

Chapitre C-II

Conducteurs à l'équilibre.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Après avoir défini charges libres, conducteurs et équilibre électrostatique, on étudie champ et potentiel électriques et répartition des charges à l'intérieur, à l'extérieur et en surface du ou des conducteurs.

On montre la difficulté inhérente à tout problème relatif à un ensemble de conducteurs, on démontre les importants théorèmes de superposition et d'unicité puis on passe en revue les quelques méthodes utilisables. On en profite pour évoquer les écrans électrostatiques (conducteurs creux) et le pouvoir des pointes.

On introduit la matrice capacité et on en découvre les propriétés au fur et à mesure que l'on étudie l'aspect énergétique de la situation. On en profite pour donner plusieurs méthodes pour calculer l'action qui s'exerce sur l'un des conducteurs.

On termine en disant quelques mots des condensateurs et électromètres.

Table des matières

C-II Conducteurs à l'équilibre.	1
1 Propriétés du conducteur à l'équilibre.	5
1.a Définition.	5
1.b Champ et potentiel électriques, densité volumique de charges. . .	5
1.c Etude des charges surfaciques.	7
2 Propriétés de l'espace interconducteur.	10
2.a Potentiel et lignes de champ entre conducteurs.	10
2.b Théorème des éléments correspondants.	12
3 Principe de résolution d'un problème d'électrostatique des conducteurs.	13
3.a Influence entre conducteurs (tout se complique).	13
3.b Méthodologie.	14
3.c Théorème de superposition.	15
3.d Théorème d'unicité.	16
4 Exemples de résolution de problèmes d'électrostatique des conducteurs.	17
4.a Problèmes hautement symétriques.	18
4.b Le conducteur creux comme écran électrique.	20
4.c Résolution par analogie.	24
4.d Pouvoir des pointes.	32
5 Capacités et aspects énergétiques.	35
5.a Capacité d'un conducteur seul dans l'espace.	35
5.b Matrice capacité d'un système de conducteurs.	35
5.c Energie d'un système de conducteurs.	36

5.d	Symétrie de la matrice capacité.	37
5.e	Localisation de l'énergie.	38
5.f	Déterminant de la matrice capacité.	40
5.g	Calcul des actions subies par un conducteur.	40
6	Condensateurs et électromètres.	43
6.a	Capacité d'un condensateur.	43
6.b	Considérations énergétiques.	45
6.c	Condensateurs usuels.	45
6.d	Electromètres.	48

1 Propriétés du conducteur à l'équilibre.

1.a Définition.

Dans la matière, on appelle *charge libre* une charge que son interaction avec son environnement ne peut empêcher de se déplacer si elle est soumise à une force.

Cette définition est floue, précisons.

En pratique, les charges libres sont soit des ions dans une solution ionique, soit des électrons sur des orbitales délocalisées dans un solide, soit des ions et des électrons dans un gaz partiellement ou totalement ionisé (un plasma).

Les forces qui peuvent les mettre en mouvement sont, bien sûr, les forces électromagnétiques (force de LORENTZ $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$) car on sait que pour des entités chargées à l'échelle moléculaire, les forces de gravitation sont de très loin négligeables par rapport aux forces électromagnétiques et sont donc hors-jeu.

Quelles sont les forces qui pourraient s'y opposer ? Des interactions avec les proches voisins qui seraient assimilables avec des forces de type frottement solide (suivant la loi de COULOMB, cf chapitre B-IX, à ne pas confondre avec le théorème de COULOMB qui apparaît un peu plus loin). On sait que ces forces de frottement solide peuvent contrecarrer une force motrice pas trop grande et empêcher le mouvement. C'est ce qui est exclu dans le modèle de la charge libre.

Par contre une force de type frottement fluide proportionnelle à la vitesse¹ n'empêche pas le mouvement, tout au plus lui donne-t-elle une vitesse limite. C'est du reste le modèle couramment utilisé pour expliquer la conduction électrique.

Bien sûr, à cette échelle, seule une explication quantique serait pertinente. Il s'agit ici de donner un modèle classique plus aisé à manipuler, pourvu qu'il rende compte des résultats expérimentaux.

1.b Champ et potentiel électriques, densité volumique de charges.

• Champ électrique.

Un *conducteur (électrique)* est un milieu qui contient des charges libres.

Il est dit à l'*équilibre (électrostatique)* si ses charges libres ne se déplacent pas ; elles sont dites *au repos*.

L'équation générale du mouvement d'une charge libre de masse m et de charge q (non nulle bien sûr, sinon, ce ne serait pas une charge), soumise à une force électromagnétique

1. car avec des particules si petites, on a un nombre de REYNOLDS très petit (voir chapitre B-XIII de mécanique des fluides).

et à un frottement fluide de constante λ est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \lambda \vec{v}$$

Si elle est au repos ($\vec{v} = \vec{0}$), cette équation devient $\vec{0} = q \vec{E}$, d'où $\vec{E} = \vec{0}$.

Remarque : Un conducteur est fini, il a une surface. Très près de la surface, la dissymétrie entre les deux côtés peut créer un frottement de type solide. Toutefois la symétrie locale de révolution autour de la direction orthogonale (ou normale) à la surface ne permet à cette force de ne s'opposer qu'aux forces électromagnétiques normales ; il en résulte qu'en surface, le champ *peut* être non nul et normal.

A l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre, le champ électrique est partout nul.

A la surface d'un conducteur à l'équilibre, le champ électrique est partout normal.

• Potentiel électrique.

Par définition le potentiel électrique V est tel que $\vec{\text{grad}} V = -\vec{E}$. A l'intérieur du conducteur, nous venons de le voir, $\vec{E}$ donc $\vec{\text{grad}} V$ est nul, soit $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$. V ne dépend ni de x , ni de y , ni de z et puisqu'on est en régime stationnaire (les charges ne se déplacent pas et le champ ne varie pas) pas non plus de t . Le potentiel électrique est donc stationnaire et surtout, en ce qui concerne ce chapitre, uniforme *au sein*² du conducteur à l'équilibre.

Par définition du potentiel, celui-ci est dérivable donc a fortiori continu. Sa valeur à la surface du conducteur est donc la limite de sa valeur à l'intérieur quand le point tend vers la surface ; or la limite d'une fonction constante est cette constante : le champ à la surface a donc la même valeur qu'à l'intérieur.

Dans un conducteur à l'équilibre, surface comprise, le potentiel électrique est uniforme.

• Répartition des charges.

On rappelle (cf chapitre C-I) que la formulation locale du théorème de GAUSS est $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. A l'intérieur du conducteur à l'équilibre le champ est partout nul, donc sa divergence l'est aussi. La densité volumique de charges ρ est donc nulle à l'intérieur du conducteur.

Par contre, en surface, le champ n'est pas nul et l'on ne peut plus rien affirmer de tel. Par ailleurs si la charge totale d'un conducteur est non nulle et qu'il ne peut y avoir de

2. Il s'agit de bien comprendre la portée de cette affirmation : normalement un ensemble équipotentiel dont l'équation est de la forme $V(x, y, z) = Cte$ est une surface. Ici cet ensemble est un volume.

charges à l'intérieur, où donc peut être localisée cette charge sinon à la surface? Cette charge en surface, pas forcément uniformément répartie, va être décrite par une densité surfacique de charges, notée σ .

A l'intérieur du conducteur à l'équilibre, la densité volumique de charges est partout nulle.

A la surface d'un conducteur à l'équilibre, existe une densité surfacique de charges.

1.c Etude des charges surfaciques.

Dans toute la suite de ce chapitre, on supposera que le milieu qui baigne le ou les conducteurs est le vide. S'ils sont baignés d'air les résultats sont identiques à une très bonne approximation, sauf si le champ électrique est si intense qu'il provoque l'ionisation de l'air, nous en reparlerons plus loin.

Si les conducteurs sont baignés par un matériau non conducteur que l'on appelle *diélectrique*, dans le meilleur des cas celui-ci sera *linéaire* et l'on montrera dans le chapitre C-XII qu'il suffit alors de remplacer dans ce qui suit la constante universelle ϵ_0 par une constante ϵ caractéristique du diélectrique linéaire.

• Théorème de Coulomb.

A l'extérieur³ du conducteur (à l'équilibre, ce qui sera désormais sous-entendu) les lignes de champ (électrique, même remarque) sont orthogonales aux surfaces équipotentielles. Par passage à la limite, les lignes de champ qui arrivent ou partent de la surface du conducteur, qui est une équipotentielle (cf supra), lui sont orthogonales.

A la surface d'un conducteur, les lignes de champ lui sont orthogonales.

Imaginons une surface élémentaire d'aire dS à la surface du conducteur, portant la charge $dq = \sigma dS$ où σ est la densité surfacique de charges. Construisons une surface fermée à laquelle on appliquera le théorème de GAUSS. Partons du tube de champ qui, à l'extérieur, s'appuie sur le contour de dS et considérons une surface équipotentielle infiniment proche de la surface. L'élément de surface du conducteur est suffisamment petit pour être assimilé à une portion du plan tangent et la distance entre celle-ci et l'autre équipotentielle suffisamment petite pour que les lignes de champ entre elles soient assimilées à leur droites tangentes, de sorte que l'élément de tube de champ est un cylindre de génératrices orthogonales à la surface.

La surface à laquelle on appliquera le théorème de GAUSS est cette portion de tube de champ, fermée d'un côté par la portion de l'équipotentielle infiniment proche qui a la

3. A l'intérieur, pas de champ et l'on ne peut donc pas définir de lignes de champ.

même aire dS , au vu des considérations précédentes, et de l'autre par une surface arbitraire tracée intégralement à l'intérieur du conducteur. Tout ceci est résumé par la figure 1 p. 8, où la surface de GAUSS est en rouge et en gras.

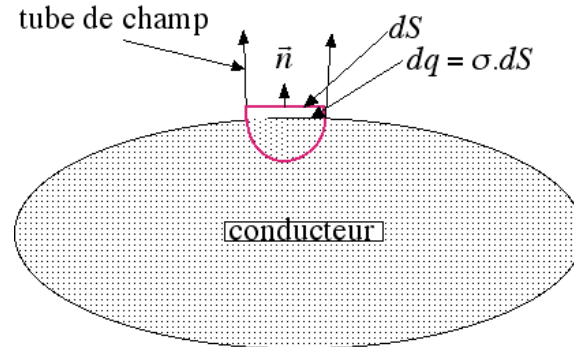


FIGURE 1 – Théorème de Coulomb.

Le flux à travers la surface à l'intérieur du conducteur est nul car le champ y est nul (cf supra) ; le champ à travers la portion du tube de champ est nul car le champ lui est tangent, par définition du tube, et le vecteur surface orthogonal, par définition de ce vecteur ; le flux à travers la portion d'équipotentielle, de vecteur surface $\vec{dS} = dS \vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal de la surface, orienté vers l'extérieur et où le champ est normal à la surface et s'écrit donc $\vec{E}_{\text{lim.}} = E_n \vec{n}$ (l'indice « lim. » rappelle que l'on est infiniment proche de la surface) est $E_n dS$.

Quant à la charge intérieure à la surface de GAUSS, elle est formée par la charge intérieure au conducteur, nulle car la densité volumique de charges y est nulle (cf supra), de celle à l'extérieur, nulle aussi car on est dans le vide et de celle en surface, qui est $dq = \sigma dS$.

L'application du théorème nous apprend donc :

$$0 + 0 + E_n dS = \frac{0 + 0 + \sigma dS}{\varepsilon_0}$$

donc que $\vec{E}_{\text{lim.}} = E_n \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$, relation connue sous le nom de théorème de COULOMB.

A proximité immédiate de la surface d'un conducteur, le champ est $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$.

Attention ! Là où la densité surfacique est non nulle, le champ qui est nul à l'intérieur et qui a cette valeur limite non nulle à l'extérieur est donc discontinu à la traversée de la surface et l'on ne sait donc rien a priori de sa valeur à la surface.

• **Pression électrostatique.**

En surface, il y a des charges et il existe a priori un champ électrique non nul ; elles sont donc soumises à des forces que nous nous proposons de calculer.

Soit une surface élémentaire donc quasiment plane, par exemple circulaire de rayon très petit, et qui porte une charge $dq = \sigma dS$. Au niveau de cette surface, on vient de voir que le champ n'est pas connu mais il ne faut pas s'en chagriner car ce champ est celui créé par toutes les charges de l'univers *y compris* dq ; or, quand on calcule la force exercée sur le système qu'est la surface élémentaire par son extérieur, il faut utiliser le champ $\vec{E}''$ créé par toutes les charges de l'extérieur, c'est à dire le champ créé par toutes les charges de l'univers sauf dq , c'est à dire le champ *total* $\vec{E}$ diminué par le champ $\vec{E}'$ créé par dq lui-même.

Considérons à cet effet deux points infiniment proches de la surface, en vis-à-vis sur son axe, l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur, à une distance de la surface très petite devant le rayon de dS de sorte de le champ créé par dS y soit assimilable au champ créé par un plan (cf infra).

Le champ total est nul à l'intérieur, soit $\vec{E}_{\text{int.}} = \vec{0}$ (cf supra) et à l'extérieur vaut, selon le théorème de COULOMB, $\vec{E}_{\text{ext.}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$ (cf supra).

On a vu dans le chapitre C-I, en exemple de calcul de champ, que le champ sur l'axe d'un disque uniformément chargé et infiniment près du centre, et de part et d'autre, a pour expression $\pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$. En adaptant la notation, on en déduit, pour notre problème, le champ créé par dq ; à l'intérieur $\vec{E}'_{\text{int.}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$ et à l'extérieur $\vec{E}'_{\text{ext.}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$.

On en déduit, par différence, le champ créé par la distribution de charges « tout l'univers sauf dq » : à l'intérieur, c'est $\vec{E}''_{\text{int.}} = \vec{0} - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$ et à l'extérieur, c'est $\vec{E}''_{\text{ext.}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$. Ces valeurs égales laissent soupçonner que ce champ est continu et que cette valeur est aussi celle du champ en surface. Nous montrerons dans le chapitre C-XIII traitant des « relations de passage » qu'il y a discontinuité quand on traverse une surface chargée ; or, ici dans le problème du champ créé par « tout l'univers sauf dq », on ne traverse pas ($dq = \sigma dS$ n'existe pas dans ce problème) de surface chargée en passant du point intérieur au point extérieur et il y a effectivement continuité et $\vec{E}''_{\text{surf.}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$.

Il ne reste plus qu'à conclure : la charge $dq = \sigma dS$ est soumise au champ $\vec{E}''_{\text{surf.}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$ et subit donc la force :

$$\vec{dF} = dq \vec{E}''_{\text{surf.}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \vec{n}$$

Cette force est normale, dirigée vers l'extérieur et proportionnelle à la surface ce qui permet d'introduire une pression dite *électrostatique* p_e définie par $\vec{dF} = p_e dS \vec{n}$ et dont l'expression est donc $p_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$.

La surface d'un conducteur à l'équilibre est soumise à la pression électrostatique $p_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$.

Remarque 1 : attention la densité surfacique de charges n'est pas uniforme, sauf cas particulier, donc la pression électrostatique non plus.

Remarque 2 : cette étude prouve, de façon marginale, que le champ à la surface d'un conducteur n'est pas une grandeur pertinente.

Remarque 3 : avec $\vec{E}_{\text{surf.}}'' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}$, on peut aussi écrire $p_e = 2\varepsilon_0 \|\vec{E}_{\text{surf.}}''\|^2$. Or pour un conducteur dans l'air, le champ ne peut pas dépasser une valeur maximale E_{max} de 1 à 4 millions de volts par mètre (selon que l'air est humide ou sec) au-delà de laquelle des étincelles éclatent par ionisation de l'air et le conducteur se décharge alors. La pression électrostatique ne peut dès lors pas dépasser $p_{\text{max}} = 2\varepsilon_0 E_{\text{max}}^2$, soit avec $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ SI et pour de l'air sec $p_{\text{max.}} \sim 100 \text{ Pa} = 1 \text{ mbar}$ quasiment indiscernable par rapport à la pression atmosphérique dans ces conditions exceptionnelles.

2 Propriétés de l'espace interconducteur.

Dans tout ce qui suit, on suppose qu'il y a dans le vide (ou dans l'air) un ou plusieurs conducteurs à l'équilibre.

2.a Potentiel et lignes de champ entre conducteurs.

• Absence d'extremum de potentiel entre les conducteurs.

Supposons qu'en un point A extérieur au(x) conducteur(s), le potentiel passe par un extremum, disons un maximum pour fixer les idées. Alors il existe une sphère de rayon a suffisamment petit pour que d'une part elle soit elle-même entièrement à l'extérieur du ou des conducteurs et pour que d'autre part le potentiel décroisse du centre vers la surface⁴ de la sphère. Le champ est orienté dans le sens des potentiels décroissants (cf chapitre

4. Ce n'est pas si évident que je l'affirme. Autour de A , un développement à l'ordre 2 du potentiel donne des termes d'ordre 1 nuls (maximum) et des termes d'ordre 2 qui font intervenir la matrice des dérivées secondes, symétriques grâce au théorème de SCHWARZ et donc diagonalisable, les termes diagonaux étant négatifs en un maximum. Dans une bonne base et avec l'origine en A , on a donc quelque chose comme : $V = V_0 - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2$ soit en coordonnées sphériques :

$$V = V_0 - r^2 (\alpha^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \gamma^2 \cos^2 \theta)$$

A la surface on a donc :

$$E_r = - \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a} = 2a (\alpha^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \gamma^2 \cos^2 \theta)$$

Or la parenthèse est toujours positive, E_r est positif quelque soient θ et φ donc en tout point de la surface. Ceci pour a assez petit pour que les termes d'ordre 3 soient négligeables.

précédent), donc vers l'extérieur à la surface de la sphère. Il en résulte que le flux électrique $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$, somme de termes positif est lui-même positif, donc (théorème de GAUSS oblige) la charge intérieure à cette sphère de centre A de rayon a , entièrement située dans le vide, est strictement positive, ce qui est absurde : il n'y a rien dans le vide ! A conclusion absurde, hypothèse impossible. Le potentiel ne peut être extremum entre les conducteurs. Les seuls extremums possibles sont donc soit les conducteurs, soit l'infini de potentiel nul par convention.

Remarque : Entre les conducteurs, le champ ne peut pas être nul, sinon le gradient du potentiel le serait aussi, donc ses dérivées partielles par rapport à x , y et z et donc il serait extremum.

• Conséquences pour les lignes de champ.

Rappelons que les lignes de champs sont orientées dans le sens du champ ou dans celui des potentiels décroissant.

Une ligne de champ ne peut commencer (ou s'arrêter) qu'en un point où le champ est nul⁵, auquel cas ce point peut être (en pratique, il l'est) point de divergence (ou de convergence) de lignes de champ qui partent dans (ou arrivent de) toutes les directions. Nous venons de voir qu'une telle situation ne peut exister entre les conducteurs.

Un ligne de champ ne peut donc partir que d'un conducteur ou de l'infini et arriver à un conducteur ou à l'infini. Comme elle va dans le sens des potentiels décroissants et avec la convention d'un potentiel nul à l'infini, si la ligne part d'un conducteur au potentiel V (rappelons, cf supra, qu'un conducteur a un potentiel uniforme et que l'on peut donc parler de son potentiel) et va vers l'infini, on peut affirmer que V est positif ; si la ligne part de l'infini et arrive sur un conducteur au potentiel V , on peut affirmer que V est négatif ; si la ligne part d'un conducteur au potentiel V_1 et arrive sur un conducteur au potentiel V_2 , on peut affirmer que $V_1 > V_2$.

Inversement, si l'on connaît les potentiels des conducteurs, on peut, avec un peu d'habitude, donner l'allure plausible des lignes de champ, en respectant les conclusions précédentes. Si par exemple, on a deux conducteurs aux potentiels V_1 et V_2 , tels que $V_1 > V_2 > 0$, on aura des lignes de champ partant du conducteur à V_1 et arrivant soit au conducteur à V_2 soit à l'infini et des lignes de champ partant du conducteur à V_2 et arrivant à l'infini et c'est tout. C'est ce qui est représenté, approximativement⁶, sur la figure 2 p. 12 qui ne doit pas être lue comme un tracé précis de lignes de champ mais comme un schéma en donnant l'organisation.

Par ailleurs, le théorème de COULOMB (cf supra) permet d'affirmer qu'en un point d'un conducteur d'où part une ligne de champ, la densité surfacique est positive et qu'en un point où il en arrive une, cette densité est négative. Dans le contexte de l'exemple

5. ou non défini, par exemple là où il y a une charge ponctuelle.

6. mon logiciel de dessin est très rustique.

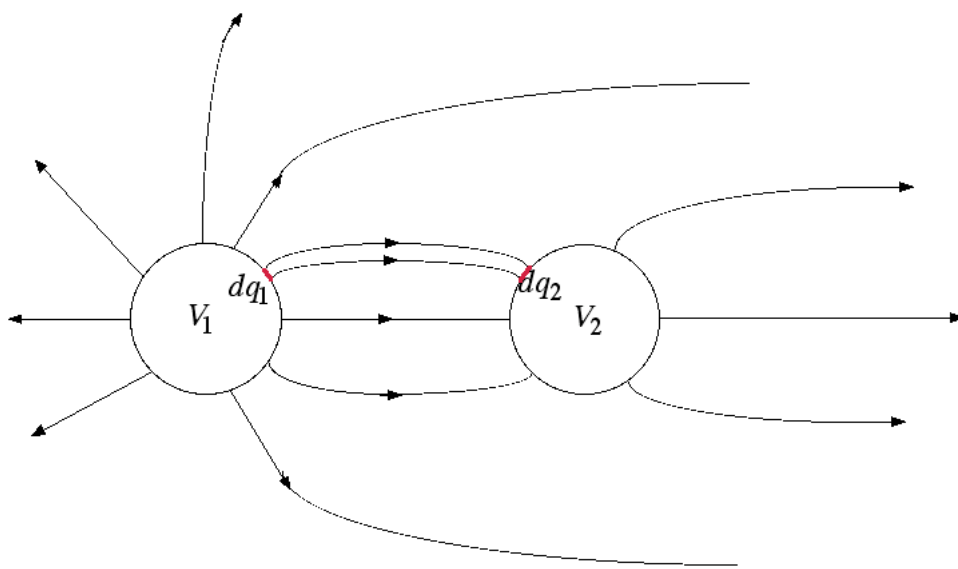


FIGURE 2 – Tracé de lignes de champ.

précédent, figure à l'appui, la densité sur le conducteur à V_1 est partout positive mais celle sur le conducteur au potentiel V_2 est négative par endroit et positive en d'autres selon qu'il arrive une ligne de champ venant du conducteur à V_1 ou qu'il part une ligne de champ vers l'infini. Sur la figure dq_1 est positive et dq_2 est négative, par exemple.

2.b Théorème des éléments correspondants.

• Le théorème.

Plaçons nous dans le cas où des lignes de champ vont d'un conducteur au potentiel V_1 à un conducteur au potentiel V_2 (inférieur à V_1 , cf supra). Un *tube de champ* est un ensemble de lignes de champ partant de tous points du contour d'une surface élémentaire portant la charge dq_1 du premier conducteur et arrivant sur le contour d'une surface élémentaire portant la charge dq_2 du second conducteur, ces deux surfaces ainsi mises en relation étant qualifiées d'*éléments correspondants* (voir figure 2 p. 12).

Considérons une surface fermée constituée de ce tube de champ et, pour la fermer, deux surfaces arbitraires, l'une à l'intérieur du premier conducteur, l'autre à l'intérieur du second. Comme on l'a déjà vu, le flux à travers le tube est nul ($d\vec{S}$ normal et $\vec{E}$ tangent) ainsi qu'à travers les surfaces à l'intérieur des conducteurs (où $\vec{E}$ est nul); le flux total est nul, donc la charge totale aussi (théorème de GAUSS). Comme les seules charges sont dq_1 et dq_2 (pas de charges à l'intérieur de conducteurs, ni dans le vide), on en déduit que $dq_1 + dq_2 = 0$ donc que dq_1 et dq_2 sont opposées. Cette affirmation constitue le *théorème des éléments correspondants*.

- **Cas du conducteur creux.**

Considérons un premier conducteur creux au potentiel V_1 (nous dirons désormais « à V_1 ») contenant uniquement un second conducteur à V_2 (pour fixer les idées avec $V_2 > V_1$). Les lignes de champ qui partent du second conducteur ne peuvent aller à l'infini donc arrivent sur le premier et inversement les lignes de champ qui arrivent sur la face interne du premier ne peuvent venir que du second. L'élément correspondant à toute la surface du second conducteur qui porte la charge Q_2 , n'est donc autre que la face interne du second, face qui porte la charge Q_{1i} . En vertu du théorème des éléments correspondants on a $Q_{1i} = -Q_2$. Ceci est résumé par la figure 3 p. 13. Les deux conducteurs sont dits *en influence totale*.

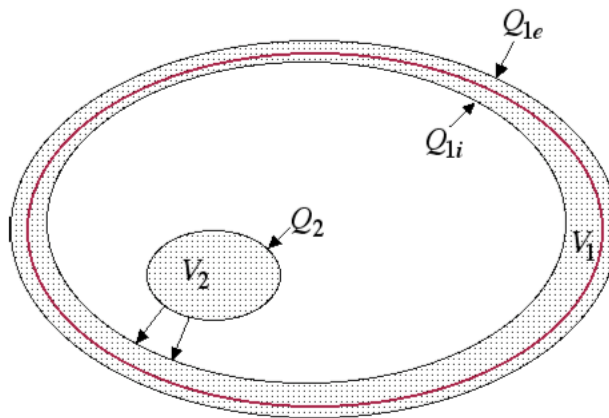


FIGURE 3 – Influence totale.

Une autre façon, plus rapide, de démontrer cette propriété est d'appliquer le théorème de GAUSS à une surface fermée Σ , en rouge sur la même figure, totalement incluse dans le conducteur (donc le champ est nul et le flux aussi) et entourant la face interne de celui-ci. La charge intérieure à Σ , constituée de celle de la face interne du conducteur creux et de celle(s) du/des conducteur(s) intérieur(s) est donc nulle.

Remarque : dans le cas particulier où le conducteur creux ne contient aucun autre conducteur, on démontre de la même façon que la charge de sa face interne est nulle.

3 Principe de résolution d'un problème d'électrostatique des conducteurs.

3.a Influence entre conducteurs (tout se complique).

Imaginons deux sphères conductrices de rayon R , placée à une distance D l'une de l'autre très grande devant R et portant la même charge Q . Chaque sphère ne subit de la

part de l'autre qu'une interaction négligeable et se comporte comme si elle était seule ; la symétrie par isotropie n'est pas remise en question et la charge Q est uniformément répartie.

Rapprochons les sphères ; les charges libres sont mobiles par essence et qu'elles soient localisées en surface n'y change rien. Les charges, de même signe dans cet exemple, se repoussent et migrent à la surface : la densité surfacique diminue pour les points des sphères en vis-à-vis au détriment des points de l'autre côté. On dit qu'il y a *influence* entre les conducteurs. Tout ceci est schématisé dans la figure 4 p. 14 où la densité surfacique est d'autant plus grande que les signes plus sont serrés.

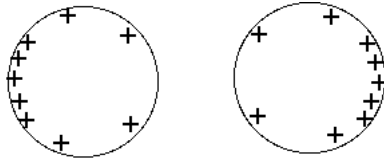


FIGURE 4 – Influence entre deux sphères.

Ce phénomène complique la gestion des problèmes d'électrostatique ; en effet, on peut connaître dans certains cas la charge totale d'un conducteur mais nullement la densité surfacique qui gère sa répartition ; celle-ci devient donc une *inconnue* du problème.

Les formules $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq}{r}$ et $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dq \vec{u}}{r^2}$ deviennent inutilisables et il faut trouver une autre démarche.

Remarque 1 : Pour les problèmes de gravitation, au moins entre corps solides, on n'a pas ce type de problème : les masses libres n'existent pas et l'influence non plus.

Remarque 2 : De nombreux générateurs de tension électrostatiques fonctionnent grâce aux phénomènes d'influence. A priori, j'ai décidé de ne pas en parler mais si on me le demande⁷ (gentiment), je le ferai volontiers.

3.b Méthodologie.

• Données du problème.

Un problème d'électrostatique des conducteurs donne la géométrie du problème : forme, taille, orientation et position relative des conducteurs. Si on ne donne rien de plus, on parle de *problème général*.

Pour chacun des conducteurs, repéré par un indice « i », deux cas sont possibles : ou bien un générateur⁸ lui impose un potentiel V_i , ou bien le conducteur n'est branché à rien

7. La fonction « m'écrire » de mon site est faite pour ça.

8. dont une branche est connectée au conducteur, l'autre à l'infini, en pratique une masse conductrice lointaine appelée la *masse* du système. Si $V_i = 0$, le générateur se réduit à un fil conducteur qui fait alors office de court-circuit.

(on parle de conducteur *isolé*) et sa charge Q_i est constante, de répartition inconnue (cf supra). Si, en plus de la géométrie, on donne, pour chaque générateur, soit V_i , soit Q_i , on parle de *problème particulier*.

• Inconnues et nœud du problème.

Il s'agit de trouver le potentiel et le champ en tout point de l'espace interconducteur, la densité surfacique en tout point des conducteurs et pour chaque conducteur son potentiel V_i si l'on connaît sa charge Q_i et vice-versa.

On se focalisera sur la recherche du potentiel dans l'espace interconducteur, car dès qu'on le connaît, on peut en déduire toutes les autres inconnues :

- le champ par $\vec{E} = -\text{grad } V$
- la densité surfacique par le théorème de COULOMB : $\vec{E}_{\text{lim.}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$ reformulée en $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{lim.}} \cdot \vec{n}$
- la charge d'un conducteur par intégration de la densité surfacique : $Q_i = \iint_i \sigma \, dS$
- le potentiel d'un conducteur par continuité : la limite du potentiel au point M quand M tend vers la surface d'un conducteur est le potentiel uniforme de celui-ci, surface comprise (cf supra).

• Formalisation du problème.

L'espace interconducteur est un domaine $\mathcal{D}$ limité par les surfaces Σ_i des conducteurs, ainsi, formellement que par Σ_0 , sphère de rayon infini.

Dans le vide où la densité volumique de charges ρ est nulle, l'équation de POISSON (cf chapitre précédent), c'est-à-dire $\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, devient $\Delta V = 0$, appelée équation de LAPLACE.

Sur chacune des surfaces Σ_i , V est uniforme, ainsi que Σ_0 (où $V=0$).

Résoudre le problème général consiste à trouver les solutions l'équation de LAPLACE avec comme conditions aux limites que le potentiel soit uniforme sur chacune des parties disjointes Σ_i de la frontière du domaine d'intégration $\mathcal{D}$.

Résoudre un problème particulier consistera à choisir parmi les solutions du problème général celle qui convient.

3.c Théorème de superposition.

Soient $V_1(M)$ et $V_2(M)$ deux solutions du problème général (pour une géométrie donnée) et λ_1, λ_2 deux constantes. Considérons la fonction $V(M) = \lambda_1 V_1(M) + \lambda_2 V_2(M)$

Le laplacien $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, construit à partir de dérivées est, comme elles, un opérateur linéaire. Par hypothèse ΔV_1 et ΔV_2 sont nuls, donc $\Delta V = \lambda_1 \Delta V_1 + \lambda_2 \Delta V_2$

aussi.

Sur chaque surface Σ_i , V_1 et V_2 sont constants, donc V aussi.

A ce stade, on peut déjà affirmer que V est solution du problème général.

Si à V_1 et V_2 correspondent les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$, à V correspond $\vec{E}$ tel que, puisque l'opérateur différentiel gradient, comme le laplacien, est linéaire :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\lambda_1 \overrightarrow{\text{grad}} V_1 - \lambda_2 \overrightarrow{\text{grad}} V_2 = \lambda_1 \vec{E}_1 + \lambda_2 \vec{E}_2$$

Si à V_1 et V_2 correspondent sur les conducteurs des densités surfaciques de charges σ_1 et σ_2 , à V correspond σ tel que :

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{lim.}} \cdot \vec{n} = \lambda_1 \varepsilon_0 \vec{E}_1 \text{ lim.} \cdot \vec{n} + \lambda_2 \varepsilon_0 \vec{E}_2 \text{ lim.} \cdot \vec{n} = \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2$$

Si à V_1 et V_2 correspondent, pour le conducteur d'indice i , des charges Q_{i1} et Q_{i2} , à V correspond Q_i tel que :

$$Q_i = \iint_i \sigma \, dS = \lambda_1 \iint_i \sigma_1 \, dS + \lambda_2 \iint_i \sigma_2 \, dS = \lambda_1 Q_{i1} + \lambda_2 Q_{i2}$$

Enfin, si à $V_1(M)$ et $V_2(M)$ de l'espace interconducteur correspondent, pour le conducteur d'indice i , des potentiels V_{i1} et V_{i2} , à $V(M)$ correspond V_i tel que, par continuité :

$$V_i = \lim_{M \rightarrow \Sigma_i} V(M) = \lambda_1 \lim_{M \rightarrow \Sigma_i} V_1(M) + \lambda_2 \lim_{M \rightarrow \Sigma_i} V_2(M) = \lambda_1 V_{i1} + \lambda_2 V_{i2}$$

Bref, la combinaison linéaire porte sur toutes les inconnues du problème.

3.d Théorème d'unicité.

Soient $V_1(M)$ et $V_2(M)$ deux solutions, nulles à l'infini par convention, d'un même problème particulier où l'on a imposé pour chaque conducteur soit sa charge (mais qui peut a priori ne pas avoir le même potentiel dans ces deux solutions), soit son potentiel (mais qui peut a priori ne pas avoir la même charge dans ces deux solutions).

En appliquant le théorème de superposition avec $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$, le potentiel $V(M) = V_1(M) - V_2(M)$ est solution du problème particulier, nulle à l'infini, où l'on a imposé pour chaque conducteur soit une charge nulle, soit un potentiel nul. Nous nous proposons de montrer que $V(M)$ est partout nul, donc que $V_1(M) = V_2(M)$, autrement dit qu'il n'y a qu'une seule solution au problème particulier initial.

Nous raisonnerons par l'absurde. Si $V(M)$ n'est pas partout nulle, elle passe par un extremum non nul. Sûr ? Cette propriété est vraie pour une fonction continue (V l'est car, par définition, son gradient est le champ, donc le gradient existe, donc V est dérivable, donc V est continue) sur un ensemble fermé, donc n'allant pas à l'infini. On est sauvé ici

par la valeur nulle uniforme à l'infini, ce qui permet de remplacer formellement⁹ l'infini par une sphère de rayon très grand mais fini. Supposons pour fixer les idées que cet extremum soit un maximum ; nous allons montrer qu'il ne peut exister nulle part.

Ce maximum, non nul, ne peut bien sûr pas se trouver sur un conducteur dont le potentiel est nul, ni de même à l'infini. Il ne peut pas se trouver dans l'espace interconducteur, cela a été montré plus haut. En adaptant cette démonstration, si le maximum est sur un conducteur, les lignes de champ divergent à partir de celui-ci, donc (cf supra) la densité surfacique y est partout positive, donc la charge aussi et le maximum ne peut être sur un conducteur dont la charge est nulle. Bref, il ne peut être nulle part, donc pas d'extremum, donc la fonction $V(M)$ est constamment nulle.

Remarque : Les mathématiciens ont formalisé cette démonstration avec des outils plus rigoureux mais n'oublions pas que les mêmes savants ont été les pères à la fois de l'électrostatique et de l'analyse mathématique, en particulier LAPLACE, dont on vient d'évoquer le nom.

4 Exemples de résolution de problèmes d'électrostatique des conducteurs.

Remarquons tout d'abord que si la géométrie n'est pas particulièrement simple, il est inutile d'espérer résoudre mathématiquement le problème. C'est le cas, désespéré donc, si l'on se donne deux conducteurs de forme complexe et que l'on impose entre eux une différence de potentiel grâce à une batterie d'accumulateurs, ceux de la figure 5 p. 18 par exemple.

Pour autant, la résolution de cas simples ne relève pas de calculs purement formels pour plusieurs raisons :

- Une des démarches nécessaires de la physique est la confrontation entre théorie et expérience ; elle ne peut être effectuée que dans les cas où l'on peut théoriquement trouver une solution explicite.
- La physique ne peut aider à concevoir efficacement des dispositifs technologiques que si l'on peut au préalable les concevoir théoriquement.
- Toujours dans un cadre technologique, il est plus facile d'usiner des formes simples que compliquées, de creuser un trou de section circulaire qu'elliptique par exemple.
- Dans le cas particulier de l'électrostatique, nous verrons plus loin que plus un conducteur est pointu, plus facilement il se décharge par ionisation de l'air ; la forme optimale est donc celle qui a partout la même courbure, donc une sphère, la plus simple des formes.

Je me sens donc autorisé à poursuivre.

9. Mathématiquement, on fait cela plus rigoureusement en *complétant* $\mathbb{R}^3$ par un unique point infini.



FIGURE 5 – Exemple de problème insoluble.

4.a Problèmes hautement symétriques.

- Symétrie sphérique.

Soit une sphère conductrice, de centre O de rayon R , seule dans l'espace. La symétrie impose que sa charge Q soit uniformément répartie sur la surface de la sphère d'aire $S = 4\pi R^2$ d'où une densité surfacique de charge uniforme :

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Par symétrie le champ en tout point est radial et son module (sa norme) ne dépend que de la distance au centre, que l'on peut exprimer ainsi : $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$. L'application du théorème de GAUSS à la sphère de centre O , de rayon r supérieur à R , aboutit classiquement (cf chapitre précédent) à :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Pour r inférieur à R , la charge intérieure à la surface de GAUSS est nulle et l'on retrouve que le champ est nul dans le conducteur.

Par intégration de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, en pratique, vu la symétrie, $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ et avec V nul à l'infini, on tire, pour $r > R$:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

de même par intégration d'un champ nul, on retrouve que le potentiel est uniforme dans le conducteur. Sa valeur U est obtenue par continuité $U = \lim_{r \rightarrow R} V(r)$, soit :

$$U = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 R}$$

On a exprimé tous ces résultats, en fonction de Q , tacitement élevée au rang de donnée du problème. Dans le cas où U serait la donnée, la dernière relation permet d'exprimer Q en fonction de U que l'on reporte dans toutes les autres, soit :

$$Q = 4 \pi \varepsilon_0 R U$$

$$V(r) = \frac{U R}{r}$$

$$E(r) = \frac{U R}{r^2}$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{R}$$

Par définition, on appelle *capacité* de la sphère *seule dans l'espace* le rapport $C = Q/U$ qui vaut ici

$$C = 4 \pi \varepsilon_0 R$$

• Symétrie cylindrique.

Soit un cylindre de révolution conducteur d'axe Oz , de longueur infinie, de rayon R , seul dans l'espace. Sans reprendre tous les détails de la démonstration, en tout points identiques à la précédente, on en déduit que σ est uniforme (la charge est donc infinie, on travaillera avec la charge Q_L par unité de longueur) de valeur :

$$\sigma = \frac{Q_L}{2 \pi R}$$

Pour $r > R$, le théorème de GAUSS conduit (voir le chapitre C-I) à

$$\vec{E} = \frac{Q_L}{2 \pi \varepsilon_0 r} \vec{e}_r$$

Par intégration, on en déduit le potentiel mais il est impossible d'imposer $V = 0$ à l'infini (c'est lié au fait qu'avec un cylindre infini, il y a des charges à l'infini) et la constante d'intégration est arbitraire, soit :

$$V(r) = -\frac{Q_L}{2 \pi \varepsilon_0} \ln r + Cte$$

A cause de cette constante arbitraire, le potentiel du conducteur ne peut être précisé ni la capacité définie.

Pour résoudre le problème posé par l'impossibilité d'imposer $V = 0$ à l'infini, on peut penser étudier un cylindre fini de longueur L très grande devant son rayon R . La solution du cylindre infini est une bonne approximation de celle de ce problème, mais uniquement pour les points loin des extrémités, en pratique dont la distance à l'extrémité la plus proche est grande devant la distance à l'axe, ce qui exclut, hélas, les points à l'infini et ne permet pas de conclure.

Ce problème n'a donc que peu d'intérêt. S'il est mentionné ici, c'est qu'un peu plus loin, on étudiera deux conducteurs cylindriques parallèles et qu'ainsi, il en reprendra.

4.b Le conducteur creux comme écran électrique.

• Ecran électrique.

Soit un problème particulier, de géométrie imposée, où il y a un conducteur creux au potentiel imposé V_0 . A l'extérieur se trouvent un certain nombre d'autres conducteurs dont on impose soit le potentiel V_i , soit la charge Q_i ; pour alléger la figure et l'exposé, disons le conducteur 1 au potentiel V_1 et le conducteur 3 avec la charge Q_3 . A l'intérieur se trouvent un certain nombre d'autres conducteurs dont on impose soit le potentiel V_i ou, ce qui revient au même, la différence de potentiel avec le conducteur creux, notée $U_i = V_i - V_0$, soit la charge Q_i ; pour alléger la figure et l'exposé, disons le conducteur 2 avec la différence de potentiel U_2 et le conducteur 4 avec la charge Q_4 . Tout ceci est résumé sur la figure 6 p. 21 où, pour aider à la lecture,

- les conducteurs dont le potentiel est imposé sont en rose Barbie et ceux dont la charge est imposée en bleu layette,
- les indices i sont pairs à l'intérieur, impairs à l'extérieur, nul pour le conducteur creux,
- les charges et potentiels donnés sont en majuscules, les inconnus en minuscules et pour le conducteur creux, on a distingué la charge sur la face interne q_i et celle sur la face externe q_e .

On remarquera qu'il y a deux domaines interconducteurs disjoints, l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur, ce qui permettra de les traiter séparément grâce au théorème de superposition avec des coefficients unité (la combinaison linéaire devient une somme).

On traitera un problème de même géométrie où l'on remplacera V_0 , V_1 et Q_3 par zéro et où l'on gardera les valeurs de U_2 et Q_4 , puis un autre de même géométrie où l'on remplacera U_2 (donc $V_2 = V_0$) et Q_4 par zéro et où l'on gardera les valeurs de V_0 , V_1 et Q_3 . La somme redonnera bien la situation de départ.

Dans le premier problème, si l'on applique la méthode de démonstration du théorème d'unicité, on arrive à la même conclusion *pour l'espace interconducteur extérieur* à savoir que le potentiel y est uniforme et nul comme à l'infini, le champ, les densités surfaciques et les charges y sont nuls (pour le conducteur creux, on parle de la charge de sa surface externe). Ce qui se passe pour l'espace interconducteur intérieur dépend des données de ce

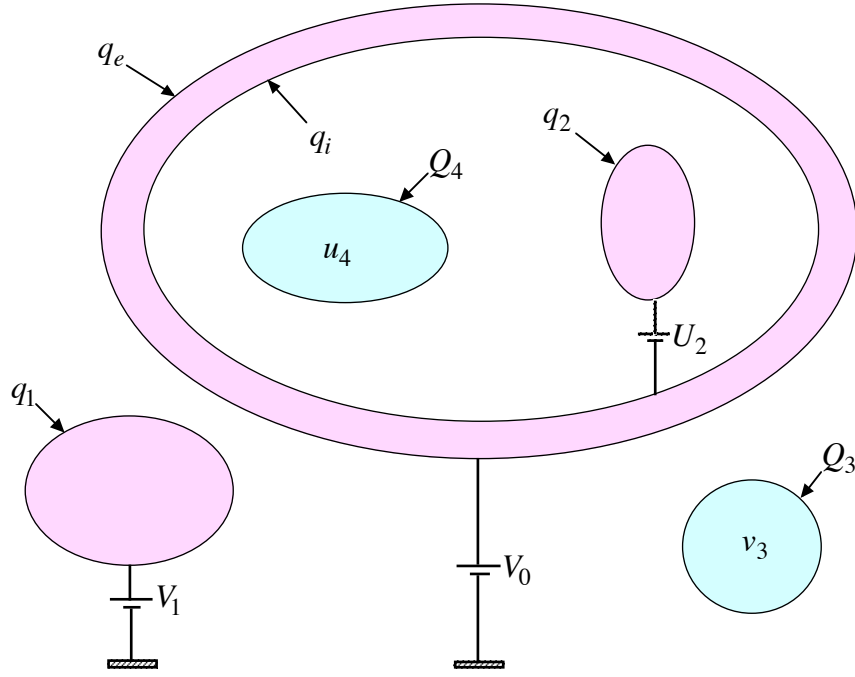


FIGURE 6 – Conducteur creux.

problème, soit U_2 et Q_4 . Résumons, en improvisant l'écriture :

$$\begin{cases} V_{\text{ext.}}(M) = 0 & \vec{E}_{\text{ext.}}(M) = \vec{0} & \sigma_e = \sigma_1 = \sigma_3 = 0 & q_e = q_1 = 0 \\ V_{\text{int.}}(M) = \text{fonction}(U_2, Q_4) & \vec{E}_{\text{int.}}(M) = \text{fonction}(U_2, Q_4) \\ \sigma_i, \sigma_2 \text{ et } \sigma_4 = \text{fonctions}(U_2, Q_4) & q_i \text{ et } q_2 = \text{fonctions}(U_2, Q_4) \end{cases}$$

Remarquons incidemment que la propriété fondamentale du corps creux (cf supra) entraîne que $q_i + q_2 + Q_4 = 0$, mais cette relation n'est pas ici utile à mon propos.

Dans le second problème, si l'on applique la méthode de démonstration du théorème d'unicité, on arrive à la même conclusion *pour l'espace interconducteur intérieur* à savoir que le potentiel y est uniforme (mais ici égal à V_0), le champ, les densités surfaciques et les charges y sont nuls (pour le conducteur creux, on parle de la charge de sa surface interne). Ce qui se passe pour l'espace interconducteur intérieur dépend des données de ce problème, soit V_0 , V_1 et Q_3 . Résumons, en improvisant l'écriture :

$$\begin{cases} V_{\text{int.}}(M) = V_0 & \vec{E}_{\text{int.}}(M) = \vec{0} & \sigma_i = \sigma_2 = \sigma_4 = 0 & q_i = q_2 = 0 \\ V_{\text{ext.}}(M) = \text{fonction}(V_0, V_1, Q_3) & \vec{E}_{\text{ext.}}(M) = \text{fonction}(V_0, V_1, Q_3) \\ \sigma_e, \sigma_1 \text{ et } \sigma_3 = \text{fonctions}(V_0, V_1, Q_3) & q_e \text{ et } q_1 = \text{fonctions}(V_0, V_1, Q_3) \end{cases}$$

Reste à effectuer la somme des deux solutions, nous symboliserons l'ensemble des données intérieures (U_2 et Q_4) par « INT » et des données extérieures (V_1 et Q_3) par « EXT ».

et laisserons V_0 à part.

A l'intérieur, on a :

$$\begin{cases} V_{\text{int.}}(M) = V_0 + \text{fonction}(\text{INT}) & \vec{E}_{\text{int.}}(M) = \text{fonction}(\text{INT}) \\ \sigma_i, \sigma_2 \text{ et } \sigma_4 = \text{fonctions}(\text{INT}) & q_i \text{ et } q_2 = \text{fonctions}(\text{INT}) \end{cases}$$

Ce qui se passe à l'intérieur ne dépend que de ce qu'il y a à l'intérieur ; le fait que V_0 s'ajoute au potentiel n'a aucune incidence car un potentiel est défini à une constante arbitraire près sans signification.

A l'extérieur, on a :

$$\begin{cases} V_{\text{ext.}}(M) = \text{fonction}(V_0, \text{EXT}) & \vec{E}_{\text{ext.}}(M) = \text{fonction}(V_0, \text{EXT}) \\ \sigma_e, \sigma_1 \text{ et } \sigma_3 = \text{fonctions}(V_0, \text{EXT}) & q_e \text{ et } q_1 = \text{fonctions}(V_0, \text{EXT}) \end{cases}$$

Ce qui se passe à l'extérieur ne dépend que la valeur de V_0 et de ce qu'il y a à l'extérieur. En pratique comme il est plus aisé d'imposer $V_0 = 0$ (mise à la masse), la dépendance en V_0 disparaît, mais elle n'est pas problématique.

Bref le conducteur creux à la masse (ou à un potentiel imposé) protège l'intérieur de l'extérieur et vice-versa. On réalise ainsi ce que l'on appelle un *écran électrique* ou un *blindage* ; on parle aussi de *cage de Faraday*. En pratique une paroi en grillage métallique à mailles assez serrées réalise à moindre frais la même protection.

• Ecran imparfait.

Que se passe-t-il si le fil qui impose au conducteur creux son potentiel est accidentellement, voire par malveillance¹⁰, arraché ? A priori, il n'y a plus de protection, mais si les conducteurs intérieurs dont le potentiel est imposé ont, non pas un potentiel absolu par rapport à l'infini, mais un potentiel relatif par rapport au conducteur creux, c'est à dire que c'est non V_i mais $U_i = V_i - v_0$ (avec les notations ci-dessus et en notant cette fois que v_0 est une inconnue du problème que l'on a donc écrite en minuscule), alors l'intérieur est toujours protégé de l'influence de l'extérieur mais plus l'inverse. C'est ce que nous allons monter ici.

La situation est désormais celle de la figure 7 p. 23.

Le conducteur creux est désormais isolé mais il ne faut pas croire pour autant que sa charge soit fixe, c'est le piège. En effet par l'intermédiaire du générateur U_2 , le conducteur 2 et le conducteur creux peuvent échanger des charges et c'est donc l'ensemble de ces deux conducteurs qui est isolé et dont la charge Q_T , donnée de ce nouveau problème, qui est fixe.

10. De quoi écrire un roman policier au titre-choc : « Crime parfait au Palais de la Découverte » ! Rappelons que dans ce Palais au plein cœur de Paris, pour un droit d'entrée inférieur au prix d'une place de cinéma, on a accès, entre autres, à de fabuleuses expériences d'électrostatique.

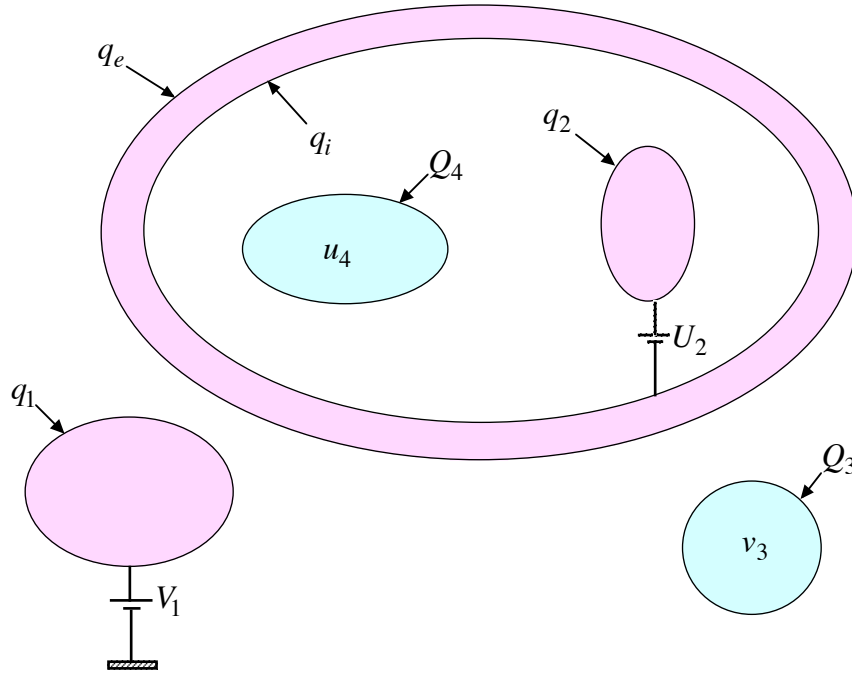


FIGURE 7 – Conducteur creux isolé.

On a donc $q_e + q_i + q_2 = Q_T$ mais par ailleurs la propriété fondamentale du corps creux (cf supra) entraîne que $q_i + q_2 + Q_4 = 0$; on en déduit aisément que $q_e = Q_T + Q_4$.

Là encore, on résoudra le problème par superposition. Dans la première étude, on annule U_2 et Q_4 et dans l'espace interconducteur intérieur, on démontrera, toujours par la méthode utilisée pour démontrer le théorème d'unicité que le potentiel est uniforme et donc que champ, densités surfaciques sont nulles ; par contre le potentiel uniforme dépend de V_1 , Q_3 et Q_T mais le potentiel étant défini à une constante près, cela importe peu. Ce qui se passe à l'intérieur ne dépend donc pas de ce qu'il y a à l'extérieur (pour l'autre moitié de la superposition les données correspondent à ce qu'il y a à l'intérieur).

Par contre, toujours pour la seconde étude où l'on annule V_1 , Q_3 et Q_T , dans l'espace interconducteur extérieur, sur l'une de ses frontières, la surface externe du conducteur intérieur se trouve la charge $q_e = Q_4$ (cf supra avec $Q_T = 0$). Donc ce qui se passe à l'extérieur dépend d'une donnée intérieure, Q_4 .

Remarque : Si le conducteur creux est isolé mais qu'un des conducteurs intérieurs a son potentiel absolu fixé, par un générateur branché entre lui et l'infini (en pratique une masse métallique lointaine), on ne peut plus rien démontrer : il n'y a plus de protection ni

dans un sens ni dans l'autre. La logique veut qu'il suffise d'un seul contre-exemple pour le prouver. En voici un simple.

Le conducteur creux est limité par deux sphères de même centre O , de rayons R_2 et R_3 , il est isolé et porte la charge Q connue répartie sur ses deux faces de façon inconnue, son potentiel V est inconnu. Il n'y a qu'un conducteur intérieur, au potentiel V_1 , il est sphérique de même centre O que le conducteur creux, de rayon R_1 . Il n'y a qu'un conducteur extérieur, au potentiel V_2 , lui aussi creux limité par deux sphères de centre O (encore) et de rayons R_4 et R_5 .

Appelons q la charge inconnue du conducteur intérieur. Par influence totale (cf supra), la charge interne du conducteur creux est $-q$ et donc puisque sa charge totale est Q , sa charge externe est $Q + q$.

Le théorème de GAUSS donne une expression du champ entre R_1 et R_2 , par intégration du potentiel; on en déduit, par continuité que la différence de potentiel entre conducteur creux et conducteur interne est :

$$V - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

En raisonnant de la même façon entre R_3 et R_4 , on en déduit que :

$$V_2 - V = \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3} \right)$$

Par sommation, on tire enfin :

$$V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

Ce qui prouve que q et, par ricochet, les champs dans les deux espaces interconducteurs dépendent à la fois d'une donnée intérieure V_1 et d'une donnée extérieure V_2 .

Je n'ai pas cru utile de faire une figure mais si elle vous manque, regardez autour de vous, vous avez bien du papier et un crayon, non ?

4.c Résolution par analogie.

• Principe.

Imaginons un problème d'électrostatique sans problème de migration des charges, par exemple un problème de charges ponctuelles, ou encore un problème formel physiquement impossible. Soit dans la solution de ce problème deux équipotentielles fermées dont les intérieurs sont disjoints et tel que toutes les charges soient à l'intérieur de l'une ou l'autre. Imaginons un problème avec deux conducteurs dont les surfaces soient exactement, en forme, taille, orientation et position relative, les équipotentielles du premier problème. Eh

bien la fonction potentiel du premier problème vérifie $\Delta V = 0$ là où ρ est nul (cf l'équation de POISSON), donc partout sauf au niveau des charges, donc dans l'espace interconducteur du second problème, au vu de la localisation des charges dans le premier et par ailleurs, elle est, par construction du second problème, constante sur les surfaces des conducteurs. C'est donc la solution du « problème général » ; en général, en adaptant les données du premier problème, on arrive à en faire une solution d'un « problème particulier ».

Il existe quelques (ou plutôt peu de) situations où cette démarche est exploitable.

• Une sphère et un point. Thème et variations.

Soit le problème suivant qui sert de référence : Une charge q en un point A et une charge de signe opposé notée $-q'$ avec $q' \neq q$ en un point B . Le potentiel en tout point M est donné par :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{AM} - \frac{q'}{BM} \right)$$

La forme des surfaces équipotentielles est assez complexe, sauf l'équipotentielle particulière $V(M) = 0$ car pour M sur cette équipotentielle, on a :

$$\frac{AM}{BM} = \frac{q}{q'}$$

et l'on sait¹¹ que l'ensemble des points qui vérifient $AM/BM = Cte$ est une sphère centrée sur la droite AB .

◦ **Le thème** : Soit une sphère conductrice de centre O , de rayon R , mise à la masse, donc au potentiel nul. Si elle est seule dans l'espace (cf supra) sa charge sera nulle et la densité surfacique sera partout nulle, ce qui n'est guère passionnant. Comme nous nous ennuyons un peu, il nous prend la fantaisie de placer en un point A extérieur à la sphère, situé à une distance D de son centre une charge ponctuelle q (en pratique une sphère chargée de centre A et de rayon négligeable devant R). Que se passe-t-il ?

Commençons par faire en sorte que l'équipotentielle $V = 0$ du premier problème soit confondue avec la sphère du second. Avec l'aide de la figure 8 p. 26, cherchons donc à placer un point B sur la droite OA et à trouver une charge $-q'$ tels que q en A et $-q'$ en B , s'ils étaient seuls, créeraient pour surface équipotentielle $V = 0$ cette sphère.

Comme cette équipotentielle est une sphère centrée sur AB , il suffit de vérifier la propriété $V = 0$ en deux points de la sphère sur l'axe, I et J sur la figure. L'équivalence

11. Pour le lecteur qui aurait oublié sa géométrie, si $V = 0$ alors $q'^2 AM^2 = q^2 BM^2$. En prenant Ox confondu avec AB et en notant a et b les abscisses de A et B , les coordonnées x , y et z de M vérifient :

$$q'^2 [(x-a)^2 + y^2 + z^2] = q^2 [(x-b)^2 + y^2 + z^2]$$

Les termes sont au plus de degré deux, c'est une conique ; les coefficients des termes en x^2 , y^2 et z^2 sont égaux, c'est une sphère ; les seuls termes de degré un sont en x , elle est centrée sur Ox . Pas la peine d'en dire plus.

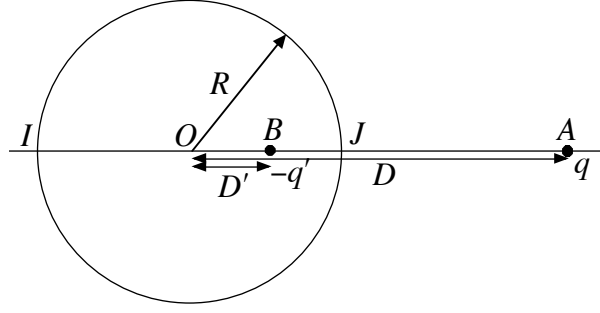


FIGURE 8 – Sphère conductrice et charge ponctuelle.

entre $V = 0$ et $\frac{AM}{BM} = \frac{q}{q'}$ donne en I et J :

$$\frac{q}{q'} = \frac{AI}{BI} = \frac{D+R}{D'+R} = \frac{AJ}{BJ} = \frac{D-R}{R-D'}$$

On obtient d'autres fractions égales à celles-là par combinaison linéaire de même coefficients des numérateurs et des dénominateurs ; ici on en prendra deux, la demi-somme et la demi-différence. La propriété est classique, mais souvent perdue de vue ; dommage, elle est bien utile et aisée à démontrer¹². Nous arrivons donc à :

$$\frac{q}{q'} = \frac{D+R}{D'+R} = \frac{D-R}{R-D'} = \frac{D}{R} = \frac{R}{D'}$$

De l'égalité des deux dernières expressions, on tire D' , soit la position de B ; le résultat est $D' = \frac{R^2}{D}$. De l'égalité entre la première et l'avant dernière, on trouve q' soit, au signe près, la seconde charge ; le résultat est $q' = q \frac{R}{D}$.

Il ne nous reste plus qu'à tirer les fruits de l'analogie. Dans l'espace interconducteur, le champ électrique et le potentiel électrique en un point M sont :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q \frac{\vec{AM}}{AM^3} - q' \frac{\vec{BM}}{BM^3} \right)$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{AM} - \frac{q'}{BM} \right)$$

12. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors pour tout λ et μ (sauf s'ils sont tous deux nuls), on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}$$

Il suffit d'appeler k la valeur commune des deux rapports, alors $a = kb$ et $c = kd$ d'où $\lambda a + \mu c = k(\lambda b + \mu d)$ qui donne une troisième expression de k , égales aux deux autres .

où l'on a pas reporté $q' = q \frac{R}{D}$ pour préserver la symétrie d'écriture et où B est défini par sa position $D' = \frac{R^2}{D}$.

Si l'on fait tendre M vers la surface, on accède à la densité surfacique via le théorème de COULOMB sous la forme $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{lim.}} \cdot \vec{n}$ où, ici, $\vec{n} = \frac{\vec{OM}}{R}$, d'où :

$$\sigma = \frac{1}{4\pi R} \left(q \frac{\vec{AM} \cdot \vec{OM}}{AM^3} - q' \frac{\vec{BM} \cdot \vec{OM}}{BM^3} \right)$$

et l'on poursuit les calculs en plaçant l'origine en O et en paramétrant la position de M par θ , angle entre OA et OM ; on en fait grâce au lecteur et on en profite pour le remercier de sa patience et de son attention.

Enfin, pour calculer la charge totale de la sphère, il faut éviter le piège béant consistant à intégrer la densité surfacique qu'on vient de calculer mais utiliser l'astuce qui tue (le problème, pas le lecteur, rassurez-vous!). Imaginons une sphère de centre O et de rayon intermédiaire entre R et D de sorte qu'elle contienne la sphère conductrice mais pas la charge q . Dans les deux problèmes, le champ et le même donc le flux à travers cette surface est le même, donc, théorème de GAUSS oblige, la charge intérieure est la même ; dans l'un des problèmes, c'est la charge de la sphère conductrice, dans l'autre, c'est $-q'$. Donc la charge du conducteur est $-q' = -q \frac{R}{D}$. Tout simplement.

◦ **Première variation** : On reprend le même problème mais, cette fois, la sphère n'est plus au potentiel nul mais au potentiel U imposé par un générateur.

La solution est simple¹³ : on travaille par superposition et l'on cherche un système simple de charges ponctuelles, tel que la sphère de centre O et de rayon R soit l'équipotentielle U et il n'y a pas à chercher bien loin : une charge ponctuelle Q en O donne des équipotentielles sphériques de centre O . Comme le potentiel est en $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, il suffira de choisir $Q = 4\pi\varepsilon_0 R U$ pour avoir $V(R) = U$. Après superposition, on trouve, de la même façon que dans le problème-thème :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(Q \frac{\vec{OM}}{OM^3} + q \frac{\vec{AM}}{AM^3} - q' \frac{\vec{BM}}{BM^3} \right) \\ V(M) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{OM} + \frac{q}{AM} - \frac{q'}{BM} \right) \\ \sigma &= \frac{1}{4\pi R} \left(Q \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OM}}{OM^3} + q \frac{\vec{AM} \cdot \vec{OM}}{AM^3} - q' \frac{\vec{BM} \cdot \vec{OM}}{BM^3} \right) \\ \sigma &= \frac{1}{4\pi R} \left(Q \frac{1}{R} + q \frac{\vec{AM} \cdot \vec{OM}}{AM^3} - q' \frac{\vec{BM} \cdot \vec{OM}}{BM^3} \right) \end{aligned}$$

13. Une solution, une fois trouvée, est toujours simple ; ce n'est qu'avant qu'elle est compliquée !

où l'on a pas reporté $q' = q \frac{R}{D}$ ni $Q = 4 \pi \varepsilon_0 R U$ pour préserver la symétrie d'écriture et où B est défini par sa position $D' = \frac{R^2}{D}$. Quant à la charge totale en surface de la sphère, la même astuce donne $Q - q' = 4 \pi \varepsilon_0 R U - q \frac{R}{D}$

◦ **Seconde variation** : On reprend le même problème mais, cette fois, la sphère est isolée et porte une charge imposée Q_0 .

C'est encore plus simple : on adapte la première variation, en choisissant non plus en fonction de U mais de sorte que $Q - q' = Q_0$; les résultats précédents, exprimées avec q , q' et Q restent valables. Notons que la relation $Q = 4 \pi \varepsilon_0 R U$ reste valable mais donne cette fois le potentiel inconnu de la sphère.

• Force et faiblesse de la méthode.

La méthode est d'une grande efficacité, mais (car il y a un mais) elle ne s'applique que dans peu de cas. Avec deux charges ponctuelles, les surfaces équipotentielles n'ont pas de forme simple, sauf une qui est sphérique, et avec plus de deux charges, c'est encore pire. On ne peut donc traiter que le problème d'une sphère conductrice et d'une charge ponctuelle ; par contre, un problème de deux conducteurs sphériques est insoluble par cette méthode.

Un autre type d'analogie est traité ci-après.

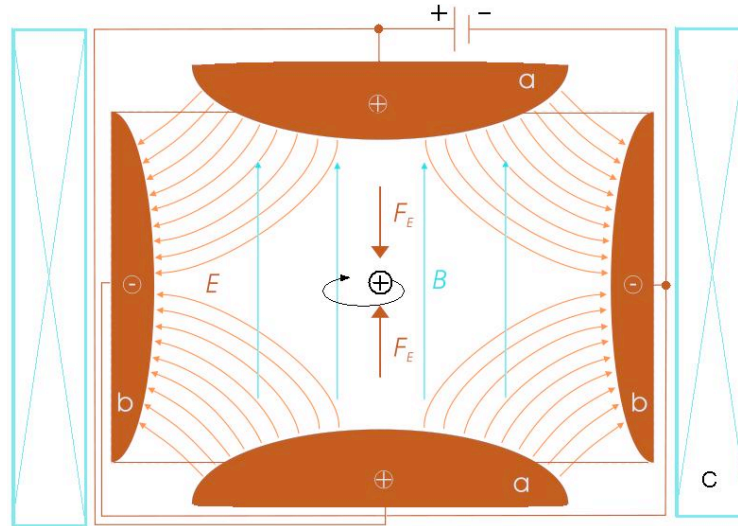


FIGURE 9 – Piège de Penning.

Auparavant, citons une utilisation technologique : le piège de PENNING qui est la combinaison d'un champ magnétique uniforme selon l'axe des z et créé par un solénoïde d'axe Oz et d'un champ électrique correspondant à un potentiel dont l'expression en fonction

des coordonnées est $V(M) = V_0 + 2a z^2 - a x^2 - a y^2$; ce dispositif permet de piéger¹⁴ une particule chargée autour du point O . Les surfaces équipotentiellles sont des hyperboloïdes de révolution à une ou deux nappes selon la valeur du potentiel. Eh bien, la façon la plus simple de réaliser un tel champ est de construire deux surfaces métalliques en forme d'hyperboloïdes et de leur donner la bonne différence de potentiel ; le théorème d'unicité fait le reste. La figure 9 p. 28 en donne un schéma de principe en coupe dans un plan méridien (le magnétisme en bleu-vert, l'électrostatique en rouge).

• Cylindres à axes parallèles.

Soit le problème classique d'électrocinétique suivant, qui sert de référence : deux fils infinis parallèles, de diamètre nul, portent l'un une densité linéique de charges uniforme λ , l'autre la densité $-\lambda$. On traite les fils séparément, le théorème de Gauss donne des champs radiaux en $1/r$ et donc des potentiels en $-\ln(r)$. Donc si l'on appelle r_1 la distance d'un point M au premier fil et r_2 au second, on a $V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ en choisissant le potentiel nul, non à l'infini car ce n'est pas possible, mais dans le plan de symétrie.

L'invariance par translation donne des équipotentiellles cylindriques (au sens large, c'est à dire sans préjuger de la forme de la base du cylindre) ; on se placera donc dans un plan perpendiculaire aux fils qui le coupent en B (λ) et A ($-\lambda$) et où les surfaces équipotentiellles deviennent des courbes d'équation $V = Cte$, soit $\frac{r_2}{r_1} = \frac{AM}{BM} = Cte$. Comme précédemment, il s'agit de cercles centrés sur AB mais cette fois quelque soit la valeur du potentiel choisi. La figure 10 p. 29 en montre quelques-uns ; les nostalgiques de la géométrie y reconnaîtront un « faisceau de cercles à points limite » ou points de PONCELET.

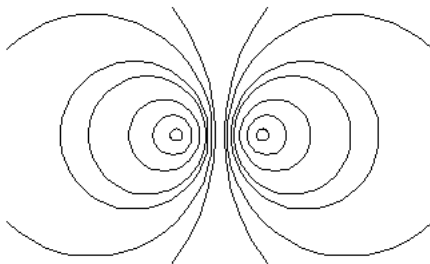


FIGURE 10 – Equipotentiellles (fils parallèles).

Voici maintenant un exemple de problème que l'on peut traiter par analogie : deux cylindres de révolution, conducteurs, infinis, de même rayon R , à axes parallèles et distants de D présentent une différence de potentiel U . On veut résoudre ce problème. C'est une bonne approximation d'une ligne d'alimentation électrique bifilaire et connaître le champ entre elles permet de savoir de combien les écarter en fonction de l'isolant¹⁵ choisi (on

14. ce qui sera étudié dans le chapitre C-IX (mouvement des charges dans un champ électromagnétique).

15. air, ou autre pour une ligne enfouie

rappelle qu'il suffit de remplacer ε_0 par un ε caractéristique de l'isolant). Donc c'est un problème technologiquement pertinent, au contraire du précédent.

On fait une figure dans un plan perpendiculaire, les axes se coupent en A_0 et B_0 et l'on va chercher à placer deux fils à diamètre nul, chargés en λ et $-\lambda$, le coupant en A et B et qui donneraient, s'ils étaient seuls, un potentiel qui admettrait les surfaces des cylindres comme équipotentiellles. Pour adapter les deux problèmes, on choisit aussi $V = 0$ sur la bissectrice de A_0B_0 de sorte que le cylindre de droite a un potentiel $U/2$ et celui de gauche $-U/2$. La figure 11 p. 30 résume tout ceci et précise les notations.

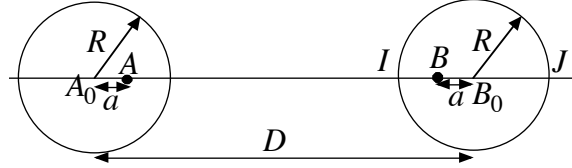


FIGURE 11 – Cylindres parallèles.

Dans le problème à fils de diamètres nuls, pour M sur le cylindre de droite, qui n'est qu'une équipotentielle dans ce problème, on veut $V(M) = \frac{U}{2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{AM}{BM}\right)$ soit encore $\frac{AM}{BM} = \exp\left(\frac{\pi\varepsilon_0 U}{\lambda}\right)$ et la suite se gère de la même façon que dans le problème précédent, donc nous irons plus vite. On utilise encore les points I et J du cylindre de droite sur A_0B_0 (la symétrie rend inutile l'utilisation de points I' et J' sur l'autre cylindre). Donc :

$$\exp\left(\frac{\pi\varepsilon_0 U}{\lambda}\right) = \frac{AI}{BI} = \frac{D-a-R}{R-a} = \frac{AJ}{BJ} = \frac{D-a+R}{R+a} = \frac{D-a}{R} = \frac{R}{a}$$

L'égalité entre les deux dernières expressions permet le calcul de a , c'est à dire la position de A et B . On a :

$$\begin{aligned} \frac{D-a}{R} &= \frac{R}{a} \\ (D-a)a &= R^2 \\ a^2 - Da + R^2 &= 0 \\ A_0A = B_0B = a &= \frac{D - \sqrt{D^2 - 4R^2}}{2} \end{aligned}$$

Remarquons que l'autre solution n'en est pas une car $a' = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4R^2}}{2}$ c'est A_0B ou B_0A , simple conséquence de $a + a' = D$.

L'égalité entre la première et dernière expression permet de savoir quelle densité linéique choisir pour obtenir la différence de potentiel donnée. En effet :

$$\exp\left(\frac{\pi\varepsilon_0 U}{\lambda}\right) = \frac{R}{a}$$

$$\lambda = \frac{\pi \varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{R}{a}\right)} = \frac{\pi \varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{2R}{D - \sqrt{D^2 - 4R^2}}\right)}$$

Dans l'espace interconducteur, les deux problèmes ont même solution, donc, en ne reportant pas l'expression de λ , ni celle de a (caché dans la position de A et B), on a :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{AM}{BM}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} (\ln AM - \ln BM)$$

et, puisque, à un potentiel en $-\ln r$ correspond un champ radial en $1/r$ (cf supra), on a aussi :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{BM}}{BM^2} - \frac{\vec{AM}}{AM^2} \right)$$

En raisonnant comme dans le problème précédent, le densité surfacique sur l'un quelconque des conducteurs (celui de droite, par exemple) est :

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}_{\text{lim.}} \cdot \vec{n} = \varepsilon_0 \vec{E}(M) \cdot \frac{\vec{B_0M}}{R}$$

où, bien sûr, M est sur le conducteur.

Enfin, pour la charge totale par unité de longueur du conducteur de droite, la même astuce que dans le problème précédent permet d'affirmer sans calcul qu'elle vaut λ , dont l'expression a été calculée plus haut.

Remarque 1 : Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles et, dans un plan orthogonal aux cylindres, aux courbes équipotentielles qui forment dans ce plan un faisceau de cercles à points limites. Il se trouve¹⁶ qu'un résultat classique de géométrie est que l'ensemble des cercles qui passent par les points limites, ici A et B , formant un « faisceau de cercles à points communs », est justement l'ensemble des courbes orthogonales aux cercles du premier faisceau. Dans l'espace interconducteur, chaque cercle passant par A et B est limité à deux arcs qui sont deux lignes de champ allant de l'un des conducteurs à l'autre, dans le sens des potentiels décroissant.

Remarque 2 : Sur le même principe, on peut étudier, avec à peine plus de difficultés, le cas d'un conducteur creux à surface interne cylindrique contenant un cylindre lui aussi cylindrique mais d'axe différent, toutefois parallèle au premier. L'intérêt est que cela modélise un tunnel (qu'il est plus facile de creuser cylindrique avec les machines modernes, comme il est plus facile, avec une perceuse, de percer un trou cylindrique dans n'importe quoi) creusé dans un sol conducteur et dans lequel passe un fil électrique placé en hauteur, près du plafond, pour qu'on puisse y circuler.

16. Ce serait trop long à expliquer ici.

4.d Pouvoir des pointes.

On a constaté que lorsqu'un conducteur possède une pointe, au niveau de celle-ci, le champ est plus intense, ce qui favorise la décharge du conducteur par ionisation de l'air. Le mécanisme est le suivant : un champ exerce une force sur les électrons d'une molécule dans un sens et sur les noyaux dans l'autre et, s'il est assez intense, on conçoit que cela puisse mener à la rupture en ions et électrons. Celle-ci effectuée, les électrons se meuvent dans un sens, les ions de l'autre, on peut du reste mettre en évidence ce mouvement avec la flamme d'une bougie. Celles des charges qui se dirigent vers le conducteur et finissent par y arriver sont forcément de signe opposé à celle portées par le conducteur sur sa pointe et les neutralisent donc : le conducteur *se décharge*. Si le mouvement des charges est intense, tout cela se comporte comme un courant électrique qui chauffe l'air par effet Joule : il se forme des étincelles, voire à plus grande échelle des éclairs.

Il y a plusieurs façons de justifier qualitativement cette propriété. Je ne résiste pas à exhiber un autre exemple de résolution de problème électrostatique, qui fait appel, comme situation de référence, à un segment uniformément chargé et qui permet d'étudier un conducteur en forme d'ellipsoïde de révolution autour de son grand axe. La première situation est physiquement improbable voire impossible et la seconde peu fréquente, sauf à offrir comme trophée à la coupe du monde de rugby un ballon plaqué or, mais on peut réhabiliter cet exercice, qui date du temps, pas si lointain, où l'on enseignait la physique comme une application des mathématiques, en l'utilisant pour illustrer de façon quantitative le pouvoir des pointes.

• Le problème de référence.

Un segment AB porte une charge uniformément répartie avec une densité linéique λ . On se propose de calculer le champ en un point M quelconque ; on appelle H la projection orthogonale de M sur AB et h la distance MH de M à AB . On procède par intégration des champs créés par les segments élémentaires PP' de AB (agrandis sur la figure 12 p. 33 pour la lisibilité). Le point P est repéré par l'angle θ entre MH et MP et P' par l'angle $\theta + d\theta$ entre MH et MP' .

Le segment PP' crée un champ de direction PM (car P et P' sont quasiment confondus) et de module (de norme) :

$$dE = \frac{\lambda PP'}{4\pi \varepsilon_0 PM^2}$$

On a (cf figure) $PM = \frac{h}{\cos \theta}$ et $PP' = HP' - HP = d(HP) = d(h \tan \theta) = \frac{h d\theta}{\cos^2 \theta}$, on en tire aisément :

$$dE = \frac{\lambda h d\theta}{4\pi \varepsilon_0 h^2}$$

donc formellement, en direction comme en module, le champ que créerait l'arc de cercle QQ' , de centre M , de rayon $h = MH$, Q et Q' étant les intersections de MP et MP' avec

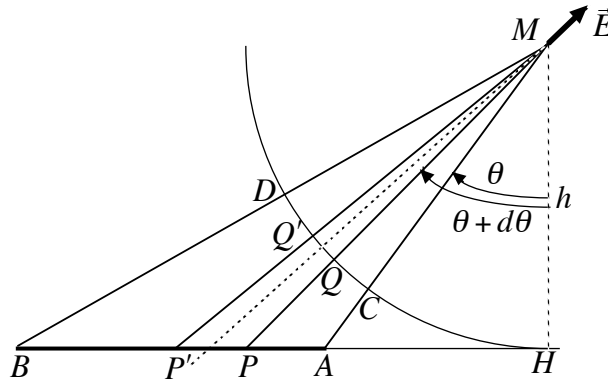


FIGURE 12 – Segment uniformément chargé.

le cercle (cf figure) et chargé avec le densité linéique λ .

Par intégration, le segment PP' crée le même champ que celui que créerait l'arc CD , C et D étant les intersections de MA et MB avec le cercle (cf figure). Par symétrie ce champ est porté par la bissectrice de l'angle CMD , c'est-à-dire AMB ; la surface équipotentielle passant par M , orthogonale au champ est donc orthogonale à cette bissectrice. De façon générale, une surface équipotentielle est donc orthogonale, en chacun de ses points M à la bissectrice de l'angle AMB . On reconnaît là¹⁷ une propriété caractéristique d'une ellipse de foyers A et B . Les équipotentielles de ce problème sont donc toutes ces ellipses confocales de foyers A et B .

• Conducteur ellipsoïdal

On en déduit, par analogie que potentiel et champ à l'extérieur d'un ellipsoïde de révolution autour de son grand axe et de foyers F' et F sont les mêmes que ceux créés par un segment uniformément chargé $F'F$, le conducteur d'un problème et le segment de l'autre ayant la même charge (même explication que plus haut). La figure 13 p. 34 précise les notations, classiques, pour l'ellipse, section de l'ellipsoïde dans un plan méridien; un segment PP' de $F'F$ est repéré par $r = AP$ et $r + dr = AP'$.

Le conducteur est équipotentiel, on calcule son potentiel au point le plus simple : A (pas un point intérieur comme le centre car l'analogie ne porte que sur l'espace extérieur et la surface par continuité). Le potentiel de l'ellipsoïde est donc par intégration :

$$V = V(A) = \int_F^{F'} \frac{\lambda PP'}{4\pi\epsilon_0 AP} = \int_{a-c}^{a+c} \frac{\lambda dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a+c}{a-c}\right)$$

Et par ailleurs, la charge du conducteur, égale à celle du segment dans l'autre problème est $Q = \lambda F'F = 2\lambda c$, ce qui permet de définir, comme pour la sphère seule (cf supra) la

17. Le démontrer serait une trop longue digression. Nous admettons.

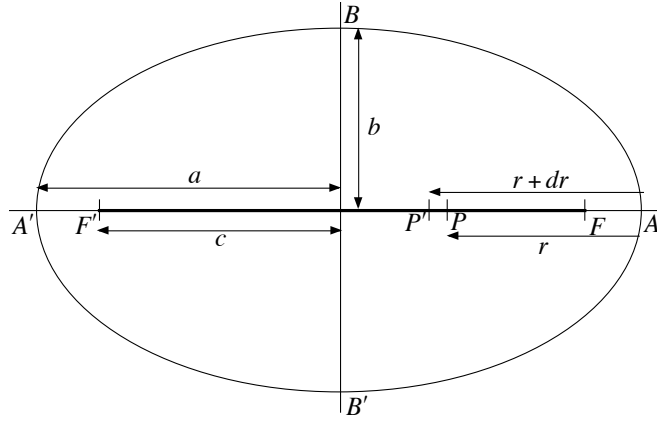


FIGURE 13 – Conducteur ellipsoïdal.

capacité C de l'ellipsoïde seul dans l'espace (voir aussi plus loin), donné ici par :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{8 \pi \varepsilon_0 c}{\ln \left(\frac{a+c}{a-c} \right)}$$

ce qui est ici anecdotique, car nous nous intéressons au champ limite à proximité de la sphère. On peut le calculer aisément en A extrémité du grand axe ; en module :

$$\lim_{M \rightarrow A} E(M) = \int_F^{F'} \frac{\lambda PP'}{4 \pi \varepsilon_0 AP^2} = \int_{a-c}^{a+c} \frac{\lambda dr}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a+c} \right) = \frac{\lambda}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{2c}{a^2 - c^2}$$

soit avec $Q = 2 \lambda c$:

$$\lim_{M \rightarrow A} E(M) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 (a^2 - c^2)}$$

A charge Q égale et à grand axe a égal, ce champ est une fonction monotone de c ; parallèlement, quand c diminue, l'ellipsoïde devient de plus en plus mince entre B et B' et donc de plus en plus pointu en A (on rappelle que $b^2 = a^2 - c^2$). Pour c nul (il s'agit d'une sphère), il est minimum et pour c tendant vers a , l'ellipsoïde prend la forme d'un bâton mince et renflé en son centre et très pointu en ses extrémités. La formule montre aisément que le champ devient alors très grand (il tend vers l'infini). Le pouvoir des pointes est ainsi illustré. On pourrait poursuivre en calculant le champ en B (attention le champ à intégrer n'a plus une direction fixe) et exhiber la formule donnant le rayon de courbure d'une ellipse mais ça ne rajouterait rien au propos.

5 Capacités et aspects énergétiques.

5.a Capacité d'un conducteur seul dans l'espace.

Soit un conducteur de forme et de taille donnée. Portons-le au potentiel unité V_u (dans le système international $V_u = 1$ V) ; sa charge est alors notée Q_u et l'on définit le coefficient C par $Q_u = C V_u$, ce qui revient à noter sa charge sous cette forme $C V_u$ ¹⁸. Appliquons le théorème de superposition en limitant la combinaison linéaire à un seul terme avec le coefficient $\lambda = \frac{V}{V_u}$ où V est un potentiel quelconque. Le potentiel devient alors $\lambda V_u = V$, c'est normal, : c'est à cet effet que l'on a choisi cette valeur pour le coefficient ! La charge devient :

$$Q = \lambda Q_u = \frac{V}{V_u} C V_u = C V$$

Ceci montre que la charge est proportionnelle au potentiel ; le coefficient C appelé (on l'a rencontré plus haut) *capacité du conducteur seul dans l'espace*. Par exemple (cf supra) la capacité d'une sphère seule, de rayon R , est $C = 4 \pi \varepsilon_0 R$.

Dans le système international, elle s'exprime en Farad (symbole F) qui est une unité énorme. Une sphère seule de capacité un Farad doit avoir¹⁹ un rayon de $9 \cdot 10^9$ m, de l'ordre de vingt-cinq fois la distance Terre-Lune ou d'un quinzième de la distance Terre-Soleil (j'arrondis).

5.b Matrice capacité d'un système de conducteurs.

Soit un ensemble de n conducteurs, repérés par un indice i ou j , de taille, forme, orientation et position relative données.

Portons le conducteur d'indice j au potentiel unité V_u et tous les autres au potentiel nul (celui de l'infini). Dans cette expérience de pensée, on note (cf supra) $C_{ij} V_u$ la charge du conducteur i et ce pour i prenant toutes les valeurs de 1 à n , j compris. On réitère cette démarche (indicée par j) pour toutes les valeurs de j de 1 à n . On applique enfin le théorème de superposition avec les coefficients $\lambda_j = \frac{V_j}{V_u}$ où les V_j sont n potentiels arbitraires. Le résultat de cette superposition pour un conducteur quelconque d'indice i est

- pour son potentiel $\sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot 0 + \lambda_i V_u = V_i$, normal, on a œuvré à cette fin,
- pour sa charge $Q_i = \sum_j \lambda_j C_{ij} V_u = \sum_j C_{ij} V_j$

On va bien sûr remarquer une structure matricielle, on notera $(Q) = (C)(V)$ où (Q) est la matrice colonne des charges et (V) celle des potentiels et (C) une matrice $n \times n$ de

18. On note souvent dans la littérature, pour alléger l'exposé, C la charge quand le potentiel est $V = 1$ et l'on prend alors $\lambda = V$. Ça allège effectivement mais en contrepartie, ça pose un sérieux problème d'homogénéité. Comme ce cours se veut un regard en arrière pour consolider ses bases, je me dois d'être rigoureux.

19. avec $\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$

coefficients C_{ij} qu'on appelle *matrice capacité*. Le terme diagonal C_{ii} est appelée capacité du conducteur i *en présence des autres* et le terme non diagonal C_{ji} *coefficient d'influence* du conducteur j sur le conducteur i .

Remarque 1 : Il importe de bien comprendre que les valeurs des termes de la matrice capacité dépendent de la géométrie du système de conducteurs.

Remarque 2 : Les différentes propriétés de la matrice capacité apparaîtront au fil de la suite du chapitre.

Remarque 3 : Revenons à la situation où le conducteur d'indice j est au potentiel unité V_u et tous les autres au potentiel nul (celui de l'infini). Les lignes de champ ne peuvent partir que du conducteur j et ne peuvent arriver qu'à l'un des autres ou à l'infini (voir propriétés de l'espace interconducteur au paragraphe 2.a p. 10). Il en résulte que sur le conducteur j , la densité surfacique est partout positive (voir au même endroit), donc la charge aussi et donc $C_{jj} > 0$; il en résulte aussi que sur tous les autres, la densité est négative donc $C_{ij} < 0$ pour $i \neq j$. Enfin le théorème des éléments correspondants (voir paragraphe 2.b p. 12) montre que chaque C_{ij} est l'opposé d'une partie de C_{jj} , mais qu'il y a une partie de C_{jj} qui ne correspond, sauf exception (influence totale), à aucun C_{ij} ; c'est celle d'où partent les lignes de champ allant à l'infini. En conclusion, pour la matrice

- les termes diagonaux sont strictement positifs ($C_{ii} > 0$)
- les termes non diagonaux sont strictement négatifs ($C_{ij} < 0$ si $j \neq i$)
- la somme des termes d'une même colonne²⁰ est positive ou nulle ($\sum_{i=1}^{i=n} C_{ij} \geq 0$)

Remarque 4 : En inversant la matrice, on peut écrire $(V) = (C)^{-1}(Q)$; la matrice inverse n'a pas reçu, à ma connaissance, de nom particulier. Je noterai un peu plus loin $\tilde{C}_{ij}$ ses coefficients.

5.c Energie d'un système de conducteurs.

Imaginons un système de conducteurs de géométrie donnée, dans l'état d'équilibre défini par les potentiels V_i de ses conducteurs, auxquels la matrice capacité associe les charges Q_i . Le théorème du superposition, appliqué à ce seul équilibre et en rebaptisant l'unique coefficient x au lieu de λ et supposé compris entre 0 et 1, donne un état caractérisé par les potentiels $x V_i$ et les charges $x Q_i$, que l'on appellera l'état x . On se propose de calculer l'énergie fournie au système pour passer de l'état x à l'état $x + dx$, puis par intégration pour passer de l'état $x = 0$ à l'état $x = 1$ et l'on conviendra tout naturellement d'affecter une énergie nulle à l'état $x = 0$ où il n'y a nulle part de charges, donc aucune interaction électrique.

La première question est de savoir qui fournit l'énergie. Il ne s'agit pas de travail de forces, car il n'y a pas de déplacement. En fait ce sont les générateurs (nécessaires pour imposer la valeur des potentiels) qui fournissent une énergie d'ordre électrocinétique. Entre

20. et aussi d'une même ligne : on verra plus loin que la matrice est symétrique.

les états x et $x + dx$, le générateur branché entre l'infini et le conducteur i fournit une intensité I_i pendant un temps τ tel que $I_i \tau = dQ_i = Q_i dx$, variation de la charge du conducteur i ; pendant ce temps, sa force électromotrice²¹ ne varie quasiment pas et reste quasiment égale à $U_i = x V_i$. Il fournit donc la puissance $U_i I_i$ pendant le temps τ donc l'énergie $U_i I_i \tau = U_i dQ_i = Q_i V_i x dx$. L'ensemble des générateurs fournit donc la somme de ces expressions et par intégration, l'énergie du système des conducteurs est :

$$\mathcal{E} = \int_0^1 \sum_i Q_i V_i x dx = \sum_i Q_i V_i \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

Remarque 1 : En présentant $\sum_i Q_i V_i$ comme un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et ce dernier comme le produit matriciel d'une matrice ligne à gauche (transposée d'une matrice colonne) et d'une matrice colonne à droite, puis en faisant intervenir la matrice capacité, on peut écrire :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} {}^t(V)(Q) = \frac{1}{2} {}^t(V)(C)(V)$$

qui est l'écriture, a priori non canonique d'une forme quadratique²².

Remarque 2 : On peut aussi écrire, en faisant intervenir l'inverse de la matrice capacité :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} {}^t(Q)(V) = \frac{1}{2} {}^t(Q)(C)^{-1}(Q)$$

5.d Symétrie de la matrice capacité.

La relation entre potentiels et charges, présentée à partir de la matrice inverse de la matrice capacité, montre que le potentiel V_i d'un conducteur est fonction, à géométrie donnée, de toutes les charges Q_j de tous les conducteurs, ce que nous noterons $V_i(\{Q_j\})$. Dans une évolution élémentaire où les potentiels varient de dV_i et les charges de dQ_i , on montre, en adaptant la démonstration précédente que l'énergie varie de :

$$d\mathcal{E} = \sum_i V_i(\{Q_j\}) dQ_i$$

Comme l'écriture $\mathcal{E} = \frac{1}{2} {}^t(Q)(C)^{-1}(Q)$ permet de considérer $\mathcal{E}$ comme une fonction des Q_i , on reconnaît dans l'écriture de $d\mathcal{E}$, celle d'une différentielle dont les coefficients s'identifient avec les dérivées partielles ; on peut donc affirmer que :

$$V_i(\{Q_j\}) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Q_i}$$

21. On est obligé de travailler avec une intensité I_i très petite pendant un temps τ long pour que l'énergie dissipée par effet Joule devienne négligeable puisqu'elle est en $I_i^2 \tau$; dans ces conditions, force électromotrice et différence de potentiel sont égales.

22. On vous renvoie à votre cours de mathématiques. L'écriture canonique suppose une matrice symétrique ; pas de panique, on montre tout de suite après que c'est le cas pour la matrice capacité.

Par ailleurs en développant $(V) = (C)^{-1}(Q)$, on tire :

$$V_i(\{Q_j\}) = \sum_j \tilde{C}_{ij} Q_j$$

d'où puisque les $\tilde{C}_{ij}$ sont des coefficients constants :

$$\tilde{C}_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial}{\partial Q_j} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Q_i} \right) = \frac{\partial^2 V_i}{\partial Q_j \partial Q_i}$$

Le théorème de SCHWARTZ²³ affirme que $\frac{\partial^2 V_i}{\partial Q_j \partial Q_i} = \frac{\partial^2 V_i}{\partial Q_i \partial Q_j}$, donc que $\tilde{C}_{ij} = \tilde{C}_{ji}$, c'est-à-dire que $(C)^{-1}$ est symétrique et donc (C) aussi.

Une utilisation possible de cette propriété est de remplacer le calcul, par exemple, de C_{12} qui semblerait complexe par le calcul de C_{21} s'il est plus simple. Honnêtement, c'est en magnétostatique que cette approche sera la plus féconde.

5.e Localisation de l'énergie.

On peut raisonnablement considérer que l'énergie est localisée là où sont les charges, donc à la surface des conducteurs ; mais on peut aussi procéder comme suit.

L'énergie est $\frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$. Partant de là si l'on affecte à chaque tube de champ l'énergie élémentaire notée $d_2 \mathcal{E}$ égale à

- $\frac{1}{2} V_1 d_2 q_1 + \frac{1}{2} V_2 d_2 q_2$ pour un tube de champ élémentaire qui part du conducteur 1 (par exemple) au potentiel V_1 et arrive au conducteur 2 (par exemple) au potentiel V_2 et y découpe respectivement des surfaces élémentaires $d_2 S_1$ portant la charge $d_2 q_1$ et $d_2 S_2$ portant la charge $d_2 q_2$,
- $\frac{1}{2} V_2 d_2 q_2$ pour un tube de champ élémentaire qui part du conducteur 2 (par exemple) au potentiel V_2 et arrive l'infini au potentiel nul,

il semble assez clair alors que, par sommation sur tous les tubes, on obtient $\frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$ qui est bien l'énergie totale. Comme chaque $d_2 \mathcal{E}$ s'exprime en fonction de grandeurs liées au tube de champ, il est pertinent de considérer que c'est l'énergie qu'il contient.

Tout ceci est explicité sur la figure 14 p. 39.

Pour l'un de ces tubes (par exemple de la première espèce), après avoir remarqué que le théorème des éléments correspondant permet la réécriture $d_2 \mathcal{E} = \frac{1}{2} (V_1 - V_2) d_2 q_1$, on peut effectuer un découpage en petits tronçons limité par des équipotentiels. A chaque tronçon (en rouge sur la figure) entre les équipotentiels $V + dV$ et V , dans cet ordre car le tube de champ est orienté dans le sens des potentiels décroissant, si on affecte l'énergie

23. Le physicien omet souvent de vérifier ses conditions de validité, à savoir que les dérivées secondes soient continues ; c'est chose aisée ici puisqu'elles sont constantes.

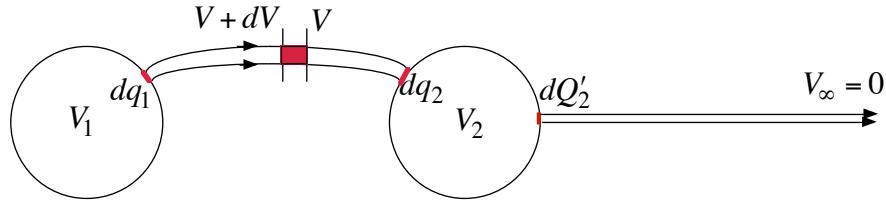


FIGURE 14 – Localisation de l'énergie.

$d_3\mathcal{E} = \frac{1}{2} dV d_2q_1$, la sommation sur tous les tronçons du même tube redonne $d_2\mathcal{E}$. Il est donc légitime d'affecter à chaque tronçon l'énergie élémentaire $d_3\mathcal{E}$.

Si l'on applique la théorème de GAUSS à la portion de tube entre le conducteur 1 et l'équipotentielle V et fermée d'une part par le morceau qu'il découpe de cette équipotentielle, d'aire d_2S , et d'autre part par une surface intégralement dans le conducteur 1 et de contour celui de d_2S_1 défini plus haut, alors en suivant un raisonnement plusieurs fois utilisé dans ce chapitre, on a :

$$d_2q_1 = \varepsilon_0 E d_2S$$

où E est le module (la norme) du champ qui règne sur l'équipotentielle V donc dans le tronçon réputé infiniment petit.

Par ailleurs, si $\vec{d\ell}$ est le petit déplacement vectoriel, de longueur $d\ell$ pour aller de l'équipotentielle à $V + dV$ à celle à V (attention à l'ordre inhabituel), on sait que $V - (V + dV) = \vec{\text{grad}} V \cdot \vec{d\ell} = -\vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -E d\ell$, donc

$$dV = E d\ell$$

En reportant ces deux derniers résultats dans l'expression de $d_3\mathcal{E}$ et en reconnaissant dans le produit $d_2S d\ell$ le volume $d_3\mathcal{V}$ du tronçon, on arrive à :

$$d_3\mathcal{E} = \frac{1}{2} dV d_2q_1 = \frac{1}{2} E d\ell \varepsilon_0 E d_2S = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\ell d_2S = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d_3\mathcal{V}$$

résultat qui fait apparaître une densité volumique d'énergie électrique (ou électrostatique), souvent notée u_E , de définition puis d'expression :

$$u_E = \frac{d_3\mathcal{E}}{d_3\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

qui lie une densité volumique d'énergie électrique autour d'un point au champ électrique qui y règne, ce qui, avouons-le n'est pas scandaleux.

Remarque 1 : Cette formule affecte une énergie nulle à l'intérieur des conducteurs où le champ est nul, ce qui renforce la pertinence de la présentation.

Remarque 2 : Il n'y a pas lieu de s'émouvoir que l'énergie puisse être localisée à la surface des conducteurs ou dans l'espace interconducteur. La notion d'énergie est toujours une abstraction surajoutée qui donne un autre point de vue à ce que l'on étudie et sa localisation donne un niveau d'abstraction encore plus haut avec un point de vue supplémentaire. On peut éclairer une même notion physique de deux façons distinctes ; elles ne s'opposent pas, elles s'enrichissent mutuellement, un peu comme deux thèses différentes sur un même auteur en littérature.

5.f Déterminant de la matrice capacité.

On déduit de ce qui précède que, quels que soient les valeurs des V_i , on a :

$$\frac{1}{2} {}^t(V)(C)(V) = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{V}} \epsilon_0 E^2 d_3\mathcal{V}$$

L'intégrale de la densité volumique qui est positive, au vu de son expression, est donc positive et ne s'annule que si le champ est partout nul, donc si le potentiel est uniforme et égal à celui de l'infini, nul donc quand tous les conducteurs sont au potentiel nul. En notant (0) le vecteur colonne dont tous les terme sont nuls, on a donc :

$$\forall (V) \neq (0) \quad {}^t(V)(C)(V) > 0$$

Les mathématiciens, qui sont éminemment serviables, nous affirment²⁴ que dans ce cas la matrice a un déterminant positif dans le cadre de l'étude des formes quadratiques.

Cela dit, l'exploitation de cette propriété en physique semble rarissime.

5.g Calcul des actions subies par un conducteur.

• Rappel : méthode des travaux virtuels.

Remarquons tout d'abord qu'un système de conducteurs à l'équilibre n'est pas spontanément stable, c'est-à-dire de géométrie fixe. Les conducteurs chargés avec une charge totale de même signe vont se repousser et de signe contraire, s'attirer. Il est donc sous-entendu (et c'est toujours le sous-entendu qui induit les mécompréhensions) que chaque conducteur est maintenu en place par un support isolant, censé ne pas perturber les interactions électriques, ce support exerçant une force opposée au bilan des forces électrostatiques.

24. Impossible de le démontrer brièvement dans le cas général. Dans le cas de deux conducteurs, en posant $x = \frac{V_1}{V_2}$, on a :

$${}^t(V)(C)(V) = C_{11} V_1^2 + 2 C_{12} V_1 V_2 + C_{22} V_2^2 = V_2^2 (C_{11} x^2 + 2 C_{12} x + C_{22})$$

Le contenu de la parenthèse est un binôme toujours positif donc sans racines, donc de discriminant négatif ; ce discriminant $\Delta = 4 C_{12}^2 - 4 C_{11} C_{22}$ est quatre fois l'opposé du déterminant de la matrice qui est donc positif.

Pour calculer la force électrostatique subie par le conducteur d'indice i , on a déjà mis ici en évidence une méthode possible, car on sait que chaque élément de surface de vecteur surface $\vec{dS}$ est soumis à une force $p_e \vec{dS}$, où la pression électrostatique p_e a pour expression $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$. Par intégration, on trouvera la force recherchée mais cette intégration est au mieux délicate sauf cas exceptionnels et le plus souvent impossible.

Nous allons utiliser une méthode énergétique basée sur la notion de *travail virtuel*, notion un peu désuète ce qui est un tort. Par la pensée, déboulonnons le conducteur i , et lui seul, de son support et remplaçons la force que celui-ci exerçait par une force produite par n'importe quoi, par exemple les muscles du physicien ou plutôt de son aide, plus musclé, traditionnellement appelé l'*opérateur*. Cette force diffère de l'opposé de la force électrostatique $\vec{F}_e$ subie par le conducteur i d'une quantité arbitrairement petite ; on notera $\vec{F}_{\text{op.}} = -\vec{F}_e + \vec{\varepsilon}$.

Le conducteur i se déplace ; attendons, toujours par la pensée, qu'il se soit déplacé d'une longueur vectorielle $\vec{d\ell}$ donnée, la force excédentaire $\vec{\varepsilon}$ étant choisie dans le bon sens. Le théorème de l'énergie cinétique nous apprend que :

$$dE_{\text{cin.}} = \delta W_{\text{int.}} + \delta W_{\text{ext.}}$$

La force excédentaire $\vec{\varepsilon}$ étant arbitrairement petite, la vitesse acquise par le conducteur i , le seul qui se déplace, est négligeable et son énergie cinétique en v^2 encore plus, donc $dE_{\text{cin.}} \approx 0$. Les forces intérieures sont les forces électriques qui dérivent d'une énergie potentielle qui n'est autre que l'énergie électrostatique $\mathcal{E}$ de l'ensemble des conducteurs, d'où, par définition d'une énergie potentielle $\delta W_{\text{int.}} = -d\mathcal{E}$. Enfin, le travail des forces extérieures se réduit sans doute (on y revient tout de suite) au travail de la force de l'opérateur, opposé, en négligeant $\vec{\varepsilon}$, au travail de la force subie par le conducteur, soit $\delta W_{\text{ext.}} = \vec{F}_{\text{op.}} \cdot \vec{d\ell} \approx -\vec{F}_e \cdot \vec{d\ell}$

Sous réserve que l'on n'ait pas oublié de travaux extérieur, on a donc, par passage à la limite $\vec{\varepsilon} \rightarrow \vec{0}$:

$$0 = -d\mathcal{E} - \vec{F}_e \cdot \vec{d\ell}$$

soit avec la propriété classique du gradient :

$$\vec{F}_e \cdot \vec{d\ell} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E} \cdot \vec{d\ell}$$

et puisque ce résultat est valable quel que soit le $\vec{d\ell}$ choisi :

$$\vec{F}_e = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}$$

formule qui généralise, dans un cas complexe, un résultat classique.

• Déplacement à charges constantes.

Quel travail extérieur a-t-on pu oublier ? Eh bien le travail de nature électrique que fournissent les générateurs maintenant fixes les potentiels d'un ou plusieurs conducteurs.

Par la pensée, débranchons-les ; les conducteurs sont isolés et donc leurs charges fixes. On notera donc pour mémoriser le résultat :

$$\vec{F}_e = - \overrightarrow{\text{grad}} \Big|_Q \mathcal{E}$$

étant entendu que la logique du contexte impose de calculer $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E} = \frac{1}{2} {}^t(Q)(C)^{-1}(Q)$.

Il importe aussi de comprendre que si ²⁵, au cours du déplacement les charges, Q_j de tous les conducteurs restent fixes, ce sont les coefficients de la matrices qui varient en fonction de la position du conducteur i , ce qui suppose du reste que ces coefficients soient connus comme fonction explicite de la position du conducteur i , ce qui n'est possible que dans des géométries particulièrement simples.

• Déplacement à potentiels constants.

Si les conducteurs ont tous un potentiel imposé (les situations mixtes sont ingérables), dans le déplacement virtuel, les générateurs fournissent un travail $\delta W_{\text{gén.}}$ et l'étude précédente conduit alors à

$$\vec{F}_e \cdot \vec{d\ell} = \delta W_{\text{gén.}} - d\mathcal{E}$$

La logique de la situation donne $\mathcal{E} = \frac{1}{2} {}^t(V)(C)(V) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{jk} V_j V_k$ d'où :

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j dC_{jk} V_j V_k$$

Un raisonnement plusieurs fois utilisé dans ce chapitre donne $\delta W_{\text{gén.}} = \sum_j V_j dQ_j$ où $Q_j = \sum_k C_{jk} V_k$, d'où $dQ_j = \sum_k dC_{jk} V_k$ et :

$$\delta W_{\text{gén.}} = \sum_i \sum_j dC_{jk} V_j V_k = 2 d\mathcal{E}$$

On a donc :

$$\vec{F}_e \cdot \vec{d\ell} = \delta W_{\text{gén.}} - d\mathcal{E} = 2 d\mathcal{E} - d\mathcal{E} = d\mathcal{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E} \cdot \vec{d\ell}$$

et l'on poursuit comme pour le déplacement à charges constantes pour aboutir au même type de formule au signe près :

$$\vec{F}_e = + \overrightarrow{\text{grad}} \Big|_V \mathcal{E}$$

Attention aux détestables (ce sont les mathématiciens qui parlent) habitudes des physiciens : les expressions de l'énergie en fonction des charges ou des potentiels, sont deux

25. Attention, c'est un « si concessif ».

fonctions différentes que l'on ne devrait pas appeler du même nom ; les physiciens plaident les circonstances atténuantes : les notations $\overrightarrow{\text{grad}}\big|_Q$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\big|_V$ précisent leur pensée de façon suffisante et il n'est donc pas paradoxal d'écrire :

$$+ \overrightarrow{\text{grad}}\big|_V \mathcal{E} = - \overrightarrow{\text{grad}}\big|_Q \mathcal{E}$$

• **Deux remarques pour finir.**

On montrera un peu plus loin quelques exemples d'application de ce formalisme qui permet la conception d'*électromètres*.

La méthode s'applique aussi au calcul des moments subis par un conducteur : si l'on imagine par la pensée une rotation d'un angle élémentaire $d\theta$ autour d'un axe Oz du seul conducteur i le travail électrique de l'action qu'il subit est non plus $\vec{F}_e \cdot d\vec{\ell}$ mais $\mathcal{M}_z(O) d\theta$. En reprenant pas à pas l'un ou l'autre des raisonnements précédents, on arrive aisément à :

$$\mathcal{M}_z(O) = - \left. \frac{d\mathcal{E}}{d\theta} \right|_Q \quad \text{ou} \quad + \left. \frac{d\mathcal{E}}{d\theta} \right|_V$$

6 Condensateurs et électromètres.

6.a Capacité d'un condensateur.

Un condensateur est constitué de deux conducteurs, l'un creux et le second à l'intérieur. On profite ainsi du fait que ce qui se passe à l'intérieur est indépendant de ce qui se passe à l'extérieur (cf paragraphe 4.b p. 20). À l'extérieur peuvent exister d'autres conducteurs dont on donne soit la charge soit le potentiel.

Supposons qu'il y ait une différence de potentiel U entre le conducteur intérieur au potentiel V_1 et le conducteur creux au potentiel V_2 (donc $U = V_1 - V_2$), que ce potentiel soit imposé par un générateur (comme sur la figure 15 p. 44) ou qu'il résulte de ce que le conducteur intérieur est chargé. Appelons Q_1 la charge du conducteur intérieur. Les propriétés du conducteur creux (influence totale, cf supra) font que la surface interne du conducteur creux porte la charge $-Q_1$ et nous appellerons q_e la charge portée par sa surface externe.

Si l'on réunit par un fil métallique le conducteur intérieur et le conducteur creux (après avoir débranché l'éventuel générateur qui fournit U), les deux ne forment plus qu'un seul conducteur creux et lorsque l'équilibre est rétabli, on sait qu'alors le conducteur intérieur et la surface interne du creux portent une charge nulle ; la charge Q_1 a donc traversé le fil, on l'appelle charge du condensateur et on la note traditionnellement Q tout court.

La conservation de la charge totale des deux conducteurs qui forment le condensateur indique que la surface externe du conducteur creux a toujours la même charge q_e ; dans

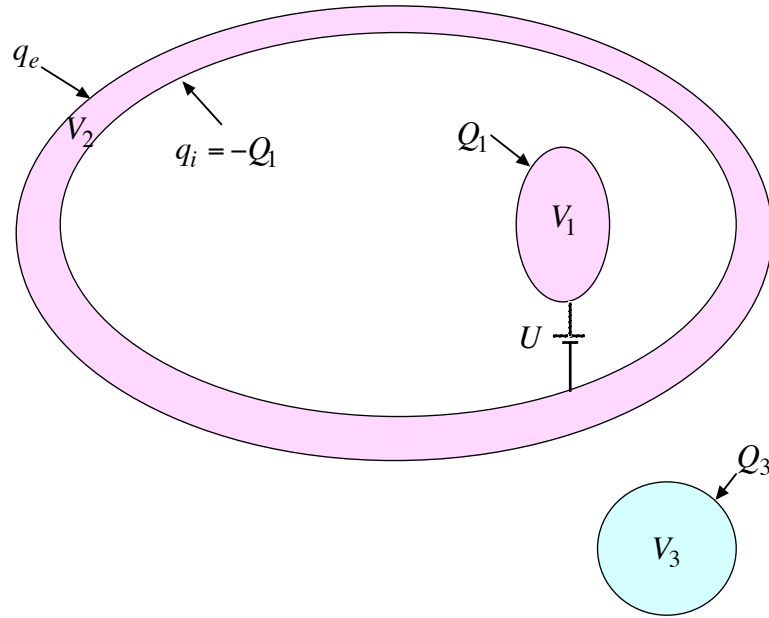


FIGURE 15 – Principe d'un condensateur.

l'espace interconducteur externe, les conditions aux limites n'ont donc pas changé et la fonction potentiel non plus. Par continuité, le conducteur creux a donc toujours le même potentiel V_2 et donc le conducteur intérieur aussi puisqu'il ne fait plus qu'un avec le creux.

La matrice capacité permet d'affirmer que dans la première situation, la charge du conducteur intérieur vérifie :

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$$

sans terme en V_3 etc., car on connaît la protection assurée par le creux (qui entraîne donc $C_{13} = 0$, etc.).

Dans la seconde situation, on a de même :

$$0 = C_{11} V_2 + C_{12} V_2$$

où si l'on avait maladroitement ajouté plus haut des termes en $C_{13} V_3$, on aurait ici mis exactement les mêmes, car à l'extérieur, les potentiels sont inchangés, on vient de le voir.

Par différence, on a donc

$$Q_1 = C_{11} (V_1 - V_2) = C_{11} U$$

La charge du condensateur, définie comme plus haut, est donc proportionnelle à sa différence de potentiel ; le coefficient de proportionnalité est appelé *capacité du condensateur*. C'est le C_{11} du conducteur interne, on la réécrit en pratique C tout court.

Remarque 1 : On a vu que la résolution explicite d'un problème de conducteur est chose rare ; il faut donc considérer que la capacité d'un condensateur est pratiquement toujours une donnée expérimentale. La théorie qui vient d'être exposée n'est là que pour justifier la proportionnalité entre charge et différence de potentiel.

Remarque 2 : Le groupement de condensateurs en série ou en parallèle sera plutôt étudiée dans une approche électrocinétique.

6.b Considérations énergétiques.

Reprenons les deux situations du paragraphe précédent. Dans la première (*condensateur chargé*), l'énergie est, comme tenu des conducteurs extérieurs (d'indice 3 et plus) :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} (q_e - Q_1) V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 + \dots$$

Dans la seconde (*condensateur déchargé*), l'énergie, qui sert alors de référence, est :

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot V_2 + \frac{1}{2} (q_e - 0) V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 + \dots = \frac{1}{2} q_e V_2 + \frac{1}{2} Q_3 V_3 + \dots$$

La différence sera, par définition, l'énergie du condensateur chargé, soit, avec (cf supra) les notations standards $U = V_1 - V_2$, $Q = Q_1$ et $C = C_{11}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} Q_1 (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} Q U$$

où, en reportant d'une façon ou d'une autre $Q = C U$, trois expressions équivalentes :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

6.c Condensateurs usuels.

• Condensateurs sphériques et assimilés.

Commençons par le cas d'école suivant : le conducteur creux a une surface interne sphérique de centre O et de rayon R_2 et le conducteur intérieur est une sphère de même centre O et de rayon R_1 . Si Q est la charge du condensateur donc celle du conducteur intérieur, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que dans l'espace interconducteur le champ est $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ et le potentiel $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, d'où pour la différence de potentiel :

$$U = V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}$$

La capacité est donc $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}$

Remarque 1 : Pour obtenir une capacité élevée il faut choisir $e = (R_2 - R_1)$, appelée *épaisseur du condensateur*, très petite ; alors $R_2 \approx R_1$ et l'on notera R la valeur approximativement commune. L'expression de la capacité devient alors $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ où $S = 4\pi R^2$ est la surface à peu près égale des deux conducteurs en vis-à-vis.

Remarque 2 : Si $e \ll R$, l'expérience montre que la capacité ne change que de façon infime s'il manque un bout du conducteur creux ou si le condensateur est cabossé ou déformé, fût-ce en cylindre avec un fond, bref que la formule $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ est valable si l'épaisseur est constante et partout (ou presque) négligeable devant les rayons de courbures de la surface.

Remarque 3 : Un condensateur tel qu'on l'a décrit jusqu'ici a un défaut de taille : le conducteur intérieur tombe au fond du conducteur creux sous l'effet de la gravité, ce qui court-circuite le condensateur ; c'est particulièrement stupide, avouons-le. Dans la pratique, le vide interconducteur est remplacé par un isolant. On rappelle que l'on remplace alors ϵ_0 par un ϵ lié à la nature de l'isolant et on choisit celui-ci si possible tel que $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ soit le plus grand possible, ce qui augmente d'autant la capacité.

Remarque 4 : Une manière originale mais désormais classique de réaliser une épaisseur e négligeable donc une grande capacité est le *condensateur électrochimique* : Il est constitué d'un petit récipient (de l'ordre du centimètre cube) en métal, le plus fréquemment de l'aluminium, rempli d'un électrolyte gélifié (sinon ça coule partout !) et fermé par un couvercle isolant dont le rôle est négligeable. A la construction, il n'y a pas d'isolant et le tout est conducteur. Si on le branche sous une différence de potentiel dans le bon sens²⁶, il y a électrolyse dans le sens où le métal s'oxyde ; il se recouvre d'une couche d'oxyde qui devient isolante dès qu'elle a atteint une épaisseur infime. On obtient ainsi une capacité énorme²⁷ sous un volume minime. Toutefois, il y a un inconvénient majeur : on ne peut pas brancher ce condensateur sous une tension de signe opposé à celle qui l'a créé : l'oxyde se réduit et le condensateur devient brusquement conducteur, s'échauffe par effet JOULE, explose et envoie l'électrolyte partout dans le reste du montage ; c'est apocalyptique et proprement répugnant²⁸.

• Condensateurs plans et assimilés.

Soient deux plans conducteurs infinis et parallèles ; dans l'espace qui les sépare, toute ligne partant de l'un ne peut qu'arriver à l'autre ; ils sont donc en influence totale et, à ce titre, se conduisent en condensateur, bien qu'il ne s'agisse pas d'un conducteur creux en contenant un autre. La symétrie de révolution par rapport à tout axe orthogonal aux plans fait que les lignes de champ leur sont elles aussi orthogonales. L'invariance par translation

26. On vous laisse sournoisement deviner lequel !

27. Au vu de l'application numérique effectuée un peu plus haut, énorme c'est un microfarad.

28. Est-ce un oxymore ?

entraîne que les plans sont uniformément chargés. Le théorème des éléments correspondant indique que les densités volumiques sont opposées ; notons les $\pm\sigma$, comme sur la figure 16 p.47 (les plans n'y sont pas infinis, on y revient juste après). L'application du théorème de GAUSS à un tube de champ fermé par une surface parallèle aux plans et par une surface arbitraire contenue dans un conducteur (voir figure) donne un champ uniforme de norme $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ et enfin la circulation de ce champ sur une ligne de champ d'un conducteur à l'autre, égale à la différence de potentiel (cf chapitre précédent), conduit à $U = E e = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$ où e est la distance entre les plans.

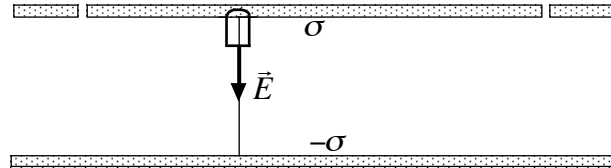


FIGURE 16 – Condensateur plan et anneau de garde.

Ce résultat reste valable si l'on travaille non avec des plans infinis, mais des portions de plan, par exemple des disques de rayon R , pourvu que R soit grand devant e (condition que ne respecte pas la figure pour la lisibilité). Les sources d'erreur sont localisées au bord des disques (on parle d'*effet de bords*), sur une largeur de quelques fois (peu de fois) l'épaisseur. Lorsque l'on veut une extrême précision, on entoure l'un des disques d'un anneau entre un rayon un peu supérieur à R et un rayon de l'ordre de $R + 5e$ et l'on porte le rayon du second à $R + 5e$, ce qui fabrique deux condensateurs que l'on charge et décharge en parallèle ; l'anneau concentre les erreurs et le disque se comporte de façon parfaite. C'est la technique de l'*anneau de garde* (cf figure).

Si $Q = \sigma S$ est la charge du disque de surface S , on a en bonne approximation ou rigoureusement selon qu'il y a ou non un anneau de garde et après quelques calculs élémentaires :

$$Q = \frac{\varepsilon_0 S}{e} U$$

d'où une capacité $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ (cf supra).

Remarque : Une façon classique de fabriquer un condensateur d'assez grande capacité sous un faible volume consiste à superposer quatre longues bandes de longueur de l'ordre du mètre et de largeur de l'ordre du centimètre (pour avoir un S important), de faible épaisseur de l'ordre du dixième de millimètre (pour avoir un e minuscule), alternativement conductrices et isolantes puis d'enrouler le tout comme le suggère la figure 17 p. 48 (que le lecteur me pardonne d'avoir dessiné des enroulements au carré plutôt que ronds, c'était plus aisé et plus rapide à faire). Outre le gain de place, on remarquera que chacun des conducteurs (rouge et bleu) est en vis-à-vis de l'autre (isolant vert intercalé) sur ses deux faces, ce qui fait que la surface S doit être comptée deux fois ; l'enroulement double la capacité.

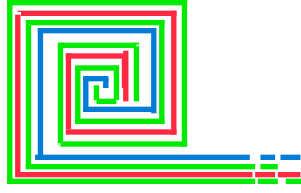


FIGURE 17 – Condensateur enroulé.

6.d Electromètres.

Il s'agit d'instruments conçus pour mesurer une différence de potentiel statique, c'est-à-dire non liée à la circulation d'un courant électrique. Il s'agit dans la pratique d'un condensateur étudié pour que l'on puisse mesurer la force subie par l'une des *armatures* (autre nom des conducteurs du condensateur).

• Electromètre à plateaux.

C'est un condensateur plan comme celui de la figure 16 p.47. En prenant un axe des Oz orthogonal aux conducteurs et orienté vers le haut de la figure, l'armature du haut, de cote z à partir de celui du bas, est soumise à une force que l'on peut calculer ici de trois façons (on remplace partout e par z) :

- par la pression électrostatique liée à sa charge (placée en dessous d'où une force vers le bas) :

$$F = -p_e S = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} S = -\frac{C^2 U^2}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{\left(\frac{\varepsilon_0 S}{z}\right)^2 U^2}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2z^2}$$

- par la formule $\vec{F}_e = + \overrightarrow{\text{grad}}\Big|_V \mathcal{E}$, soit ici

$$F = \frac{d\mathcal{E}}{dz}\Big|_U = \frac{d\left(\frac{C U^2}{2}\right)}{dz}\Big|_V = \frac{d\left(\frac{\varepsilon_0 S}{z}\right)}{dz}\Big|_V \frac{U^2}{2} = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2z^2}$$

- par la formule $\vec{F}_e = - \overrightarrow{\text{grad}}\Big|_Q \mathcal{E}$, soit ici

$$F = -\frac{d\mathcal{E}}{dz}\Big|_Q = -\frac{d\left(\frac{Q^2}{2C}\right)}{dz}\Big|_V = -\frac{d\left(\frac{z}{\varepsilon_0 S}\right)}{dz}\Big|_V \frac{Q^2}{2} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

soit en y reportant $Q = C U = \frac{\varepsilon_0 S U}{z}$, $F = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2z^2}$

Reste à concevoir la méthode de mesure de la force. L'idée de suspendre l'armature du haut à un ressort dont on mesurerait l'allongement est mauvaise car on montre qu'il y a deux positions d'équilibre donc une instable, c'est difficile à gérer expérimentalement. Il y a d'autres solutions mais encombrantes. Cet électromètre sert surtout de premier exemple théorique et est en pratique inutilisé.

• **Electromètre à quadrants.**

C'est un condensateur plan dont les armatures sont deux quarts opposés de disque et dont l'une peut tourner d'un angle θ par rapport à l'autre autour d'un axe passant par l'axe. La figure 18 p. 49, vue selon l'axe orthogonal aux plans (dessinés l'un en bleu, l'autre en rouge en dessous du premier) montre que S passe de $\frac{1}{2} \pi R^2$ à 0 pour θ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$; la variation est manifestement linéaire, d'où :

$$S = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} = \frac{\varepsilon_0 R^2}{e} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\varepsilon_0 R^2 U^2}{2e} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\mathcal{M}_z(O) = \left. \frac{d\mathcal{E}}{d\theta} \right|_U = -\frac{\varepsilon_0 R^2 U^2}{2e}$$

Ce moment dynamique, indépendant de θ , est aisé à équilibrer, donc à mesurer, avec un ressort spiral.

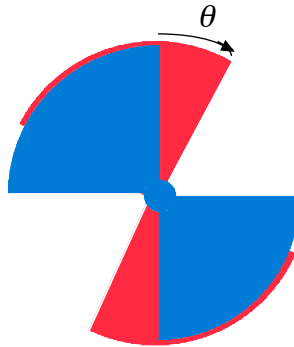


FIGURE 18 – Electromètre à quadrants.

Remarque : la dérivation de l'énergie à charges constantes conduit au même résultat par des voies moins directes. Par contre, le calcul par la pression électrostatique soulève un paradoxe : les forces de pression électrostatique sont orthogonales à la surface donc parallèles à l'axe de rotation et donc leur moment par rapport à celui-ci est nul. C'est

oublier que les conducteurs sont des portions de plan minces mais d'épaisseur non nulle ; ils ont donc des arêtes dont les vecteurs surface ont une autre direction et c'est à ce niveau-là et uniquement là que se trouvent les forces qui contribuent au moment non nul. Curieusement, ces arêtes n'interviennent pas dans le calcul de l'énergie ; mais ce n'est qu'apparent : elles interviennent sous forme de termes négligés, les effets de bords, correspondant aux lignes de champ non orthogonales aux plans conducteurs qui vont des arêtes de l'un des conducteurs vers l'autre (au plus près, donc là où il est plan) ; comme leur géométrie ne change pas ou peu avec θ (sauf peut-être pour θ proche de 0 ou de $\pi/2$, ce que l'on évitera par quelque astuce de construction), le terme correctif est constant et disparaît dans les dérivations.

• **Inconvénient et amélioration.**

La force ou le moment à mesurer sont proportionnels au carré de la différence de potentiel (ou tension) ce qui empêche de mesurer les tensions trop élevées qui seraient destructrices et les tensions trop faibles qui rendraient la réponse de l'appareil indécidable ; par ailleurs, on perd l'information sur le signe.

Une méthode classique d'amélioration consiste à coupler deux effets en sens contraire. Par exemple dans l'électromètre à quadrants, on solidarise à l'un des conducteurs (le bleu par exemple) un autre qui reconstitue avec lui le disque entier (on l'imagine en bleu clair) avec une isolation au niveau des contacts. On porte ces deux portions de disque l'une à V_1 connu et l'autre à V_2 connu et l'autre conducteur à V inconnu. Il est aisé de se convaincre que le moment total est :

$$\mathcal{M}_z(O) = \frac{\varepsilon_0 R^2}{2e} [(V - V_2)^2 - (V - V_1)^2] = \frac{\varepsilon_0 R^2}{2e} (V_1 - V_2) (2V - V_2 - V_1)$$

qui donne une réponse linéaire (ou plutôt affine). Le fin du fin est d'imposer quelque chose comme $V_1 = -V_2 = \frac{U_0}{2}$ et alors la relation devient plus simple :

$$\mathcal{M}_z(O) = \frac{\varepsilon_0 R^2}{e} U_0 V$$

Il suffit pour cela d'un générateur étalon de force électromotrice U_0 , un montage potentiométrique et de commencer toute mesure par un réglage de zéro.