposé rigoureux nécessiterait plusieurs dizaines, voire quelques centaines de pages très au-dessus du niveau moyen présumé en mathématiques des lecteurs que je vise. Se contenter d'un catalogue de résultats à admettre priverait ceux-ci de tout contenu sinon physique, au moins géométrique. J'ai donc tenté ici (je ne suis bien sûr ni le premier ni le dernier) une voie moyenne pour donner du sens à l'outil qui nous sera essentiel dans le prochain chapitre, le tenseur de Riemann-Christoffel.

Après quelques rappels d'algèbre linéaire et une définition intuitive des tenseurs, on donne la définition d'un espace de Riemann, d'une simplicité désarmante ; on introduit la notion déjà connue de base locale et celle de la métrique puis, première immersion dans ce nouveau monde, la notion de dérivée covariante, elle aussi très simple, qui introduit un nouvel outil, les symboles de Christoffel.

Sur deux exemples simples liés l'un à l'autre, on arrive à se doter d'un indicateur servant à distinguer espaces courbes et espaces plats et qui nous conduira au tenseur de Riemann-Christoffel et ses « contractions », le tenseur de Ricci et la courbure scalaire. L'identité de Bianchi qui sera utile dans le prochain chapitre est mentionnée sans démonstration, car celle-ci, uniquement technique, n'apporte rien à la physique.

Table des matières

B-XXI Espaces courbes, le minimum vital. **1**

1 Tenseurs dans un espace vectoriel. 4

1.a Base vectorielle, composantes d'un vecteur. 4

1.b Formes linéaires. 5

1.c Formes bilinéaires. Espace métrique euclidien. 5

1.d Bijection entre vecteurs et formes linéaires. 6

1.e Endomorphismes linéaires. 7

1.f Comportements dans un changement de base. 7

1.g Tenseurs, définition pragmatique. 9

2 Espaces courbes. 9

2.a Coordonnées généralisées et base vectorielle naturelle. 9

2.b Base locale et métrique. 10

2.c Dérivation covariante. Symboles de Christoffel. 12

2.d Lien des symboles de Christoffel avec la métrique. 16

2.e Tenseurs de courbure. 18

2.f Exemple de calcul de tenseurs de courbures. 23

1 Tenseurs dans un espace vectoriel.

Il s'agit ici de quelques rappels simples de mathématique sur les espaces vectoriels, déjà abordés plus en détail dans le chapitre sur l'analyse vectorielle, repris ici pour une lecture autonome du chapitre. Seule la notation utilisée peut dérouter, mais on s'y fait très vite et dès qu'on l'a comprise, on ne peut plus jamais s'en passer. Une fois que l'on aura compris tout cela, seul l'état d'esprit servira à la compréhension de la suite de ce chapitre.

1.a Base vectorielle, composantes d'un vecteur.

En physique classique, l'espace est ramené à un espace vectoriel à trois dimensions et en relativité restreinte à un espace à quatre dimensions.

Une base vectorielle y est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants ; à titre d'exemple, en trois dimensions, les physiciens les notent plutôt $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ et les mathématiciens e_1, e_2 et e_3 (sans flèches). Nous proposerons ici une initiation à l'algèbre tensorielle qui sous-tend la théorie de la relativité générale, initiation a minima, et nous utiliserons les indices numériques.

Un vecteur $\overrightarrow{x}$ de l'espace vectoriel ou un vecteur position de l'espace affine $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM}$ sera présenté comme une combinaison linéaire des trois vecteurs de base dont les coefficients sont appelées composantes du vecteur, soit pour le physicien, puis le mathématicien :

$$\overrightarrow{x} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

$$x = x^1\,e_1 + x^2\,e_2 + x^3\,e_3$$

On remarquera que, par convention d'écriture, les vecteurs de base comportent un indice en bas à droite, qualifié d'indice *covariant* et les composantes un indice en haut à droite, qualifié d'indice *contravariant*.

On peut aussi écrire $x = \sum_{i=1}^{i=3} x^i\,e_i$ et même puisque la dimension de l'espace est connue $x = \sum_i x^i\,e_i$. Remarquons que l'on aurait pu aussi bien écrire $x = \sum_j x^j\,e_j$ ou encore $x = \sum_k x^k\,e_k$; le nom que l'on donne a l'indice n'est pas significatif, on l'appelle *indice muet*. A la limite, on pourrait écrire $\overrightarrow{x} = \sum_\circ x^\circ\,e_\circ$ en laissant au lecteur le choix du nom de l'indice à mettre dans le petit rond.

Pour donner une fluidité à la lecture, nous adopterons une notation, appelée *convention de sommation d'*EINSTEIN, qui consiste à sous-entendre le signe somme pour un indice muet, que l'on reconnaît au fait qu'il figure deux fois dans l'expression, une fois covariant, une fois contravariant. Désormais un vecteur sera noté $x = x^i\,e_i$.

Remarque : un même indice ne peut être répété que deux fois dans une expression, une fois de façon covariante, une autre de façon contravariante. Tout autre forme de répétition (deux indices covariants ou deux contravariants) ou toute répétition multiple (trois occurences ou plus) est forcément fautive.

1.b Formes linéaires.

Une forme linéaire, notée ici a par exemple, est une application linéaire qui à tout vecteur x associe un réel (ou un complexe). Par définition de la linéarité, à tout vecteur $x = x^i\, e_i$, la forme a associe :

$$a(x) = a(x^i\, e_i) = x^i\, a(e_i)$$

Notons $a_i = a(e_i)$, on a donc $a(x) = a_i\, x^i$.

Si l'on note e^1 la forme linéaire qui à tout vecteur x associe sa composante x^1 et plus généralement e^i la forme linéaire qui lui associe sa i-ième composante, on peut écrire :

$$a(x) = a_i\, e^i(x)$$

ce qui montre que la forme a est combinaison linéaires des formes e^i que l'on note $a = a_i\, e^i$.

L'ensemble des formes linéaires est donc un espace vectoriel de dimension trois, appelé *espace dual*, les formes e^i en constituent une base, appelée *base duale* et les coefficients a_i sont les composantes de la forme dans la base duale.

Dans l'espace proprement dit, les vecteurs de base sont covariants et les composantes d'un vecteur contravariants et dans l'espace dual, les vecteurs de base sont contravariants et les composantes d'une forme linéaire covariants.

1.c Formes bilinéaires. Espace métrique euclidien.

• Formes bilinéaires.

Une forme bilinéaire, notée ici a par exemple, est une application linéaire vis-à-vis des deux vecteurs qui à tout couple ordonné de vecteurs x et y associe un réel (ou un complexe). Par définition de la linéarité, à tout couple ordonné de vecteurs $x = x^i\, e_i$ et $y = y^j\, e_j$ (on donne au second indice muet un autre nom pour éviter toute confusion), la forme a associe :

$$a(x, y) = a(x^i\, e_i, y^j\, e_j) = x^i\, a(e_i, y^j\, e_j) = x^i\, y^j\, a(e_i, e_j)$$

où ici la convention d'EINSTEIN escamote la notation d'une sommation double ($\sum_i \sum_j$). Notons $a_{ij} = a(e_i, e_j)$, on a donc $a(x, y) = a_{ij}\, x^i\, y^j$.

A trois dimensions, pour fixer les idées, on peut considérer que l'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel de dimension neuf (trois au carré) dont une base est l'ensemble des formes bilinéaires qui au couple de vecteurs x et y associe le produit d'une composante de x et d'une composante de y, ce qui donne $3 \times 3 = 9$ vecteurs de base. On les note traditionnellement $e^i \otimes e^j$ et l'on peut donc écrire $a = a_{ij}\, e^i \otimes e^j$.

• Espace métrique euclidien.

On se définit une *métrique* dans un espace vectoriel par la donnée d'un *produit scalaire* qui est une forme bilinéaire privilégiée $g(x,y) = g_{ij}\, x^i\, y^j$ telle que pour tout vecteur x non nul, on ait $g(x,x) = g_{ij}\, x^i\, x^j$ strictement positif. On appelle alors norme de x la grandeur notée $\|x\|$ et définie par $\|x\| = \sqrt{g_{ij}\, x^i\, x^j}$ et produit scalaire de x et y, noté $x \cdot y$, la valeur prise par la forme pour le couple x et y, soit $x \cdot y = g(x,y) = g_{ij}\, x^i\, y^j$.

1.d Bijection entre vecteurs et formes linéaires.

A tout vecteur $x = x^i\, e_i$, on peut associer une forme linéaire que nous noterons provisoirement $\tilde{x}$ qui a tout vecteur $y = y^j\, e_j$ associe le produit scalaire $x \cdot y$, soit :

$$\tilde{x}(y) = \tilde{x}(y^j\, e_j) = x \cdot y = g_{ij}\, x^i\, y^j$$

Or, dans la base duale, $\tilde{x}$ doit s'écrire $a_j\, e^j$ et $\tilde{x}(y)$ doit donc s'écrire $a_j\, y^j$. Par identification on doit donc avoir pour tout j :

$$a_j = g_{ij}\, x^i$$

Remarque : nous rencontrons ici pour la première fois une situation où un même indice est répété une fois de chaque côté d'une égalité. Dans ce cas, ses deux occurences doivent être de la même nature covariante ou contravariante et il n'y a a pas de sommation sous entendue ; il faut au contraire comprendre que l'égalité est valable pour toutes les valeurs de cet indice. Il ne s'agit plus d'un indice muet mais d'un *indice libre*.

On peut montrer que cette association entre un vecteur et une forme linéaire est bijective, ce qui permet dans une certaine mesure d'identifier le vecteur $x = x^i\, e_i$ et la forme $\tilde{x}$ dont on supprimer le tilde dont on notera désormais x_i les composantes dans la base duale, soit $x = x_i\, e^i$ (avec $x_i = g_{ij}\, x^j$). Cette identification est encore plus naturelle avec une base orthonormée. Désormais, on confond vecteur et forme linéaire associée et, par abus de langage, on parlera du vecteur x_i ou x^i (au lieu de x identifié $\tilde{x}$) c'est-à-dire que l'on considère un vecteur et forme linéaire associée comme deux présentations d'une même entité.

1.e Endomorphismes linéaires.

On appelle endomorphisme linéaire une application linéaire, notée ici f, qui à tout vecteur $x = x^i\, e_i$ associe un autre vecteur $y = f(x) = y^j\, e_j$. Par linéarité, on doit avoir :

$$y^j\, e_j = f(x^i\, e_i) = x^i\, f(e_i)$$

On introduit les composantes de chacun des $f(e_i)$ par ses composantes de la base de l'espace vectoriel soit $f(e_i) = f_i^j\, e_j$, d'où :

$$y^j\, e_j = x^i\, f_i^j\, e_j$$

La décomposition d'un vecteur sur une base est unique, on en déduit que pour tout indice j, on a :

$$y^j = f_i^j\, x^i$$

L'endomorphisme linéaire est donc caractérisée par la donnée des f_i^j (on parlera donc, par abus de langage, de l'endomorphisme f_i^j en le confondant avec ses coefficients) dans lesquelles on reconnaît les coefficients de la matrice de cet endomorphisme, dans la présentation classique ; l'indice contravariant correspond aux lignes et l'indice covariant aux colonnes. Au vu de la position des indices, on dit qu'un endomorphisme est une fois covariant et une fois contravariant.

La composition (non commutative) de deux endormorphismes f et g est notée $h = g \circ f$ est définie par $h(x) = g \circ f(x) = g[f(x)]$; en utilisant plus rapidement les outils introduits jusqu'ici, on a :

$$h(x) = g[f(x)] = g[f(x^i\, e_i)] = g[(f_i^j\, x^i)\, e_j] = g_k^j\, (f_i^j\, x^i)\, e_k$$

ce qui montre que les coefficients de h se calculent par :

$$h_i^k = g_j^k\, f_i^j$$

où l'on retrouve la règle du produit de matrices.

1.f Comportements dans un changement de base.

• Matrice de passage.

Quand on passe d'une base (nous dirons l'ancienne base) dont les vecteurs sont notés e_i à une autre base (nous dirons la nouvelle base) dont les vecteurs sont notés $e'_{i'}$, il faut connaître les composantes des vecteurs de la nouvelles base dans l'ancienne. On note :

$$e'_{i'} = p_{i'}^i\, e_i$$

qui n'est rien d'autre que la présentation tensorielle de la matrice de passage p. En appelant p' la matrice inverse on a aussi :

$$e_i = {p'}^{i'}_{i}\, e_{i'}$$

Remarque : puisque les matrices sont inverses, leur produit est la matrice unité ce que l'on peut exprimer par ${p'}^{i}_{j}\, p^{j}_{k} = \delta^{i}_{k}$ et $p^{i}_{j}\, {p'}^{j}_{k} = \delta^{i}_{k}$ où δ^{i}_{k} est le symbole de Kronecker, nul si $i \neq j$ et égal à l'unité si $i = j$; (ne pas y voir autre chose qu'une notation).

• Comportement des vecteurs.

Soit un vecteur x quelconque. Dans l'ancienne base, on l'écrit $x = x^i\, e_i$, soit en y reportant l'expression des vecteurs de l'ancienne base dans la nouvelle $x = x^i\, {p'}^{i'}_{i}\, {e'}_{i'}$ et par ailleurs il doit s'écrire dans la nouvelle base $x = {x'}^{i'}\, {e'}_{i'}$; on en déduit, par identification, la relation de passage entre anciennes et nouvelles composantes :

$${x'}^{i'} = {p'}^{i'}_{i}\, x^i$$

et un raisonnement symétrique conclurait que :

$$x^i = p^{i}_{i'}\, {x'}^{i'}$$

En comparant avec ces relations entre composantes d'un vecteur et celles liant les deux bases, on remarque que les rôles de la matrice de passage et de son inverse ont été permutés.

• Comportement des formes linéaires.

Soit une forme linéaire a quelconque. Dans l'ancienne base, l'on écrit $a(x) = a_i\, x^i$ et, en y reportant l'expression des anciennes composantes en fonction des nouvelles, on a aussi $a(x) = a_i\, p^{i}_{i'}\, {x'}^{i'}$ et par ailleurs il doit s'écrire dans la nouvelle base $a(x) = {a'}_{i'}\, {x'}^{i'}$; on en déduit, par identification, la relation de passage entre anciennes et nouvelles composantes de la forme linéaire dans la base duale de la nouvelle base :

$${a'}_{i'} = p^{i}_{i'}\, a_i$$

et un raisonnement symétrique conclurait que :

$$a_i = {p'}^{i'}_{i}\, a_{i'}$$

En comparant avec les relations entre composantes d'une forme linéaire et celles liant les deux bases et contrairement aux vecteurs, on remarque que les rôles de la matrice de passage et de son inverse sont identiques.

On laisse au lecteur le soin de monter sur le même principe que pour une forme bilinéaire, on a :

$${a'}_{i'j'} = p^{i}_{i'}\, p^{j}_{j'}\, a_{ij}$$

• **Comportement des endomorphismes.**

Soit un endomorphisme f tel que dans l'ancienne base $y = f(x)$ se traduise par la relation $y^j = f_i^j\, x^i$ et dans la nouvelle $y'^{j'} = f'^{j'}_{i'}\, x'^{i'}$. Compte tenu de ce qui précède, on peut écrire :

$$y'^{j'} = p'^{j'}_j\, y^j = p'^{j'}_j\, f_i^j\, x^i = p'^{j'}_j\, f_i^j\, p^i_{i'}\, x'^{i'}$$

d'où par identification avec $y'^{j'} = f'^{j'}_{i'}\, x'^{i'}$, on a :

$$f'^{j'}_{i'} = p^i_{i'}\, p'^{j'}_j\, f_i^j$$

Dans le changement de base, on utilise la matrice de passage p pour la gestion de l'indice covariant et son inverse p' pour le gestion de l'indice contravariant, exactement comme pour les autres exemples.

1.g Tenseurs, définition pragmatique.

Comme il s'agit ici d'un cours de physique et non d'un cours de mathématiques, je ne chercherai pas à construire un ensemble de tenseurs à partir d'un espace vectoriel par les règles licites de construction d'ensemble en mathématique. Un tenseur sera une entité avec un certain nombre d'indices covariants et contravariants et qui dans un changement de base se transforme par multiplication avec une matrice par indice, celle de passage pour les covariants et son inverse pour les contravariants.

Par exemple a_i^{jk} est un tenseur une fois covariant et deux fois contravariant si et seulement si, dans un changement de base, on a

$$a'^{j'k'}_{i'} = p^i_{i'}\, p'^{j'}_j\, p'^{k'}_k\, a_i^{jk}$$

2 Espaces courbes.

On n'ira pas ici chercher la petite bête dans les définitions. L'outil dont on a besoin pour la relativité générale est éminemment complexe [1] mais je veux que mon lecteur puisse lire le chapitre en entier sans disjoncter.

2.a Coordonnées généralisées et base vectorielle naturelle.

Un *espace de* Riemann est un ensemble de points M appartenant à un espace affine (appelé dans ce chapitre l'espace-support) et dont les points sont repérés par une fonction

1. Albert Einstein a dit « Ne vous inquiétez pas si vous avez des difficultés en maths, je peux vous assurer que les miennes sont bien plus importantes. ».

au moins deux fois continûment dérivable (deux fois dérivable et de dérivées secondes continues) d'un nombre fini de paramètres notés x^1, x^2, etc. Le vecteur position dans l'espace affine-support est notée $\overrightarrow{M}(x^1, x^2, \cdots)$

Un déplacement élémentaire est assimilé au premier ordre à la différentielle de ce vecteur position, c'est classique ; donc avec la convention de sommation d'EINSTEIN :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x_i = \partial_i \overrightarrow{M} \mathrm{d}x^i$$

Nous avons condensé l'écriture en inventant la notation ∂_i pour $\frac{\partial}{\partial x^i}$ avec une notation covariante (indice en bas) ; c'est tentant car dans une sommation masquée par la notation d'EINSTEIN, l'indice muet doit être une fois contravariant (il l'est dans $\mathrm{d}x^i$) et une fois covariant. Certes mais en avions nous le droit ? Pour le savoir, étudions le comportement dans un changement de base défini (cf supra) par $e'_{i'} = p^i_{i'}\, e_i$; on a alors vu que les composantes d'un vecteur se transforment selon $x^i = p^i_{i'}\, x'^{i'}$ et $x'^{i'} = p'^{i'}_{i}\, x^i$. Dans un contexte vectoriel classique (les e_i et les e'_i sont des constantes et les $p^i_{i'}$ aussi), la formule de dérivation d'une fonction composée à plusieurs variable donne (sommation sur i') :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = p'^{i'}_{i}\,\frac{\partial}{\partial x^{i'}}$$

car $x'^{i'} = p'^{i'}_{i}\, x^i$ entraîne que $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = p'^{i'}_{i}$.

On a donc bien bien un comportement de tenseur convariant.

En fait la suite va montrer que c'est plus compliqué mais ne remet pas en question le comportement covariant.

La formule $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \partial_i \overrightarrow{M} \mathrm{d}x^i$ établie ci-dessus suggère de choisir comme base les vecteurs $e_i = \partial_i \overrightarrow{M}$ de sorte l'on ait $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x^i\, e_i$ qui fasse pendant à $\overrightarrow{V} = v^i\, e_i$ pour un vecteur quelconque ; c'est ce qu'on appelle la *base naturelle.*

2.b Base locale et métrique.

Avec des coordonnées cartésiennes, les vecteurs de base sont réputés constants, de façon tacite. Ici, avec des coordonnées généralisées, le vecteur position $\overrightarrow{M}$ est fonction des x^i donc ses dérivées aussi ; les vecteurs de la base naturelle sont fonction du point M où l'on est et forment une *base locale.*

Prenons un exemple simple qui nous servira tout au long de cette partie à éclairer notre propos : la surface d'une sphère de centre O, de rayon R, paramétrée classiquement par l'angle θ entre OM et un axe privilégié qu'on choisit comme axe Oz et l'angle φ entre les plans xOz (Ox choisi arbitrairement) et MOz. On sait, pour l'avoir rencontré des centaines de fois, qu'en introduisant en tout point M une base locale orthonormée composée d'une part $\overrightarrow{u_\theta}$ tangent au méridien c'est-à-dire au grand cercle intersection de la sphère avec le plan contenant Oz et M et orienté dans le sens des θ croissants et d'autre part $\overrightarrow{u_\varphi}$ tangent au parallèle c'est-à-dire au petit cercle intersection de la sphère avec le plan perpendiculaire à Oz passant par M et orienté dans le sens des φ croissants (dans l'espace, on ajoute le vecteur unitaire radial $\overrightarrow{u_R}$). Le déplacement élémentaire est (on ne démontre pas, c'est archi-connu) :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{M} = R\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + R\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

(et dans l'espace, on ajoute $\mathrm{d}R\,\overrightarrow{e_R}$).

Attention : cette relation montre que la base naturelle *n'est pas* $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ mais en identifiant avec $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x^i\,e_i$ et en convenant que l'indice 1 correspond à θ et 2 à φ, c'est :

$$e_1 = e_\theta = R\,\overrightarrow{u_\theta} \qquad e_2 = e_\varphi = R\,\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

Remarque 1 : Appliqué à l'espace tout entier, les coordonnées sphériques (R constant pour la sphère, ne l'est plus ici, on note alors r) ajouteraient comme troisième vecteur de la base locale et d'après les remarques entre parenthèses $e_3 = e_r = \overrightarrow{u_r}$ ce qui montre que les vecteurs de la base naturelle ne sont pas forcément homogènes. C'est choquant pour un physicien mais il doit ici passer sous les fourches caudines des mathématiques.

Remarque 2 : La sphère dans son espace-support tridimensionnel et qui nous sert d'exemple nous donne une vague idée d'espace courbe. Notre espace tridimensionnel tout entier, considéré comme espace de Riemann et qui est son propre espace-support, nous donne celle d'un espace normal, un espace « plat ». Dans la suite, nous allons essayer de trouver un outil mathématique permettant de distinguer un espace courbe d'un espace plat à partir de ces deux exemples.

Avec des coordonnées généralisées, puisque la base est locale, on ne peut définir qu'une métrique locale valable dans un voisinage de tout point donc pour des déplacements élémentaires $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ à partir de ce point. Le produit scalaire de $\overrightarrow{dM} = \mathrm{d}x^i\,e_i$ et $\overrightarrow{dM'} = \mathrm{d}x'^j\,e_j$ est noté :

$$\overrightarrow{dM} \cdot \overrightarrow{dM'} = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x'^j$$

et le carré de la norme de $\overrightarrow{dM} = \mathrm{d}x^i\,e_i$ est :

$$\|\overrightarrow{\mathrm{d}M}\|^2 = \overrightarrow{\mathrm{d}M}^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

avec la différence fondamentale par rapport aux espaces vectoriel classiques que les g_{ij} dépendent des coordonnées du point où l'on est.

On rappelle que par construction, $g_{ij} = \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j}$, soit dans la base naturelle :

$$g_{ij} = \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial x^j}$$

et que par construction (symétrie du produit scalaire) $g_{ij} = g_{ji}$.

Dans l'exemple de la sphère paramétrée par θ (indice 1) et φ (indice 2), supposée appartenir à un espace euclidien à trois dimensions, ce qui impose que la base classique $(\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$ est orthonormée, on a, avec $e_1 = R\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $e_2 = R\,\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$ (cf supra) :

$$g_{11} = R^2 \qquad g_{22} = R^2\,\sin^2\theta \qquad g_{12} = g_{21} = 0$$

Remarque 1 : compte tenu de la symétrie des g_{ij} dans un ensemble à n coordonnées généralisées, il y a $\frac{n\,(n+1)}{2}$ coefficients g_{ij} indépendants, 3 à deux dimensions (cf supra), 6 à trois dimensions (notre espace en coordonnées sphériques par exemple) et, pour la relativité générale, 10 à quatre dimensions.

Remarque 2 : Pour l'espace tridimensionnel contenu dans lui-même, on remplace dans l'exemple de la sphère R constant par r variable (indice 3) et l'on arrive aisément (on ajoute $e_3 = \overrightarrow{u_r}$) à :

$$g_{11} = R^2 \qquad g_{22} = R^2\,\sin^2\theta \qquad g_{33} = 1 \qquad g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0$$

2.c Dérivation covariante. Symboles de Christoffel.

• Définitions.

Considérons un champ de vecteur V, c'est-à-dire une fonction du point appartenant à notre espace de Riemann c'est-à-dire une fonction des coordonnées généralisées x^i, qui soit tangente à l'espace de Riemann dans l'espace-support ; autrement dit, il est combinaison linéaire des vecteurs de la base locale. On note donc, toujours en convention d'Einstein $V = V^i(x^1, x^2, \cdots)\,e_i$ que nous allégerons en $V^i\,e_i$ en tâchant de ne pas oublier que les V^i sont des fonctions des coordonnées.

Entre deux points infiniment proches, la variation de V se confond avec sa différentielle, soit en reprenant la notation ∂_j pour $\frac{\partial}{\partial x^j}$:

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j = \partial_j(V^i\,e_i)\,\mathrm{d}x^j = (\partial_j V^i)\,e_i\,\mathrm{d}x^j + V^i\,\partial_j e_i\,\mathrm{d}x^j$$

où la convention d'Einstein masque ici une sommation double sur i et j. Les vecteurs $\partial_j e_i$, dérivées partielles de vecteurs tangents sont des vecteurs tangents et se projettent donc sur la base locale ; on note traditionnellement Γ leurs composantes, soit :

$$\partial_j e_i = \Gamma^k{}_{ij}\,e_k$$

d'où

$$\mathrm{d}V = \partial_j V^i\,e_i\,\mathrm{d}x^j + V^i\,\Gamma^k{}_{ij}\,e_k\,\mathrm{d}x^j$$

Dans le second terme, permutons le nom des variables muettes i et k, ce qui permettra de visualiser la factorisation possible :

$$\mathrm{d}V = \partial_j V^i\,e_i\,\mathrm{d}x^j + V^k\,\Gamma^i{}_{kj}\,e_i\,\mathrm{d}x^j = \left(\partial_j V^i + \Gamma^i{}_{kj}\,V^k\right)\,e_i\,\mathrm{d}x^j$$

Reste à en tirer les conclusions qui s'imposent. $\mathrm{d}V$ différence de tenseurs est un tenseur, il en est de même pour $\mathrm{d}x^j$ et e_i, donc la quantité $\partial_j V^i + \Gamma^i{}_{kj}\, V^k$ est un tenseur que l'on appelle *dérivée covariante* de V. Par contre, au contraire de ce qui se passe dans un système de coordonnées cartésiennes, $\partial_j V^i$ n'a plus aucune raison d'être un tenseur, donc $\Gamma^i{}_{kj}\, V^k$ et $\Gamma^i{}_{kj}$ non plus. Les $\Gamma^i{}_{kj}$ sont appelés *symboles de* CHRISTOFFEL.

Notations possibles : en pendant à $\partial_j V^i$, la quantité $\partial_j V^i + \Gamma^i{}_{kj}\, V^k$ est notée $D_j V^i$ (comme une dérivée particulaire car il y a une vague ressemblance des contextes), soit $\nabla_j V^i$ (comme un gradient qu'elle généralise) ; on a donc :

$$D_j V^i \quad \text{ou} \quad \nabla_j V^i = \partial_j V^i + \Gamma^i{}_{kj}\, V^k$$

Une autre notation consiste à déporter à droite l'indice de la variable de dérivation et de la faire précéder d'une virgule pour la dérivation partielle et d'un point-virgule pour la dérivation covariante, soit :

$$\partial V^i ; j = \partial V^i , j + \Gamma^i{}_{kj}\, V^k$$

Il faut des yeux de vingt ans pour distinguer $\partial V^i ; j$ de $\partial V^i , j$; mes yeux n'ont plus cet âge, moi non plus [2] ; on n'utilisera pas ou peu cette notation.

• Exemples.

Revenons à la sphère de rayon R et à l'espace tridimensionnel (R devient alors r) avec $e_1 = R\,\overrightarrow{u_\theta}$, $e_2 = R\,\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$ et, dans le second cas, $e_3 = \overrightarrow{u_r}$. Dans l'espace tridimensionnel, en passant par les composantes cartésiennes de $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_\varphi}$ et $\overrightarrow{u_r}$, on montre rapidement que :

$$\frac{\partial \overrightarrow{u_\theta}}{\partial \theta} = -\overrightarrow{u_r} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{u_\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{u_\theta}}{\partial r} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{u_\varphi}}{\partial \theta} = \overrightarrow{0} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{u_\varphi}}{\partial \varphi} = -\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} - \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{u_\varphi}}{\partial r} = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \theta} = \overrightarrow{u_\theta} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial r} = \overrightarrow{0}$$

d'où l'on déduit aisément (voir le lien entre les $\overrightarrow{u}$ et les $\overrightarrow{e}$) mais avec beaucoup de calculs (on n'en voudra pas au lecteur de les « sauter ») :

$$\partial_1 e_1 = r\,\frac{\partial \overrightarrow{u_\theta}}{\partial \theta} = -r\,\overrightarrow{u_r} = -r\,e_3 \quad \text{d'où} \quad \Gamma^1{}_{11} = 0 \quad \Gamma^2{}_{11} = 0 \quad \Gamma^3{}_{11} = -r$$

$$\partial_2 e_1 = r\,\frac{\partial \overrightarrow{u_\theta}}{\partial \varphi} = r\,\cos\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} = \mathrm{cotan}\,\theta\,e_2 \quad \text{d'où} \quad \Gamma^1{}_{12} = 0 \quad \Gamma^2{}_{12} = \mathrm{cotan}\,\theta \quad \Gamma^3{}_{12} = 0$$

2. « Où donc avez vous fui, jours dorés de ma jeunesse ? » dit Lenski dans *Eugène Onéguine* de Pouchkine.

$$\partial_3 e_1 = \overrightarrow{u_\theta} + r\,\frac{\partial \overrightarrow{u_\theta}}{\partial r} = \overrightarrow{u_\theta} + 0 = \frac{1}{r}\,e_1 \quad \text{d'où} \quad \Gamma^1{}_{13} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^2{}_{13} = 0 \quad \Gamma^3{}_{13} = 0$$

et aussi

$$\partial_1 e_2 = r\,\cos\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} + r\,\sin\theta\,\frac{\partial \overrightarrow{u_\varphi}}{\partial \theta} = r\,\cos\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} + 0 = \operatorname{cotan}\theta\,e_2$$

$$\text{d'où} \quad \Gamma^1{}_{21} = 0 \quad \Gamma^2{}_{21} = \operatorname{cotan}\theta \quad \Gamma^3{}_{21} = 0$$

$$\partial_2 e_2 = r\,\sin\theta\,[-\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} - \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta}] = -r\,\sin^2\,\theta\,e_3 - \sin\theta\,\cos\theta\,e_1 \quad \text{d'où}$$

$$\Gamma^1{}_{22} = -\sin\theta\,\cos\theta \quad \Gamma^2{}_{22} = 0 \quad \Gamma^3{}_{22} = -r\,\sin^2\,\theta$$

$$\partial_3 e_2 = \sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} + r\,\sin\theta\,\frac{\partial \overrightarrow{u_\varphi}}{\partial r} = \sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} + 0 = \frac{1}{r}\,e_2 \quad \text{d'où} \quad \Gamma^1{}_{23} = 0 \quad \Gamma^2{}_{23} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^3{}_{23} = 0$$

et enfin

$$\partial_1 e_3 = \frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \theta} = \overrightarrow{u_\theta} = \frac{1}{r}\,e_1 \quad \text{d'où} \quad \Gamma^1{}_{31} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^2{}_{31} = 0 \quad \Gamma^3{}_{31} = -r$$

$$\partial_2 e_3 = \frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi} = \frac{1}{r}\,e_2 \quad \text{d'où} \quad \Gamma^1{}_{32} = 0 \quad \Gamma^2{}_{32} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^3{}_{32} = 0$$

$$\partial_3 e_3 = \frac{\partial \overrightarrow{u_r}}{\partial r} = \overrightarrow{0} \quad \text{d'où} \quad \Gamma^1{}_{33} = 0 \quad \Gamma^2{}_{33} = 0 \quad \Gamma^3{}_{33} = 0$$

et voilà.

Pour la sphère de rayon R plongée dans l'espace tridimensionnel, ça semble simple ; on reprend ce qui précède sans plus parler de e_3. Mais quand on veut le faire, dès la première ligne à adapter, soit $\partial_1 e_1 = -r\,e_3$, on se heurte au problème que $\partial_1 e_1$ a une composante hors de la sphère (dans ce cas, c'est même la seule, mais peu importe). Bien sûr nous allons l'escamoter mais il faut en mesurer l'enjeu. Pour un physicien à deux dimensions qui vivrait sur cette sphère et qui n'aurait pas conscience de la troisième dimension, la composante escamotée ne lui serait pas accessible et il ne se rendrait pas compte de l'escamotage. La seule façon pour lui de se rendre compte qu'il vit dans un espace courbe sera de prendre conscience d'une anomalie engendrée par cet escamotage. Voilà donc un objectif pour la suite de l'exposé.

En, supprimant les lignes qui développent les dérivées partielles de e_3 ou les dérivées partielles par rapport à x^3et dans les résultats de toutes les autres, en supprimant le terme en e_3 s'il n'est pas nul, on obtient, par simple recopie :

$$\Gamma^1{}_{11} = 0 \quad \Gamma^2{}_{11} = 0$$

$$\Gamma^1{}_{12} = 0 \quad \Gamma^2{}_{12} = \operatorname{cotan}\theta$$

$$\Gamma^1{}_{21} = 0 \quad \Gamma^2{}_{21} = \operatorname{cotan}\theta$$

$$\Gamma^1{}_{22} = -\sin\theta\,\cos\theta \quad \Gamma^2{}_{22} = 0$$

• **Symétries des symboles de Christoffell.**

Confrontons la relation de définition des symboles de CHRISTOFFEL, soit $\partial_j e_i = \Gamma^k{}_{ij}\, e_k$, à la définition de la base naturelle, soit $e_i = \partial_i \overrightarrow{M}$, on a donc :

$$\partial_j \partial_i \overrightarrow{M} = \partial^2_{ji} \overrightarrow{M} = \Gamma^k{}_{ij}\, e_k$$

De même, en inversant le rôle des indices i et j, on a :

$$\partial_i \partial_j \overrightarrow{M} = \partial^2_{ij} \overrightarrow{M} = \Gamma^k{}_{ji}\, e_k$$

Or, le paramétrage est choisi de sorte que $\overrightarrow{M}$ soit une fonction deux fois continûment dérivable des coordonnées généralisées (cf supra) ce qui valide le théorème de SCHWARTZ pour tous les couples d'indices, d'où successivement :

$$\forall i \quad \forall j \quad \partial^2_{ji} \overrightarrow{M} = \partial^2_{ji} \overrightarrow{M}$$

$$\forall i \quad \forall j \quad \Gamma^k{}_{ij}\, e_k = \Gamma^k{}_{ji}\, e_k$$

$$\forall i \quad \forall j \quad \left(\Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji}\right)\, e_k = 0$$

Les e_k forment une base vectorielle ; on en déduit donc que leurs coefficients sont nuls soit :

$$\forall i \quad \forall j \quad \forall k \quad \Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$$

Les symboles de CHRISTOFFEL sont donc symétriques par rapport à leurs indices covariants i et j, ce que l'on peut vérifier sur les exemples ci-dessus.

• **Comptage des symboles de Christoffel.**

Dans un ensemble à n paramètres, comptons le nombre de $\Gamma^k{}_{ij}$ indépendants. Compte tenu de la symétrie $\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$, le nombre de couples ij à considérer [3] est $\frac{n\,(n+1)}{2}$ et pour chacun k prend n valeurs. On a donc $\frac{n^2\,(n+1)}{2}$ symboles de CHRISTOFFEL indépendants, 6 à deux dimensions, 18 à trois dimensions et 40 en quatre dimensions (hélas pour nous en relativité générale).

• **Dérivation d'un tenseur covariant.**

On peut reprendre dans son intégralité l'étude précédente, menée pour un vecteur ou tenseur contravariant, cette fois pour une forme linéaire ou tenseur covariant. On épargne

3. Par exemple : il y a n^2 couples dont n avec $i = j$ et donc $n^2 - n = n\,(n-1)$ avec $i \neq j$, égaux deux à deux par symétrie et comptant donc pour moitié moins ; Au total $n + \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

le détail au lecteur ; qu'il se contente d'admettre que l'on retrouve le même type de résultat, il faut juste changer le signe devant le symbole de CHRISTOFFEL. D'où, selon la notation choisie :

$$D_j V_i \quad \text{ou} \quad \nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k{}_{ij}\, V_k$$

$$\partial V_i; j = \partial V_i, j - \Gamma^k{}_{ij}\, V_k$$

2.d Lien des symboles de Christoffel avec la métrique.

• Cas général.

Par définition, la métrique est définie à partir des produit scalaires vecteurs de la base, soit $g_{ij} = e_i \cdot e_j$. Dérivons cette relation par rapport à la coordonnées x^k, on a successivement, en introduisant les symboles de CHRISTOFFEL :

$$\partial_k g_{ij} = (\partial_k e_i) \cdot e_j + e_i \cdot (\partial_k e_j)$$

$$\partial_k g_{ij} = (\Gamma^m{}_{ki}\, e_m) \cdot e_j + e_i \cdot (\Gamma^m{}_{kj}\, e_m)$$

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma^m{}_{ki}\, e_m \cdot e_j + \Gamma^m{}_{kj}\, e_i \cdot e_m$$

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma^m{}_{ki}\, g_{mj} + \Gamma^m{}_{kj}\, g_{im}$$

En conservant la dernière expression et en lui adjoignant deux autres obtenues par permutation circulaire sur les indices i, j et k

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma^m{}_{ki}\, g_{mj} + \Gamma^m{}_{kj}\, g_{im}$$

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma^m{}_{ij}\, g_{mk} + \Gamma^m{}_{ik}\, g_{jm}$$

$$\partial_j g_{ki} = \Gamma^m{}_{jk}\, g_{mi} + \Gamma^m{}_{ji}\, g_{km}$$

Additionnons les deux dernières et soustrayons la première en tenant compte des symétries des Γ et des g qui entraînent des simplifications comme celle de $\Gamma^m{}_{jk}\, g_{mi}$ et de $\Gamma^m{}_{kj}\, g_{im}$, il reste :

$$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} = 2\, \Gamma^m{}_{ij}\, g_{mk}$$

Pour isoler le Γ utilisons le fait que le matrice inverse des g_{ij}, notée (cf supra) g^{ij}, vérifie de par la définition d'une matrice inverse $g_{mk}\, g^{kl} = \delta^l_m$ avec δ^l_m nul si $m \neq l$ et égal à 1 sinon. On a donc

$$(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})\; g^{kl} = 2\, \Gamma^m{}_{ij}\, g_{mk}\, g^{kl} = 2\, \Gamma^m{}_{ij}\, \delta^l_m$$

Dans la sommation sur m au second membre, tous les termes sont nuls sauf celui pour lequel $m = l$ et $\delta^l_m = 1$, d'où :

$$(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})\; g^{kl} = 2\, \Gamma^l{}_{ij}$$

En réorganisant l'écriture et en remplaçant l'indice muet k par m puis l'indice muet l par k, on obtient la relation suivante qui lie les symboles de CHRISTOFFEL aux coefficients de la métrique locale (on tient compte de leur symétrie pour une écriture plus aisée à mémoriser) :

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{km}\ (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$$

Quel intérêt, me diras-tu, ô mon lecteur ? C'est simple, dans l'exemple de calcul des symboles de CHRISTOFFEL, nous avons dû utiliser des formules de dérivation dans l'espace tridimensionnel qui la contient, donc par un raisonnement extrinsèque. La formule que nous venons d'établir permet de calculer ces coefficients sans sortir de la sphère, de façon intrinsèque. Plus besoin de savoir dans quoi elle est contenue, ni même de savoir si quelque chose la contient. Le physicien plat qui vit sur la sphère n'est pas obligé d'inventer quoi que ce soit en dehors de son monde, il n'a plus besoin de métaphysique.

• Cas d'une métrique diagonalisée.

En tout point, par construction, la matrice locale des g_{ij} est symétrique donc diagonalisable et il est rentable de chercher un paramétrage qui la rende diagonale en tout point. Dans ce cas si $i \neq j$, on a $g_{ij} = 0$ et sinon on notera ici γ_i le terme diagonal. Dans ce cas, la matrice inverse est elle aussi diagonale et ses termes diagonaux qu'on peut noter γ^i sont $\gamma^i = \frac{1}{\gamma_i}$.

Dans ce cas dans la formule $\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{km}\ (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$, la seule valeur de l'indice muet m pour lequel g^{km} est non nul est $m = k$ et il vaut alors $\gamma^k = \frac{1}{\gamma_k}$ d'où :

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2\,\gamma_k}\ (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

en adoptant la convention qu'un indice covariant au dénominateur équivaut à un contravariant au numérateur.

Etudions les différentes situations possibles (avec n dimensions), en exploitant la symétrie :

— les trois indices sont égaux. Alors, par exemple :

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2\,\gamma_1}\ (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2\,\gamma_1}\,\partial_1 g_{11}$$

et analogues ; il y a n termes de ce genre.

— les deux indices covariants sont égaux et distincts du contravariant. Alors, par exemple, compte tenu que les termes g_{ij} non diagonaux sont nuls :

$$\Gamma^2{}_{11} = \frac{1}{2\,\gamma_2}\ (\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) = -\frac{1}{2\,\gamma_2}\,\partial_2 g_{11}$$

et analogues ; il y a $n\,(n-1)$ termes de ce genre.

— l'indice contrariant est égal à un des covariants (disons le premier, compte tenu de la symétrie des covariants) et distinct de l'autre. Alors, par exemple, compte tenu que les termes g_{ij} non diagonaux sont nuls :

$$\Gamma^1{}_{12} = \frac{1}{2\,\gamma_1}\,(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = \frac{1}{2\,\gamma_1}\,\partial_2 g_{11}$$

et analogues ; il y a $n\,(n-1)$ termes indépendants (à la symétrie entre i et j près) de ce genre.

— Les trois indices sont distincts. Alors, par exemple,

$$\Gamma^3{}_{12} = \frac{1}{2\,\gamma_3}\,(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{13} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

et analogues ; ces termes sont tous nuls.

Les formules sont alors plus simples et le nombre de $\Gamma^k{}_{ij}$ indépendants et a priori non nuls passe de $\frac{n^2\,(n+1)}{2}$ à $n + n\,(n-1) + n\,(n-1) = n\,(2\,n-1)$ soit de 6 à ... 6 en deux dimensions (gain nul), de 18 à 15 à trois (gain minime) et de 40 à 28 à quatre (appréciable pour la relativité générale).

2.e Tenseurs de courbure.

Le sujet est vaste et ardu. Nous ne ferons que l'aborder en nous restreignant aux seuls outils utiles à la relativité générale.

• Les surprises du transport parallèle dans un espace courbe.

La figure 1 p. 19 montre une portion de la sphère qui nous sert d'exemple. Le point N est son pôle, intersection avec l'axe Oz qui sert à définir θ et φ, les points A et$B$ sont sur l'équateur, intersection de la sphère avec xOy.

Supposons placé en A un vecteur dirigé selon $\overrightarrow{e_\theta}$ vers N. Déplaçons ce vecteur de A vers N en maintenant constantes ses composantes sur la base locale (il est donc variable dans l'espace-support) ; c'est ce qu'on appelle un transport parallèle. Si l'on effectue, ce transport le long du méridien [4] AN, les vecteurs dessinés en bleu sur la figure montrent la position à l'arrivée en N et si on l'effectue en deux temps, de A vers B le long de l'équateur puis de B vers N le long du méridien BN, ce sont les flèches rouges qui montrent la position finale. On constate avec des yeux ahuris que la position finale n'est pas la même dans les deux cas. C'est sur cette anomalie [5] que nous allons construire un indicateur de la courbure de l'espace.

4. On file la métaphore géographique.

5. Mathématiquement la base locale est une fonction continue de la position mais elle n'est que localement continue, c'est-à-dire dans un voisinage de tout point, mais pas globalement continue, c'est-à-dire dans tout l'espace. Un exemple de ce comportement est connu : la variable θ des coordonnées sphériques ou polaires plane change de valeur (on ajoute $2\,\pi$) quand on accompli un tour entier, ce qui ruine la continuité globale.

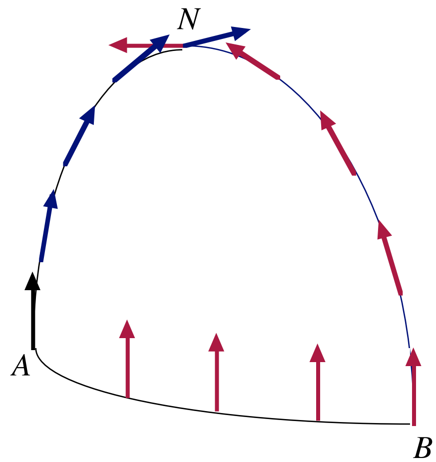

FIGURE 1 – Transport parallèle.

Plutôt que dire qu'un transport parallèle entre deux mêmes points (A et N dans l'exemple) donnent deux résultats différents, il est équivalent de dire que le transport parallèle sur un chemin fermé (de N vers A directement puis de A vers N en passant par B donne à l'arrivée un vecteur différent de celui du départ.

Pour la suite, il y a une subtilité de taille : un vecteur dans un transport parallèle, c'est un vecteur fixe par rapport à la base locale donc de même nature que les vecteurs de base, c'est donc un tenseur covariant. Le prouver avec plus de rigueur nécessiterait une bonne centaine de page d'algèbre linéaire à un haut niveau d'abstraction. Mon explication simpliste est un compromis [6] ; je veux que mon lectorat sente la teneur de l'explication de façon intuitive.

• Tenseur de Riemann-Christoffel.

Soit une courbe fermée C dans un espace de RIEMANN. Dans un déplacement élémentaire sur cette courbe, un champ vectoriel *covariant* varie de $\mathrm{d}V = D_j V_l \, e^l \, \mathrm{d}x^j$ (cf supra).

Puisque le point d'arrivée est identique à celui de départ dans la base locale identique, plutôt que comparer le vecteur au départ au vecteur à l'arrivée, on va faire ce travail pour chacune de ses composantes [7]. La variation de la composante sur e^l se tire de la formule précédente $\mathrm{d}V_l = D_j V_l \, \mathrm{d}x^j$ et sa variation ΔV_l entre le départ et l'arrivée est :

$$\Delta V_l = \oint D_j V_l \, \mathrm{d}x^j$$

6. qui a failli coûter la vie à mon ordinateur déjà jeté par la fenêtre mais retenu par la prise d'alimentation électrique quand j'allais abandonner devant une erreur de signe incompréhensible. Heureusement pour toi, ô mon lecteur, que je ne travaille pas avec un portable, mon cours se serait arrêté ici.

7. Partir de $\Delta V = \oint \mathrm{d}V$ avec les e^l non constants ne permettrait pas de faire des choses simples.

Pour l donné, $D_j V_l$ dépend de j, notons le provisoirement W_j (W_{lj} en taisant l'indice l) ; l'intégrale est formellement de la forme $\oint_C W_j \, \mathrm{d}x^j$, ça ressemble formellement à la circulation du vecteur W le long de la courbe fermée Γ. Dans un espace-support à trois dimensions, on dispose du théorème de Stokes ; il se généralise à plus de dimensions (ébauche d'explication dans le chapitre sur l'analyse vectorielle) et le rotationnel (de W ici) se généralise en un tenseur $T_{jk} = D_k W_j - D_j W_k$ et le théorème généralisé en :

$$\oint_C W_j \, \mathrm{d}x^j = \iint_S T_{jk} \, \mathrm{d}x^j \, \mathrm{d}x^k$$

où S est une surface de contour C, convenablement orientée et avec, bien entendu des dérivées covariantes dans ce contexte de bases locales et de coordonnées généralisées.

Si les T_{jk} sont tous nuls, c'est-à-dire que le tenseur est nul, tous les ΔV_l sont nuls et le transport sur une courbe fermée redonne le vecteur initial. On a donc une suspicion d'espace courbe s'il est non nul. En fait W_j dépend aussi d'un indice covariant, noté l ci dessus. Nous allons donc développer le tenseur $T_{ljk} = D_k W_{lj} - D_j \, W_{lk}$ en y reportant $W_{lj} = D_j V_l$ et $W_{lk} = W_{lj} = D_k V_l$, soit :

$$T_{ljk} = D_k(D_j V_l) - D_j(D_k V_l)$$

en remarquant ainsi que l'existence d'une courbure de l'espace est liée à la non commutativité des dérivées covariantes secondes. On remarquera aussi l'antisymétrie qui apparaît ici, car

$$T_{lkj} = D_j(D_k V_l) - D_k(D_j V_l)$$

On admettra ici le résultat suivant relatif à la dérivation covariante d'un tenseur t doublement covariant : il y a deux termes faisant intervenir les symboles de CHRISTOFFEL (avec un signe négatif, cf supra, car les indices sont covariants). C'est aisé à démontrer car c'est dans la logique de la dérivée d'un produit, ici le produit tensoriel des vecteurs de base mais nous nous en abstiendrons car ce chapitre est déjà assez lourd au niveau mathématique. On a donc :

$$D_k t_{jl} = \partial_k t_{jl} - \Gamma^m{}_{jk} \, t_{ml} - \Gamma^m{}_{lk} \, t_{jm}$$

Pour obtenir le second terme de $T_{lkj} = \cdots$ [8], on rend mentalement invisible l'indice l, on applique la formule valable pour un tenseur simplement covariant puis on enlève la cape d'invisibilité. Pour le dernier terme, même chose avec l'indice j. Appliquée à $D_j V_l$, on a donc :

$$D_k(D_j V_l) = \partial_k(D_j V_l) - \Gamma^m{}_{jk} \, D_m V_l - \Gamma^m{}_{lk} \, D_j V_m$$

8. La logique de mon exposé aurait voulu que je calcule T_{ljk} mais j'ai fait une faute d'inattention ; que mon lecteur ne s'en offuque pas, c'est sans incidence sur l'esprit de ce chapitre.

La formule de dérivation covariante simple donne ensuite :

$$D_k(D_jV_l) = \cdots$$
$$\partial_k(\partial_j V_l - \Gamma^n{}_{lj}\, V_n) - \Gamma^m{}_{jk}\,(\partial_m V_l - \Gamma^n{}_{lm}\, V_n) - \Gamma^m{}_{lk}\,(\partial_j V_m - \Gamma^n{}_{mj}\, V_n) = \cdots$$
$$\partial^2_{kj} V_l - V_n\,\partial_k\,\Gamma^n{}_{lj} - \Gamma^n{}_{lj}\,\partial_k V_n - \Gamma^m{}_{jk}\,\partial_m V_l + \Gamma^m{}_{jk}\,\Gamma^n{}_{lm}\,V_n - \Gamma^m{}_{lk}\,\partial_j V_m + \Gamma^m{}_{lk}\,\Gamma^n{}_{mj}\,V_n$$

En permutant j et k on obtient l'expression suivante de $D_j(D_kV_l)$ où l'on a aussi permuté les noms de variables muettes m et n dans certains termes :

$$D_j(D_kV_l) = \cdots$$
$$\partial^2_{jk} V_l - V_n\,\partial_j\,\Gamma^n{}_{lk} - \Gamma^m{}_{lk}\,\partial_j V_m - \Gamma^m{}_{kj}\,\partial_m V_l + \Gamma^m{}_{kj}\,\Gamma^n{}_{lm}\,V_n - \Gamma^n{}_{lj}\,\partial_k V_n + \Gamma^m{}_{lj}\,\Gamma^n{}_{mk}\,V_n$$

En tenant compte du théorème de Schwartz sur les dérivées partielles secondes et de la symétrie des symboles de Christoffel vis-à-vis des deux indices covariants, cinq des sept termes de chacune des expressions sont deux à deux identiques, trois à la même place et deux à des places croisées. Par soustraction, il reste :

$$D_j(D_kV_l) - D_k(D_jV_l) = V_n\,\partial_k\,\Gamma^n{}_{lj} - V_n\,\partial_j\,\Gamma^n{}_{lk} + \Gamma^m{}_{lj}\,\Gamma^n{}_{mk}\,V_n - \Gamma^m{}_{lk}\,\Gamma^n{}_{mj}\,V_n$$

En factorisant V_n et en remplaçant l'indice muet n par i, on arrive, en permutant l'ordre des facteurs des produits, à :

$$D_j(D_kV_l) - D_k(D_jV_l) = \big(\partial_k\,\Gamma^i{}_{lj} - \partial_j\,\Gamma^i{}_{lk} + \Gamma^i{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{lj} - \Gamma^i{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{lk}\big)\,V_i$$

En écrivant cela sous la forme $D_j(D_kV_l) - D_k(D_jV_l) = R^i{}_{ljk}\,V_i$, on fait apparaître un tenseur à quatre indices appelé *tenseur de courbure de Riemann-Christoffel* défini par :

$$R^i{}_{ljk} = \partial_k\Gamma^i{}_{lj} - \partial_j\Gamma^i{}_{lk} + \Gamma^i{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{lj} - \Gamma^i{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{lk}$$

qui peut donc, comme les symboles de Christoffel, s'exprimer de façon intrinsèque à partir de la métrique de l'espace de Riemann étudié.

Remarque : selon les auteurs, l'expression $\partial_k\Gamma^i{}_{lj} - \partial_j\Gamma^i{}_{lk} + \Gamma^i{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{lj} - \Gamma^i{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{lk}$ est notée tantôt $R^i{}_{ljk}$, tantôt $R^i{}_{lkj}$; c'est un souci récurrent avec les expressions antisymétriques.

• **Symétries du tenseur de Riemann-Christoffel.**

Par de définition, puis après permutation des indices j et k, on a :

$$R^i{}_{ljk} = \partial_k\Gamma^i{}_{lj} - \partial_j\Gamma^i{}_{lk} + \Gamma^i{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{lk} - \Gamma^i{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{lj}$$
$$R^i{}_{lkj} = \partial_j\Gamma^i{}_{lk} - \partial_k\Gamma^i{}_{lj} + \Gamma^i{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{lj} - \Gamma^i{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{lk}$$

d'où l'on déduit l'antisymétrie vis-à-vis du couple ij ce qui réduit d'autant le nombre de composantes indépendantes du tenseur.

De la même façon, en repartant de la définition puis en la réécrivant après deux permutations circulaires sur les indices j, k et l :

$$R^i{}_{ljk} = \partial_k \Gamma^i{}_{lj} - \partial_j \Gamma^i{}_{lk} + \Gamma^i{}_{mj}\, \Gamma^m{}_{lk} - \Gamma^i{}_{mk}\, \Gamma^m{}_{lj}$$
$$R^i{}_{jkl} = \partial_l \Gamma^i{}_{jk} - \partial_k \Gamma^i{}_{jl} + \Gamma^i{}_{mk}\, \Gamma^m{}_{jl} - \Gamma^i{}_{ml}\, \Gamma^m{}_{jk}$$
$$R^i{}_{jkl} = \partial_j \Gamma^i{}_{kl} - \partial_l \Gamma^i{}_{kj} + \Gamma^i{}_{ml}\, \Gamma^m{}_{kj} - \Gamma^i{}_{mj}\, \Gamma^m{}_{kl}$$

d'où, compte tenu de la symétrie de symbles de CHRISTOFFEL vis-à-vis des deux indices covariants donne la relation :

$$R^i{}_{ljk} + R^i{}_{jkl} + R^i{}_{jkl} = 0$$

ce qui réduit aussi le nombre de composantes indépendantes du tenseur. Sur les six permutations possibles de j, k et l pour i donné, il suffit deux connaître deux des trois symboles pour connaître les quatre autres, en utilisant ces deux résultats.

En particulier, on aura deux conséquences intéressantes :

La relation $R^i{}_{ljk} + R^i{}_{jkl} + R^i{}_{jkl} = 0$, appliquée, par exemple à $j = k = l = 1$ donne $3\,R^i_{111} = 0$ donc $R^i_{111} = 0$ et analogues.

Appliquée, par exemple, à $j = k = 1$ et $l = 2$, compte tenu de l'antisymétrie sur k et l elle donne :

$$0 = (R^i{}_{112} + R^i{}_{121}) + R^i{}_{211} = 0 + R^i{}_{211}$$

d'où $R^i{}_{211} = 0$ et analogues.

• Tenseurs de courbures contractés.

De la même façon que pour une matrice a^i_j, on définit sa trace par

$$T = a^1_1 + a^2_2 + \cdots a^n_n$$

soit, en notation d'EINSTEIN, $T = a^m_m$, on peut pour tout tenseur avec un indice contravariant i et un covariant j, entres autres, obtenir un *tenseur condensé* en sommant les coefficients pour lesquels $i = j$, on obtient un autre tenseur qui a deux indices de moins.

En particulier, à partir du tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL, on définit le tenseur de RICCI par :

$$R_{lk} = R^m{}_{lmk}$$

qui jouera un rôle primordial en relativité générale. Il est symétrique ($R_{lk} = R_{kl}$) mais ce n'est pas aisé à montrer, nous l'admettrons donc.

Remarque : on peut montrer que la contraction ${R^m}_{mjk}$ donne un résultat nul. Compte tenu de l'anti-symétrie les contractions ${R^m}_{lmk}$ et ${R^m}_{ljm}$ donnent des tenseurs opposés. Là aussi, on trouve selon les ouvrages l'une ou l'autre des conventions.

On peut poursuivre avec un travail préparatoire. A partir du tenseur de Ricci doublement covariant, on peut créer son alter ego une fois contravariant et une fois covariant (on lui donne traditionnellement le même nom, la position des indices levant l'indétermination) à partir de la métrique, plus exactement de son inverse (cf supra) par :

$$R^j_k = g^{jm}\, R_{mk}$$

puis en contractant une nouvelle fois pour obtenir la *courbure scalaire* :

$$R = R^n_n = g^{nm}\, R_{mn} = g^{mn}\, R_{mn}$$

Par ailleurs, on peut, par contraction avec la métrique, donner au tenseur de Riemann-Christoffel, son expression totalement covariante par :

$$R_{iljk} = g_{im}\, {R^m}_{ljk}$$

Ce tenseur totalement covariant possède une propriété intéressante dans la construction de la relativité générale. Elle ne possède pas de contenu physique et sa démonstration est longue et aride, aussi nous contenterons nous ici de l'admettre. Il s'agit de l'identité de Bianchi qu'on formule selon la notation :

$$D_m R_{iljk} + D_k R_{ilmj} + D_j R_{ilkm} = 0 \qquad \text{ou}$$

$$R_{iljk;m} + R_{ilmj;k} + R_{ilkm;j} = 0$$

On admettra aussi que R_{iljk} est antisymétrique vis-à-vis de i et l et de i et k, soit en combinant les deux :

$$R_{iljk} = -R_{lijk} = -R_{ilkj} = R_{likj}$$

et symétrique vis-à-vis de la permutation du couple il et du couple jk soit :

$$R_{iljk} = R_{jkil}$$

On laisse au lecteur le soin d'en déduire les composantes identiquement nulles et aussi le nombre de composantes indépendantes, ce qui sera peu d'importance en physique mais de beaucoup dans le calcul.

2.f Exemple de calcul de tenseurs de courbures.

Seul le cas à deux dimensions ne donne pas de calculs monstrueux. Les indices ne peuvent prendre que deux valeurs et les cas particuliers tirés de relations de symétries couvrent toutes les composantes du tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL. En particulier, avec la métrique diagonale de la sphère de rayon [9] a contenue dans l'espace à trois dimensions où (cf supra) :

$$x^1 = \theta \qquad x^2 = \varphi$$

$$g_{11} = a^2 \qquad g_{22} = a^2 \sin^2\theta \qquad g_{12} = g_{21} = 0$$

$$\Gamma^1{}_{11} = 0 \quad \Gamma^2{}_{11} = 0$$

$$\Gamma^1{}_{12} = 0 \quad \Gamma^2{}_{12} = \operatorname{cotan}\theta$$

$$\Gamma^1{}_{21} = 0 \quad \Gamma^2{}_{21} = \operatorname{cotan}\theta$$

$$\Gamma^1{}_{22} = -\sin\theta\,\cos\theta \quad \Gamma^2{}_{22} = 0$$

on a, par symétrie (cf supra) :

$$R^1{}_{111} = R^2{}_{111} = R^1{}_{222} = R^2{}_{222} = 0$$

$$R^1{}_{211} = R^2{}_{211} = R^1{}_{122} = R^2{}_{122} = 0$$

$$R^1{}_{112} = -R^1{}_{121}$$

$$R^2{}_{112} = -R^2{}_{121}$$

$$R^1{}_{221} = -R^1{}_{212}$$

$$R^2{}_{221} = -R^2{}_{212}$$

d'où quatre coefficients indépendants à calculer par la formule suivante dont les deux derniers termes sont obtenus par sommation sur m (donc $m = 1$ et $m = 2$) :

$$R^i{}_{ljk} = \partial_k \Gamma^i{}_{lj} - \partial_j \Gamma^i{}_{lk} + \Gamma^i{}_{mk}\,\Gamma^m{}_{lj} - \Gamma^i{}_{mj}\,\Gamma^m{}_{lk}$$

soit, en développant ces sommations :

$$\begin{aligned} R^1{}_{112} = -R^1{}_{121} = \cdots \\ \partial_2 \Gamma^1{}_{11} - \partial_1 \Gamma^1{}_{12} + \left(\Gamma^1{}_{12}\,\Gamma^1{}_{11} + \Gamma^1{}_{22}\,\Gamma^2{}_{11}\right) - \left(\Gamma^1{}_{11}\,\Gamma^1{}_{12} + \Gamma^1{}_{21}\,\Gamma^2{}_{12}\right) \\ \cdots = 0 - 0 + (0+0) - (0+0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2{}_{112} = -R^2{}_{121} = \cdots \\ \partial_2 \Gamma^2{}_{11} - \partial_1 \Gamma^2{}_{12} + \left(\Gamma^2{}_{12}\,\Gamma^1{}_{11} + \Gamma^2{}_{22}\,\Gamma^2{}_{11}\right) - \left(\Gamma^2{}_{11}\,\Gamma^1{}_{12} + \Gamma^2{}_{21}\,\Gamma^2{}_{12}\right) \\ \cdots = 0 - \partial_\theta \operatorname{cotan}\theta + (0+0) - (0 + \operatorname{cotan}\theta\,\operatorname{cotan}\theta) = \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 \end{aligned}$$

9. On rebaptise le rayon pour ne pas s'emmêler les pinceaux entre R rayon et R tenseur de courbure.

$$R^1{}_{221} = -R^1{}_{212} = \cdots$$
$$= \partial_1 \Gamma^1{}_{22} - \partial_2 \Gamma^1{}_{21} + \left(\Gamma^1{}_{11}\,\Gamma^1{}_{22} + \Gamma^1{}_{21}\,\Gamma^2{}_{22}\right) - \left(\Gamma^1{}_{12}\,\Gamma^1{}_{21} + \Gamma^1{}_{22}\,\Gamma^2{}_{21}\right)$$
$$\cdots = \partial\theta\,(-\sin\theta\,\cos\theta) - 0 + (0+0) - [0 + (-\sin\theta\,\cos\theta)\,\mathrm{cotan}\,\theta]$$
$$\cdots = (-\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$$R^2{}_{221} = -R^2{}_{212} = \cdots$$
$$\partial_1 \Gamma^2{}_{22} - \partial_2 \Gamma^2{}_{21} + \left(\Gamma^2{}_{11}\,\Gamma^1{}_{22} + \Gamma^2{}_{21}\,\Gamma^2{}_{22}\right) - \left(\Gamma^2{}_{12}\,\Gamma^1{}_{21} + \Gamma^2{}_{22}\,\Gamma^2{}_{21}\right)$$
$$\cdots = 0 - 0 + (0+0) - (0+0) = 0$$

Passons maintenant au tenseur de Ricci $R_{jk} = R^m_{jlm}$

Ses quatre termes (somme de deux termes) sont :

$$R_{11} = R^1{}_{111} + R^2{}_{112} = 0 + 1 = 1$$
$$R_{12} = R^1{}_{121} + R^2{}_{122} = 0 + 0 = 0$$
$$R_{21} = R^1{}_{211} + R^2{}_{212} = 0 + 0 = 0$$
$$R_{22} = R^1{}_{221} + R^2{}_{222} = \sin^2\theta + 0 = \sin^2\theta$$

Enfin, la courbure scalaire $R = g^{mn}\,R_{mn}$ est, dans une métrique diagonalisée (seuls les g^{ij} avec $i = j$ sont non nuls et inverses des g_{ij} de mêmes indices)

$$R = g^{11}\,R_{11} + g^{22}\,R_{22} = \frac{1}{a^2}\cdot 1 + \frac{1}{a^2\,\sin^2\theta}\,\sin^2\theta = \frac{2}{a^2}$$

On remarquera au passage que la courbure scalaire ne s'identifie pas à la courbure géométrique que le physicien rencontre en capillarité (voir le chapitre B-XII qui en traite) et qui vaut, pour une sphère de rayon a, $R_{\text{géo.}} = \frac{2}{a}$

Remarque 1 : Il serait plus pratique de noter les indices θ et φ au lieu de 1 et 2 ; $R^\theta{}_{\varphi\varphi\theta} = \sin^2\theta$ au lieu de $R^1{}_{221} = \sin^2\theta$ c'est beaucoup plus parlant. En contrepartie, l'automatisme de calculs en pâtit. Personnellement, j'aime assez, pour mener les calculs, le compromis :

$$R^\theta{}_{\varphi\varphi\theta} = R^1{}_{221} = \partial_1 \Gamma^1{}_{22} - \partial_2 \Gamma^1{}_{21} + \cdots$$

avec, si nécessaire, un retour $1 \to \theta$ et $2 \to \varphi$ en fin de calcul.

Remarque 2 : Il serait intéressant de montrer que notre autre exemple, l'espace tridimensionnel repéré par des coordonnées sphériques, conduit à un tenseur de Riemann-Christoffel nul (comprendre que toutes ses composantes sont nulles). La somme de travail à effectuer est imposante mais totalement inutile comme le montrera la remarque suivante. Toutefois montrons comment sont modifiées les seules composantes non nulles calculées ci-dessus, par l'adjonction du terme correspondant à $m = 3$ dans les sommes sur l'indice muet m.

A $R^2{}_{112} = -R^2{}_{121} = 1$, il faut ajouter, en allant chercher plus haut les expressions des symboles de CHRISTOFFEL :

$$\Gamma^2{}_{32}\,\Gamma^3{}_{11} - \Gamma^2{}_{13}\,\Gamma^3{}_{12} = \frac{1}{r}\,(-r) - 0 = -1$$

A $R^1{}_{221} = -R^1{}_{212} = \sin^2\theta$, il faut ajouter :

$$\Gamma^1{}_{31}\,\Gamma^3{}_{22} - \Gamma^1{}_{32}\,\Gamma^3{}_{21} = \frac{1}{r}\,(-r\,\sin^2\theta) - 0 = -\sin^2\theta$$

et l'on trouve bien un résultat nul dans le deux cas. Ce sont donc bien les composantes cachées et escamotées (cf supra) dans la dimension supplémentaire de l'espace-support qui confèrent une courbure (au sens de RIEMANN) à la sphère.

Remarque 3 : En fait dans le cas de l'espace tridimensionnel, si on le repère par le bon vieux système cartésien, les vecteurs de base sont indépendants des coordonnées du points, les symboles de CHRISTOFFEL sont donc nuls et le tenseur de courbure aussi. Or si un tenseur est nul, il le reste dans tous les autres systèmes de coordonnées. Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler que les $R^i{}_{ljk}$ sont les coefficients d'une application quadri-linéaire d'un vecteur covariant X et de trois contravariants Y, Z et T avec :

$$R(X, Y, Z, T) = R^i{}_{ljk}\,X_i\,Y^l\,Z^j\,T^k$$

Si $R(X, Y, Z, T) = 0$ quels que soient X, Y, Z et T, ce qui indépendant du choix du système de coordonnées, ses coefficients sont tous nuls et réciproquement. Donc si le jeu des coefficients est nul dans un système de coordonnées, il l'est dans tous. Le savoir économise ici trois bonnes pages de calcul et plusieurs cachets d'aspirine.

Remarque finale : Nous voilà parés pour aborder la relativité générale.