Chapitre C-III

Magnétostatique.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Ce chapitre est axé sur l'aspect historique et sur le calcul des champs magnétiques. En conséquence, le lien entre les différentes propriétés du champ magnétique (symétrie, formule de Biot et Savart, flux conservatif, théorème d'Ampère) ne sera pas abordé ici mais dans le chapitre sur les équations de Maxwell.

Après un inventaire des diverses formulations possibles d'un élément de courant et une réflexion sur le bon usage du théorème d'Ampère, on rappelle le calcul du champ magnétique dans les cas classiques (fil rectiligne infini, spire, solénoïde, etc.)

On s'intéresse enfin à la force de Laplace qu'exerce un champ magnétique sur un courant, on en présente deux applications, la définition de l'ampère et la balance de Cotton. On liera le travail élémentaire de cette force au flux magnétique coupé et, dans le cas d'un champ stationnaire, à la variation du flux à travers le circuit.

Table des matières

C-III Magnétostatique. **1**

1 La genèse des idées. 5

2 Eléments de courants. 7

2.a Le point de vue adopté. 7

2.b Distribution volumique. 7

2.c Intensité d'un courant. 8

2.d Distribution linéïque. 9

2.e Distribution surfacique. 9

2.f Récapitulatif. 10

3 Champ magnétique créé par les courants. 10

3.a Interaction magnétique. 10

3.b Considérations de symétrie. 12

3.c Formule de Biot et Savart. 12

3.d Topologie des lignes de champs magnétiques. 14

3.e Flux conservatif. 14

3.f Théorème d'Ampère. 15

3.g Usage raisonné du théorème d'Ampère. 16

3.h Les grands classiques. 17

3.i Validité en courant variable. 24

3.j Rappel épistémologique 25

4 Force exercée par un champ magnétique sur un élément de courant. . . 25

4.a De la force de Laplace à la force de Lorentz. 25

4.b Définition de l'ampère. 26
4.c Balance de Cotton. 27
4.d Travail élémentaire des forces de Laplace. Le flux coupé. 28
4.e Du flux coupé à la variation de flux. Théorème de Maxwell. 29
4.f Développements à venir. 30

1 La genèse des idées.

L'antiquité gréco-latine connaissait les propriétés de la « pierre de Magnésie [1] » dont on fabriquait les premiers aimants. L'antiquité chinoise aussi, sans doute de façon indépendante.

Dès le IIIe siècle, en Asie, on connaissait la boussole, d'abord instrument de divination, puis de navigation. Lors de l'expansion de l'Islam, le monde arabe en apprend l'existence, puis l'Occident à l'occasion des croisades.

En 1492, Christophe Colomb note l'existence de la déclinaison magnétique, angle dépendant de la position entre la direction du nord (étoile polaire) et celle indiquée par la boussole. En 1600, William Gilbert, médecin d'Elisabeth I puis de Jacques I en déduit que la Terre se comporte comme un aimant qui attire la boussole.

L'approche réellement scientifique débute au milieu du XVIIIe siècle et les progrès en magnétostatique sont intiment liés à ceux en électrocinétique.

En 1746, Louis Le Monnier, observant qu'une bouteille de Leyde, ancêtre du condensateur, se décharge lorsque l'on réunit ses armatures par un fil conducteur, interprète ce fait comme le passage temporaire d'un « courant électrique » dans ce fil, c'est à dire un transport de charges électriques.

En 1785, parallèlement à sa loi d'interaction entre charges électriques, Coulomb établit une théorie, formellement identique, des masses magnétiques de deux types (« nord » et « sud ») et du champ magnétique, théorie qui s'est avéré fausse [2] mais qui a paradoxalement considérablement aidé à la mise en place des idées. Du reste, longtemps après son abandon, parce qu'elle permettait des raisonnements analogiques et parce qu'elle donnait pour les aimants le même résultat que la bonne théorie, elle était encore enseignée au lycée à la fin des années 60 (je veux bien dire 1960).

En 1791, Galvani veut tester l'effet de l'électricité sur les animaux, des grenouilles en l'occurrence. Mais par hasard, il obtient le même résultat (contactions musculaires) sans générateur électrostatique (bouteille de Leyde chargée) en mettant en contact, lors de l'installation de l'expérience, la pauvre bête avec deux métaux différents, un crochet de suspension en fer et un fil conducteur en cuivre prévu pour le branchement au générateur. Les grandes découvertes sont souvent le fruit du hasard, mais là, Galvani se trompe et croit avoir découvert que la vie est génératrice d'électricité, l'« électricité animale ».

Volta réfute cette explication et comprend que c'est la chaîne formée de deux métaux séparés par une solution conductrice qui fait office de générateur et a l'idée [3] de la mise en série des générateurs. Il invente ainsi, en 1800, la « pile électrique », empilement de rondelles de zinc et de cuivre, séparées dans cet ordre [4] par une rondelle de carton humide.

1. cité grecque sur l'actuelle rive turque de la mer Egée.
2. un bel oxymore
3. Avait-on déjà pensé à mettre en série des bouteilles de Leyde ? C'est possible, mais dans les musées que j'ai visités, je n'ai rencontré que des groupements de bouteilles en parallèle.
4. Je veux dire qu'il empilait ainsi : zinc, carton, cuivre, zinc, carton, cuivre, etc.

Il arrive ainsi à de fortes tensions, comparables à celles des bouteilles de Leyde, sauf que, ainsi décrit-il les choses, quand on décharge la pile puis que l'on enlève le court-circuit, la pile, vue comme condensateur, se recharge toute seule et instantanément. C'est une vraie révolution ! Désormais, on dispose de sources permanentes d'électricité et l'on peut expérimenter avec beaucoup plus de souplesse. On s'intéresse enfin à l'électrocinétique et côté chimie à l'électrolyse [5].

En 1819, un peu par hasard [6], Oersted [7] découvre qu'une boussole placée près d'un fil parcouru par un courant électrique dévie et montre ainsi pour la première fois qu'un courant électrique est source de champ magnétique. En 1821, Ampère en déduit qu'existent des courants microscopiques à l'intérieur d'un aimant, sans pouvoir en expliquer la nature. On pourra désormais abandonner la théorie des masses magnétiques mais ça ne se fait pas du jour au lendemain ; l'abandon d'un modèle qui marche assez bien est toujours un moment douloureux.

Ensuite, les choses s'accélèrent et s'enchevêtrent.

En 1820, Biot et Savart étudient le champ magnétique créé par un fil électrique rectiligne très long, montrent sa structure orthoradiale avec une décroissance en $\frac{1}{r}$ et Laplace en déduit la formule qui porte leurs noms.

A la même époque, Ampère observe que deux fils électriques rectilignes parallèles exercent une action l'un sur l'autre et Laplace en déduit l'action d'un champ magnétique sur un courant.

Les découvertes qui suivent apportent peu à la magnétostatique (effet thermoélectriques par Seebeck, loi d'Ohm, etc.) si ce n'est les lois de l'induction par Faraday en 1831 qui mettent en place la notion de flux magnétique.

Vers 1870, Crookes réalise des décharges électriques dans un gaz raréfié soumis à un champ électrique intense ; le dispositif est bien sûr un tube de Crookes et met en évidence l'existence de *rayons cathodiques* que l'on visualise parce qu'ils excitent la fluorescence [8] d'un dépôt sur la paroi du tube. Ils sont vite assimilés à un faisceau d'électrons dont on valide ainsi l'hypothèse, ce qui place définitivement la magnétostatique dans le contexte d'une interaction de charges en mouvement. La déviation de rayons cathodiques par un champ magnétique (J. Perrin et J. J. Thomson) permet de calculer le rapport (charge sur masse) $\frac{e}{m_e}$ de l'électron. En 1909, l'expérience de Millikan permet le calcul de e, charge de l'électron.

5. avec la découverte rapide (sept ans plus tard) du sodium et du potassium métalliques par électrolyse de la soude et de la potasse fondues, c'est-à-dire liquéfiées.

6. Faut-il en déduire qu'il travaillait dans le désordre ?

7. Ørsted en fait.

8. cf les télévisions d'avant les écrans plats ; l'émission des électrons se faisant toutefois par un autre mécanisme.

2 Eléments de courants.

2.a Le point de vue adopté.

Une fois que l'on a compris que le magnétisme est l'interaction de charges électriques en mouvement et non d'hypothétiques masses magnétiques, il est tentant de chercher directement la force qui s'exerce entre deux charges électriques ponctuelles en mouvement, puis classiquement [9] présenter le résultat comme le produit d'un premier facteur caractéristique de l'une des charges et d'un second faisant intervenir les caractéristiques de l'autre charge et la position relative de la première, ce second facteur étant appelé *champ magnétique* créé par la seconde charge au point où se trouve la première.

Une telle formule s'avère extrêmement délicate à obtenir et ne peut l'être de façon satisfaisante que dans un cadre relativiste.

Heureusement, c'est par le champ créé par un courant filiforme (c'est à dire un courant dans un fil de diamètre négligeable par rapport à sa longueur) que l'histoire a commencé. Et la première formule proposée, celle de Biot et Savart, donne le champ créé par un portion élémentaire d'un tel fil parcouru par une intensité constante. Certes il est somme des champs créés par les charges contenues dans cet élément, mais celui-ci est vu comme volume de contrôle avec des charges entrant à un bout et d'autres par l'autre bout. Ce changement de point de vue [10] donne expérimentalement accès à une formule exploitable et ultérieurement l'électromagnétisme sera axiomatisé par Maxwell dans cette optique (voir chapitre C-VIII).

On va donc donner, pour une distribution de charges q_i animées de vitesses $\overrightarrow{v}_i$, une reformulation de la somme des $q_i\,\overrightarrow{v}_i$ dans un élément spatial donné, appelé *élément de courant*, dans des contextes volumique, surfacique et linéïque.

2.b Distribution volumique.

Ce type de distribution se trouve par exemple dans une solution ionique ou dans un gaz raréfié partiellement ionisé.

Si les charges sont distribuées en volume, on découpe l'espace en volumes élémentaires de volume dV (par abus de langage, dV désignera aussi bien l'élément de volume, partie de l'espace, et son volume élémentaire, en micromètres cubes par exemple) suffisamment petit à notre échelle pour être homogène et suffisamment grand à l'échelle atomique pour gommer les fluctuations statistiques. On définit une vitesse moyenne $\overrightarrow{v}$, dépendant de la position du volume élémentaire, par :

$$\sum_{i\in \mathrm{d}V} q_i\,\overrightarrow{v}_i = \left(\sum_{i\in \mathrm{d}V} q_i\right)\overrightarrow{v}$$

9. Même démarche que pour $\overrightarrow{F} = \frac{q\,q'}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\overrightarrow{u} = q'\,\frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\overrightarrow{u} = q'\,\overrightarrow{E}$
10. Voir les points de vue lagrangien et eulérien en mécanique des fluides (chapitre B-XIII).

puis une densité volumique de charges ρ (voir électrostatique) par

$$\sum_{i \in \mathrm{d}V} q_i = \rho \, \mathrm{d}V$$

On appelle enfin *densité de courant* la grandeur $\overrightarrow{j} = \rho \, \overrightarrow{v}$

Il en résulte que l'élément de courant est dans ce contexte $\overrightarrow{j} \, \mathrm{d}V$; ce n'est pas une propriété physique mais une conséquence des définitions.

Remarque : attention s'il y a plusieurs types de charges (ions positifs et ions négatifs par exemple) cette présentation globale pose problème (cf ci-dessous). On repérera les différentes espèces chargées par la valeur d'un indice α et l'on définira une vitesse moyenne $\overrightarrow{v}_\alpha$ et une densité volumique de charges ρ_α par espèce. On définira alors la densité de courant par $\overrightarrow{j} = \sum_\alpha \rho_\alpha \, \overrightarrow{v}_\alpha$, ce qui permet de gérer correctement les situations très fréquentes (qui posent le problème évoqué ci-dessus) où $\overrightarrow{j}$ est non nul bien que $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha$ soit nul. On se convaincra aisément que dans ce cas l'élément de courant sera toujours $\overrightarrow{j} \, \mathrm{d}V$.

2.c Intensité d'un courant.

On se place, pour alléger l'exposé, dans le cas où il n'y a qu'un seul type de charges mobiles.

Supposons une petite région de l'espace où les charges ont une densité volumique ρ et une vitesse moyenne $\overrightarrow{v}$ de module v. Soit une petite surface élémentaire orientée $\mathrm{d}S$ de vecteur surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ (rappelons qu'il est orthogonal à la surface, orienté dans le sens choisi et de module égal à l'aire de la surface). Cherchons à calculer la charge δq qui traverse $\mathrm{d}S$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. Pour cela localisons les charges concernées à l'instant initial t. Leurs trajectoires doit traverser $\mathrm{d}S$, elles doivent être en amont de la surface à une distance inférieure à $v \, \mathrm{d}t$. Elles sont donc (cf figure 1 p. 8) contenues dans un cylindre oblique de base $\mathrm{d}S$ et de hauteur $v \, \mathrm{d}t \, \cos\theta$. On a donc :

$$\delta q = \rho \, \mathrm{d}S \, v \, \mathrm{d}t \, \cos\theta = \rho \, \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \, \mathrm{d}t = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \, \mathrm{d}t$$

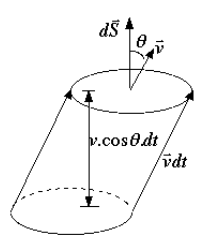

FIGURE 1 – Intensité d'un courant.

L'intensité est le débit de charges soit $I = \frac{\delta q}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

2.d Distribution linéïque.

Ce type de distribution se trouve dans des fils électriques idéalisés en négligeant leur diamètre.

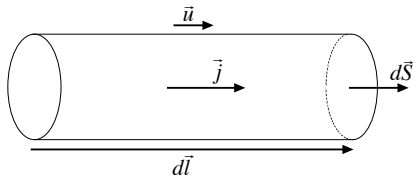

FIGURE 2 – Element de courant filiforme.

Un élément de courant filiforme (figure 2 p. 9) de longueur vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ a en fait une section $\mathrm{d}S$ très faible mais non nulle ; il est donc limité par un vecteur surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ parallèle à $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$. De plus il canalise le courant, donc $\overrightarrow{j}$ est parallèle à $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$, notons donc $\overrightarrow{u}$ leur vecteur unitaire. On notera $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{u}$ et ainsi de suite. L'intensité est dès lors $I = j\,\mathrm{d}S$ et le volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}l\,\mathrm{d}S$.

On peut dès lors écrire :

$$\overrightarrow{j}\,\mathrm{d}V = (j\,\overrightarrow{u})\,(\mathrm{d}l\,\mathrm{d}S) = j\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{u} = (j\,\mathrm{d}S)\,(\mathrm{d}l\,\overrightarrow{u}) = I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

L'élément de courant peut donc se noter ici $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$

2.e Distribution surfacique.

Ce type de distribution se trouve par exemple en surface des métaux dans certaines conditions.

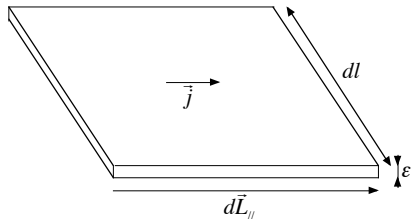

FIGURE 3 – Element de courant surfacique.

Un élément de courant surfacique (figure 3 p. 9), de longueur vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{d}L}$ dans le sens du courant et une largeur $\mathrm{d}l$ en norme dans l'autre, a en fait une épaisseur ε très faible mais non nulle ; le courant traverse donc une surface $\mathrm{d}l\,\varepsilon$. La densité de courant et la longueur sont parallèles, on note $\overrightarrow{u}$ leur vecteur unitaire puis $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}L} = \mathrm{d}L\,\overrightarrow{u}$.

L'intensité est dès lors $I = j\,\mathrm{d}l\,\varepsilon$, la surface de l'élément, épaisseur négligée, a pour valeur $\mathrm{d}S = \mathrm{d}l\,\mathrm{d}L$ et son volume, épaisseur non négligée, est $\mathrm{d}V = \mathrm{d}l\,\mathrm{d}L\,\varepsilon$.

Cela dit, l'épaisseur est réputée si faible qu'elle n'est pas perceptible et l'on préfère introduire une *densité de courant surfacique*, notée $\overrightarrow{j_S}$, dont la norme est le rapport de l'intensité I à la largeur traversée $\mathrm{d}l$ et la direction et le sens ceux de $\overrightarrow{j}$, soit $\overrightarrow{j_S} = \frac{I}{\mathrm{d}l}\overrightarrow{u} = j\,\varepsilon\overrightarrow{u} = \varepsilon\overrightarrow{j}$.

On peut dès lors écrire :

$$\overrightarrow{j}\,\mathrm{d}V = \overrightarrow{j}\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}L\,\varepsilon = \varepsilon\,\overrightarrow{j}\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}L = \overrightarrow{j_S}\,\mathrm{d}S$$

L'élément de courant peut donc se noter ici $\overrightarrow{j_S}\,\mathrm{d}S$, ce qui est piégeant car, habituellement, $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est vectoriel et normal à la surface ; ici $\mathrm{d}S$ est scalaire et l'élément de courant tangentiel, dans le sens du courant. Mais la confusion ne peut être due qu'à une grande distraction car un élément de courant est forcément dans le sens du courant.

2.f Récapitulatif.

Retenons les différentes formulations équivalentes d'un élément de courant, adaptées aux différents types de répartitions de charges, en retenant bien qu'il s'agit toujours de la même grandeur physique.

$$\sum_{i\in\mathrm{d}V} q_i\,\overrightarrow{v}_i \equiv \overrightarrow{j}\,\mathrm{d}V \equiv I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} \equiv \overrightarrow{j_S}\,\mathrm{d}S$$

3 Champ magnétique créé par les courants.

On privilégie dans ce chapitre l'approche historique ; l'approche axiomatique est reportée dans le chapitre C-VIII concernant les équations de Maxwell.

C'est dans ce chapitre-là que seront exposés les liens entre les différentes lois qui seront exposées ici comme des lois expérimentales indépendantes ; même si, historiquement, elles aient été, au moins partiellement, reliées entre elles, ce dont nous ne rendrons pas compte ici car cela reposait sur des outils qui ne sont pas avérés pertinents ultérieurement, comme, par exemple, un potentiel scalaire magnétique.

Le potentiel-vecteur est juste mentionné : il ne sert jamais à calculer les champs en régime permanent ou lentement variable et n'est réellement utile que dans les lois de l'induction ou le rayonnement des antennes.

3.a Interaction magnétique.

En 1819, Oersted découvre qu'une boussole placée près d'un fil parcouru par un courant électrique dévie. A cette époque, on croyait encore à l'existence de masses magnétiques

et la boussole était considérée comme un dipôle magnétique dont le moment dipolaire $\overrightarrow{m}$ a un module (une norme) constante et une direction variable. Par analogie avec l'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ sur un dipôle électrique de moment dipolaire électrique $\overrightarrow{p}$ se résumant à un couple de moment dynamique $\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}$ qui provoque l'alignement du dipôle avec le champ, on en déduit que le courant crée un *champ magnétique*[11] noté $\overrightarrow{B}$ exerçant sur la boussole de moment dipolaire magnétique $\overrightarrow{m}$ un couple de moment dynamique $\overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}$ qui aligne la boussole avec le champ. Ceci permet de définir, de façon opérationnelle le champ magnétique et donne un moyen de le mesurer (cf infra). Paradoxalement, cette définition qui a permis l'expérimentation et l'émergence des lois du magnétisme, a conduit au rejet de l'hypothèse des masses magnétiques. Il n'y a néanmoins pas de contradiction, car dans la bonne théorie, avec la bonne définition du moment dipolaire magnétique, l'expression du couple exercé sur la boussole est la même.

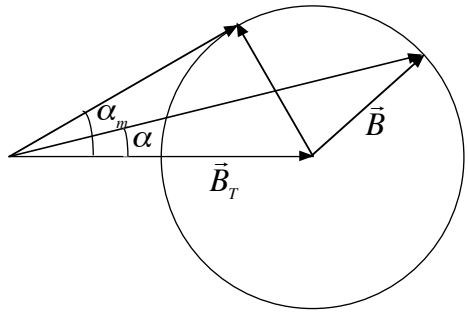

FIGURE 4 – Boussole des tangentes.

La *boussole des tangentes* a longtemps été le seul moyen de mesure des champs magnétiques. A priori, cela peut surprendre car la boussole ne donne que la direction du champ ; c'est oublier l'existence du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B}_T$. Si l'on coupe le courant dans le fil électrique, la boussole s'aligne dans la direction de $\overrightarrow{B}_T$, si l'on rétablit le courant, le fil électrique crée le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ et la boussole s'aligne dans la direction de $\overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}_T$, faisant avec la direction précédente un angle α mesurable, dont on va déduire $\overrightarrow{B}$ en direction et module (norme) en prenant comme unité provisoire $\|\overrightarrow{B}_T\|$.

Toutefois, il faut préciser le protocole expérimental pour accéder à ces informations. L'angle α dépend de la direction relative de $\overrightarrow{B}_T$ et de $\overrightarrow{B}$. Si l'on fait tourner le fil donc $\overrightarrow{B}$, la figure 4 p.11 montre que l'angle α passe par un maximum aisément repérable noté α_m et on lit sur la même figure que :

$$\sin \alpha_m = \frac{\|\overrightarrow{B}\|}{\|\overrightarrow{B}_T\|}$$

Cette méthode suppose que $\|\overrightarrow{B}\| < \|\overrightarrow{B}_T\|$, ce qui est vérifié avec les champs mesurés à

11. jadis *induction magnétique*.

l'époque.

Le protocole décrit ci-dessous correspond au cas où l'on ne connaît pas la direction du champ à mesurer et donne une formule avec des sinus. Une fois établie la direction du champ par rapport au fil, la méthode est plus simple : on oriente le fil de sorte que $\overrightarrow{B}_T$ et $\overrightarrow{B}$ soient orthogonaux et l'on a alors :

$$\tan \alpha_m = \frac{\|\overrightarrow{B}\|}{\|\overrightarrow{B}_T\|}$$

qui explique le nom de boussole des tangentes.

3.b Considérations de symétrie.

Le champ magnétique jouit de propriétés de symétrie anormales (on dit parfois qu'il s'agit d'un *pseudo-vecteur* ou d'un *vecteur axial*). Dans une symétrie par rapport à un plan, il se change en l'opposé de son symétrique.

En conséquence, s'il existe en un point M un plan de symétrie Π pour les circuits électriques, tant pour la géométrie que pour les courants, alors le champ magnétique en M est non pas compris dans le plan Π mais orthogonal au plan Π.

Par contre, s'il existe en un point M un plan de symétrie Π pour les circuits électriques mais inversant le sens des courants (on parle d'*antisymétrie*), alors le champ magnétique en M est dans le plan Π.

Enfin s'il existe, passant par M, un axe Δ de symétrie de révolution, le champ est colinéaire à cet axe Δ. Ici, le comportement est normal, c'est dû au fait que contrairement à une symétrie par rapport à un plan, une rotation ne change pas un trièdre direct en un trièdre indirect.

Cette propriété n'est pas compréhensible dans une théorie de masses magnétiques, sauf à[12] considérer que celles-ci changent de signe dans un changement de repère qui passe d'un trièdre direct à un trièdre indirect, en introduisant de facto la notion de *pseudo-salaire* ou *scalaire axial*. On la considérera dans ce chapitre comme une loi expérimentale.

3.c Formule de Biot et Savart.

Expérimentalement, Biot et Savart observent que le champ créé en un point P par un fil rectiligne très long (idéalement de longueur infinie) parcouru par un courant I à une distance r du fil est orthoradial, proportionnel à l'intensité et inversement proportionnel à la distance r du point au fil, soit

$$B(M) = Cte\,\frac{I}{r}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

12. Rappelons que « sauf à » signifie en gros «en se laissant la possibilité de ».

Laplace essaie alors de présenter ce résultat comme contribution de champs élémentaires créés par des éléments infiniment petits MM' de fil. Il s'appuie sur le résultat d'un problème électrostatique équivalent (voir chapitre C-I), celui du champ créé par un fil rectiligne infini de densité linéïque de charge λ, obtenu par intégration des champs élémentaires créés en P par les éléments infiniment petits MM', soit

$$\overrightarrow{E}(P) = \int \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{\lambda\,\|\overrightarrow{MM'}\|\,\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|^3} = \cdots = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,\overrightarrow{e_r}$$

On n'a pas détaillé les calculs, volontairement car ils ressemblent à ceux qui suivent.

Il lui faut remplacer l'élément scalaire de charge $\lambda\,\|\overrightarrow{MM'}\|$ par l'élément vectoriel soit (cf supra) $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = I\,\overrightarrow{MM'}$ et obtenir un résultat vectoriel orthoradial ; la solution la plus simple, le produit vectoriel, s'avère le bon choix. Reste à changer de constante dont le choix est équivalent au choix des unités ; il propose donc (avec les notations modernes pour la constante) :

$$\overrightarrow{B}(P) = \int \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{I\,\overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|^3}$$

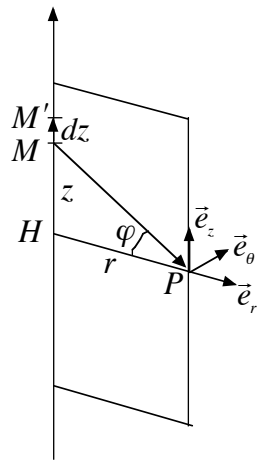

Figure 5 – Biot et Savart.

Vérifions avec lui que cette formule redonne bien le résultat expérimental. Le point P est à une distance r du fil, sa projection orthogonale est le point H, l'élément de courant est repéré par $z = HM$ et $\mathrm{d}z = MM'$; les notations, traditionnelles sont expliquées par la figure 5 p. 13. On a donc $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{HP} - \overrightarrow{HM} = r\,\overrightarrow{e_r} - z\,\overrightarrow{e_z}$, d'où les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{MP} = \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z} \wedge (r\,\overrightarrow{e_r} - z\,\overrightarrow{e_z}) = r\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\|\overrightarrow{MP}\| = \|r\,\overrightarrow{e_r} - z\,\overrightarrow{e_z}\| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\overrightarrow{B}(P) = \int_{z=-\infty}^{z=\infty} \frac{\mu_0\, I}{4\,\pi}\, \frac{r\,\mathrm{d}z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, \overrightarrow{e_\theta}$$

En appelant φ l'angle HPM, on a $z = r\,\tan\varphi$ d'où $\mathrm{d}z = \frac{r\,\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}$ et $\sqrt{r^2+z^2} = \frac{r}{\cos\varphi}$; enfin les bornes d'intégration correspondent à $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\overrightarrow{B}(P) = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0\, I}{4\,\pi\, r}\, \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\, \overrightarrow{e_\theta} = \frac{\mu_0\, I}{4\,\pi\, r}\, [\sin\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\, \overrightarrow{e_\theta} = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\, \overrightarrow{e_\theta}$$

La loi de Biot et Savart est validée par par la concordance entre théorie et expérience, dans le cas du fil infini ; le travail du physicien est désormais de vérifier que cette concordance existe encore chaque fois que la géométrie du circuit électrique le permet. Rassurez-vous, en près de deux siècles, ce travail a été mené avec succès.

3.d Topologie des lignes de champs magnétiques.

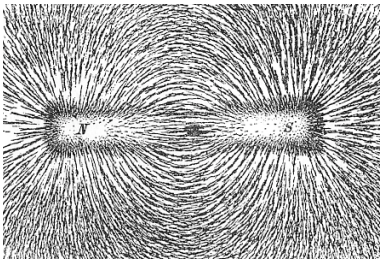

Figure 6 – Spectre magnétique d'un aimant droit.

Une ligne de champ magnétique se définit, bien sûr, comme une courbe tangente en chacun de ses points au champ magnétique. On constate, au contraire des lignes de champ électrique (voir chapitres C-I et C-II), qu'elles sont, sauf cas particulier, des courbes fermées.

Expérimentalement, il est aisé de les matérialiser par saupoudrage [13] de limaille de fer. Les grains de fer, soumis au champ magnétique, devient des dipôles qui s'orientent dans la direction du champ.

La figure 6 p. 14 donne le *spectre magnétique* d'un aimant droit. Dans ce cas, les lignes se referment à l'intérieur de l'aimant, zone inaccessible à la limaille.

3.e Flux conservatif.

Si l'on observe le spectre magnétique d'un aimant droit (figure 6 p. 14), on retrouve qualitativemement le même type de lignes de champ que celles créées par un dipôle électrique.

13. Il faut bien sûr un support horizontal, traversé par le fil.

Il en est de même pour le spectre d'une spire de courant circulaire ; c'est du reste ce qui permettra de comprendre enfin la vraie nature du magnétisme et des dipôles magnétiques.

La formule de Biot et Savart permet de mener à bien le calcul du champ à grande distance de la boucle. Ce calcul sera mené dans le chapitre C-IV sur les dipôles électriques et magnétique et la conclusion est que l'on retrouve exactement le même type de champ que celui créé par un dipôle électrique, donc avec les même propriétés.

L'une d'elles est que là où il n'y a pas de charges, le flux à travers deux sections d'un même tube de champ est le même, simple conséquence du théorème de Gauss.

L'étude expérimentale a confirmé que cette propriété se retrouve pour le champ magnétique sans aucune condition et dans tous les contextes possibles. On dit qu'il est *à flux conservatif*. Nous en détaillerons les conséquences dans le chapitre C-VIII consacré aux équations de Maxwell.

Remarque : On en déduira que le champ magnétique peut être considéré comme le rotationnel d'un *potentiel-vecteur* noté traditionnellement $\overrightarrow{A}$ et calculé par la formule :

$$\overrightarrow{A}(P) = \int \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{I\,\overrightarrow{MM'}}{\|\overrightarrow{MP}\|}$$

mais, on ne s'en sert pas en magnétostatique car au contraire du potentiel électrique, il ne donne pas de calculs plus simples pour accéder au champ.

3.f Théorème d'Ampère.

Si l'on calcule la circulation du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini, parcouru par un courant I, le long d'une ligne de champ, c'est-à-dire bien évidemment le long d'un cercle de rayon r ayant pour axe le fil, on a, en remarquant qu'un arc élémentaire est de la forme $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$:

$$\int \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r}\,\overrightarrow{e_\theta}\cdot r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi}\int \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi}\,2\,\pi = \mu_0\,I$$

On a pu, de façon malcommode avec les outils de l'époque, généraliser cette relation à tout type de circuit électrique et à toute courbe Γ fermée et orientée sous la forme :

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0\,I_{\text{enlacée}}$$

où $I_{\text{enlacée}}$ est le courant qui traverse toute surface Σ de contour Γ avec la convention de signe dite du *tire-bouchon*, à savoir si l'on considère Σ comme la surface d'un bouchon et que l'on fasse tourner un tire-bouchon [14] dans le sens de l'orientation de Γ, il progresse dans le sens positif de traversée de Σ.

14. sauf avec le tire-bouchon de farces et attrapes offert par mes élèves, geste aisément pardonné car l'objet était accompagné de Beaulolais nouveau.

Remarque 1 : si l'on utilise le théorème d'Ampère pour calculer le champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur finie et parcouru par un courant I, on obtient le même résultat que pour un fil infini, ce qui est absurde. La première réponse qui vienne à l'esprit est qu'un fil parcouru par un courant I doit constituer un circuit fermé et que ce n'est qu'à cette condition que le théorème d'Ampère est valable. Quand on s'appelle Maxwell, on réfléchit plus finement : un fil AB parcouru par l'intensité I de A vers B depuis l'instant $t = 0$ voit une charge $Q = I\,t$ s'accumuler au fil du temps au point A et une charge $-Q = -I\,t$ au point B, ces charges variables créent un champ électrique variable et c'est forcément lui qui est source de la différence entre le fil fini et le fil infini ; c'est par des réflexions de ce genre que Maxwell a réussi à réaliser une synthèse cohérente de l'électromagnétisme.

Remarque 2 : un fil rectiligne infini n'est pas un circuit fermé et n'est pas réalisable expérimentalement. Difficile dans ces conditions de comparer théorie et expérience, toutes deux impossibles. En fait, on réalise par la pensée un fil rectiligne de longueur $2\,R$ complété par un demi-cercle de centre O et de rayon R ; c'est bien un circuit fermé puis on fait tendre R vers l'infini. Pour des points à des distances de O petites devant R, un élément MM' dont on peut noter la longueur $\mathrm{d}l$ créé un champ élémentaire dont on peut majorer le module (la norme) comme ceci :

$$\left\| \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{I\,\overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|^3} \right\| \leqslant \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi}\,\frac{\|\overrightarrow{MM'}\| \cdot \|\overrightarrow{MP}\|}{\|\overrightarrow{MP}\|^3} \approx \frac{\mu_0\,I}{4\,\pi}\,\frac{\mathrm{d}l}{R^2}$$

Par sommation sur le demi-cercle ($\int \mathrm{d}l = \pi\,R$), le champ qu'il créé est majoré par à peu près $\dfrac{\mu_0\,I}{2\,R}$ qui tend vers zéro quand R croît indéfiniment. C'est en ce sens que le fil rectiligne infini existe.

3.g Usage raisonné du théorème d'Ampère.

Soit une répartition de courants et un point M quelconque où l'on veuille calculer le champ magnétique. Il faut, dans un premier temps, analyser les symétries ou antisymétries pour trouver la direction de $\overrightarrow{B}(M)$ puis les invariances.

Ensuite, il faut trouver une courbe fermée à laquelle appliquer le théorème ; il ne s'agit pas d'une courbe matérielle mais d'une entité mathématique inventée au cas par cas en fonction du point où l'on veut calculer le champ. Utiliser une courbe qui apparaît dans l'énoncé du problème est la preuve d'une mécompréhension de l'usage du théorème d'Ampère.

Pour pouvoir calculer le champ en M, il faut

- que la courbe passe par M sinon $\overrightarrow{B}(M)$ n'apparaît pas dans $\oint_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ et l'on ne peut espérer l'en déduire,
- que $\overrightarrow{B}(M)$ soit tangent à la courbe sinon on perd tout espoir de connaître la composante tangentielle du champ dont le produit scalaire avec $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ est nul,

Connaissant la définition des lignes de champ, le lecteur se convaincra que le théorème d'Ampère s'utilise en choisissant la ligne de champ passant par le point où l'on veut calculer le champ.

Ce n'est pas tout : il faut aussi que le module du champ soit uniforme sur la courbe sinon on ne peut déduire la valeur de la fonction en un point en ne connaissant que la valeur d'une intégrale [15]. Il faut donc une symétrie suffisante pour que le module (la norme) du champ soit uniforme sur cette ligne de champ, sinon le théorème sera inapplicable et il faudra se rabattre sur la formule de Biot et Savart.

Le théorème d'Ampère sera donc rarement applicable ; pourquoi diable en faire une vedette ? D'abord parce que l'intégration de la formule de Biot et Savart nécessite un circuit simple et est donc aussi peu souvent applicable, en tout cas, pas avec le genre de circuit électrique que l'on trouve sur la paillasse de l'élève moyen qui relève de la pelote de fil ! Il ne faut toutefois pas oublier que la physique, c'est la confrontation entre théorie et expérience et donc que l'on réalise les expériences avec de circuits pour lesquels la théorie donne un résultat calculable ; voilà pourquoi l'on doit connaître les grands classiques que nous allons aborder tout de suite.

3.h Les grands classiques.

• Champ créé par un fil rectiligne infini.

On reprend ici un calcul effectué plus haut pour illustrer l'usage du théorème d'Ampère.

Un circuit filiforme rectiligne infini, confondu avec Oz est parcouru par un courant d'intensité I compté positivement dans le sens de Oz. Soit un point M repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z (voir figure 7 p. 18). Le plan passant par Oz et le point M est plan de symétrie, donc le champ magnétique en M lui est orthogonal, c'est à dire orthoradial. De plus l'invariance du circuit par translation ou rotation selon Oz permet d'affirmer que le champ est de la forme $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\,\overrightarrow{e_\theta}$.

Appliquons donc, selon les principes évoqués plus haut, le théorème d'Ampère à un cercle d'axe Oz et de rayon r :

$$\mu_0\, I = \oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \oint B(r)\,\overrightarrow{e_\theta} \cdot \mathrm{d}l\,\overrightarrow{e_\theta} = \oint B(r)\,\mathrm{d}l = B(r) \oint \mathrm{d}l = 2\,\pi\,r\,B(r)$$

d'où

$$B(r) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\,r} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\,r}\overrightarrow{e_\theta}$$

15. C'est un peu comme si l'on disait « $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, calculer $f(\frac{1}{2})$ ».

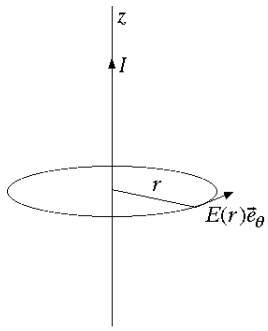

FIGURE 7 – Fil rectiligne infini.

• **Champ créé sur l'axe d'une spire circulaire.**

Un circuit filiforme, circulaire, de centre O, de rayon R, contenu dans le plan xOy, donc d'axe Oz, est parcouru par un courant I, compté positivement dans le sens trigonométrique (voir figure 8 p. 18). On cherche le champ magnétique créé en un point M de cote z sur l'axe Oz. La symétrie de révolution entraîne que le champ est colinéaire à Oz (sur l'axe Oz uniquement, bien sûr). Par contre, bien que Oz soit donc une ligne de courant, le module du champ y varie avec z et le théorème d'AMPÈRE ne nous sera d'aucun secours ; il faut utiliser la formule de BIOT et SAVART.

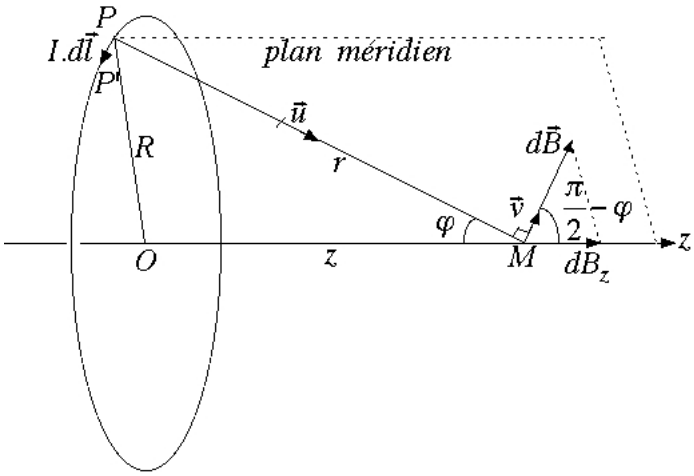

FIGURE 8 – Spire circulaire.

Considérons donc un élément de courant $I\,\overrightarrow{PP'} = I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = I\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{e_\theta}$ sur la spire, il crée en M, en notant $\overrightarrow{u}$ et r le vecteur unitaire et le module de $\overrightarrow{PM}$, un champ élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{e_\theta}\wedge\overrightarrow{u}}{r^2}$$

$\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{u}$ sont unitaires et orthogonaux, leur produit vectoriel est donc un vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$ dans le plan défini par Oz et P, notons-le $\overrightarrow{v}$. On a donc :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{v}}{r^2}$$

$\mathrm{d}\overrightarrow{B}$ se compose d'une composante sur l'axe $\mathrm{d}B_z\,\overrightarrow{e}_z$ et d'une composante orthogonale à Oz. L'intégration de cette seconde composante donnera un résultat nul, car on sait que le champ total est porté par Oz ; seule nous intéresse donc $\mathrm{d}B_z$. Notons φ l'angle OPM. Par projection, on a :

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{I\,\mathrm{d}l\,\sin\varphi}{r^2}$$

et

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int\frac{I\,\mathrm{d}l\,\sin\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{I\,\sin\varphi}{r^2}\int\mathrm{d}l = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{I\,\sin\varphi}{r^2}\,2\,\pi\,R = \frac{\mu_0}{2}\frac{I\,\sin\varphi}{r^2}\,R$$

Reste à reporter $\sin\varphi = R/r$ et $r = \sqrt{R^2+z^2}$, alors

$$B_z(z) = \frac{\mu_0\,I\,R^2}{2\,(R^2+z^2)^{3/2}}$$

En particulier, au centre de la spire ($z=0$) :

$$B_z(0) = \frac{\mu_0\,I}{2\;R}$$

• Champ créé au voisinage de l'axe d'une spire circulaire.

Considérons le même circuit électrique et un point M non plus sur l'axe mais près de l'axe, repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z avec $r \ll R$ (voir figure 9 p. 20). Le plan méridien contenant Oz et M est un plan d'antisymétrie donc le champ magnétique est contenu dans ce plan ; il a une composante axiale B_z et une composante radiale B_r qui ne dépendent que de r et z puisqu'il y a invariance par rotation. Considérons deux points M et M' symétriques par rapport à l'axe ; on peut considérer qu'ils ont même z et des valeurs de r opposées. On passe de l'un à l'autre par une rotation de 180° qui conserve la composante axiale et retourne la composante radiale ; B_z est donc fonction paire de r et B_r fonction impaire de r. Si r est assez petit, on peut remplacer $B_z(z,r)$ et $B_r(z,r)$ par leur développement de Taylor à l'ordre 1 en r, soit :

$$B_z(z,r) = B_z(z,0)$$

$$B_r(z,r) = r\,\frac{\partial B_r}{\partial r}(z,0)$$

$B_z(z,0)$ est le champ sur l'axe calculé plus haut ; on a donc :

$$B_z(z,r) = B_z(z,0) = \frac{\mu_0\, I\, R^2}{2\,(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Le développement de $B_r(z,r)$ montre que B_r est proportionnel à r mais ne nous permet pas d'en calculer la valeur puisque nous ne connaissons pas $\frac{\partial B_r}{\partial r}(z,0)$.

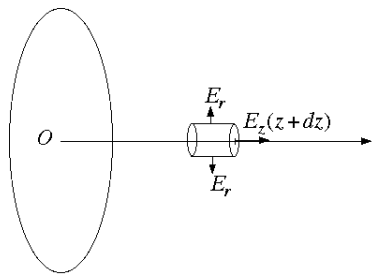

FIGURE 9 – Spire circulaire, encore.

On va utiliser ici le fait que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul (une des conséquences du fait que le champ magnétique soit à flux conservatif). On choisit un cylindre d'axe Oz entre les cotes z et $z+\mathrm{d}z$ fermé par deux disques. Le flux à travers le disque de cote $z+\mathrm{d}z$ et de vecteur surface parallèle à Oz de même sens est :

$$\Phi_1 = \iint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint B_z(z+\mathrm{d}z,r)\,\mathrm{d}S = \iint B_z(z+\mathrm{d}z,0)\,\mathrm{d}S =$$
$$= B_z(z+\mathrm{d}z,0)\iint \mathrm{d}S = \pi\, r^2\, B_z(z+\mathrm{d}z,0)$$

De même le flux à travers le disque de cote z est, en notant le changement d'orientation :

$$\Phi_2 = -\pi\, r^2\, B_z(z,0)$$

Enfin, le flux à travers le cylindre, dont les vecteurs surfaces élémentaires sont radiaux et en prenant $\mathrm{d}z$ suffisamment petit pour négliger la variation de B_r avec z, est :

$$\Phi_3 = \iint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint B_r(z,r)\,\mathrm{d}S = B_r(z,r)\iint \mathrm{d}S = 2\,\pi\, r\,\mathrm{d}z\, B_r(z,r)$$

Le flux total est nul et l'on arrive donc, avec un développement de TAYLOR à :

$$0 = \Phi_1+\Phi_2+\Phi_3 = \pi\, r^2\,(B_z(z+\mathrm{d}z,0) - B_z(z,0)) + 2\,\pi\, r\,\mathrm{d}z\, B_r(z,r) =$$
$$= \pi\, r^2\,\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z + 2\,\pi\, r\,\mathrm{d}z\, B_r(z,r)$$

On en déduit :

$$B_r(z,r) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}$$

soit en reportant l'expression de $B_z(z,0)$:

$$B_r(z,r) = \frac{3\,\mu_0\,I\,R^2\,z\,r}{2\,(R^2+z^2)^{5/2}}$$

• **Bobines de Helmholtz.**

Soient deux spires coaxiales d'axe Oz de même rayon R parcourues par la même intensité I dont les centres ont pour cotes $-a$ et $+a$. Appelons $B(z)$ le champ sur l'axe d'une seule spire en fonction de la distance entre le centre de la spire et le point de calcul. On a vu plus haut que :

$$B(z) = \frac{\mu_0\,I\,R^2}{2\,(R^2+z^2)^{3/2}}$$

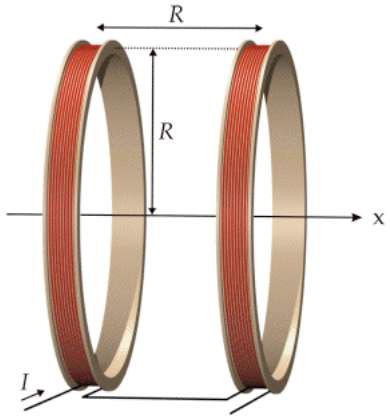

FIGURE 10 – Bobines de Helmholtz.

Compte tenu de la position des centres et aussi de la parité de $B(z)$, le champ créé par les deux spires est :

$$B_{total}(z) = B(z+a) + B(z-a) = B(a+z) + B(a-z)$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 3 autour de a :

$$B(a+z) = B(a) + z\,B'(a) + \frac{z^2}{2}\,B''(a) + \frac{z^3}{6}\,B'''(a) + o(z^3)$$

$$B(a-z) = B(a) - z\,B'(a) + \frac{z^2}{2}\,B''(a) - \frac{z^3}{6}\,B'''(a) + o(z^3)$$

$$B_{total}(z) = 2\,B(a) + z^2\,B''(a) + o(z^3)$$

Si l'on choisit a de sorte que $B''(a) = 0$, alors :

$$B_{total}(z) = 2\,B(a) + o(z^3)$$

autrement dit, on peut considérer que sur l'axe (et au voisinage, avec la même méthode que dans le « grand classique » précédent) le champ magnétique est quasiment uniforme. Les bobines de HELMHOLTZ sont avec le solénoïde, la façon d'obtenir un champ magnétique uniforme sur un volume assez grand.

Un calcul de routine qu'on vous invite à coucher sur le papier (je ne vais quand même pas tout vous faire !) conduit à :

$$B''(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = R/2$$

c'est-à-dire que l'écartement des spires $(2\,a)$ est égal à leur rayon, ce qui donne une géométrie très compacte, caractéristique pour un œil exercé, visible sur la figure 10 p. 21 issue de Wikimedia.

Remarque : l'avantage du tore sur le solénoïde (voir ci-dessous) est l'intervalle entre les deux bobines ; on peut donc voir ce qui se passe entre elles ou y introduire à volonté différents objets d'étude.

• Champ créé par un solénoïde.

Un solénoïde est formé de N spires ciculaires de même axe Oz, de même rayon R, parcourues par le même courant I et dont les centres sont régulièrement espacés sur une longueur totale L ; on note n le nombre de spires par unité de longueur (donc $n = N/L$). En pratique, il est réalisé par un fil hélicoïdal d'axe Oz de rayon R et de pas L/N, parcouru par le courant I. On suppose L grand devant R. Si l'on se place en un point éloigné des deux extrémités du solénoïde, c'est-à-dire dont les deux distances aux deux bouts du solénoïde sont grandes devant R, on peut remplacer le vrai solénoïde par un solénoïde infini de même rayon et de même pas, parce que ce que l'on rajoute se trouve à suffisamment grande distance pour introduire des termes négligeables.

Considérons un point M, sur l'axe ou non d'un solénoïde infini. Le plan passant par M et orthogonal à Oz est un plan de symétrie (enfin presque, car la symétrie peut décaler légèrement la position des spires ; l'approximation sera d'autant meilleure que les spires seront plus serrées). Le champ magnétique sera donc orthogonal à ce plan, donc parallèle à Oz. L'invariance par translation (presque, cf supra) et par rotation selon Oz prouve que le champ ne dépend que de la distance r à l'axe, donc :

$$\overrightarrow{B}(M) = B(r)\,\overrightarrow{e_z}$$

Prenons une longueur arbitraire ℓ, appliquons le théorème d'AMPÈRE à un rectangle $ABCD$ dans un plan méridien ; les coordonnées des quatre points sont : $A(r = r_1, z = 0)$,

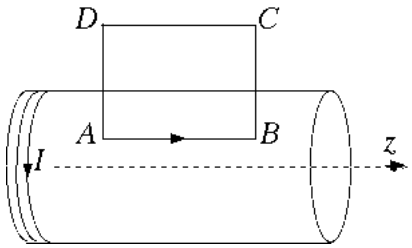

FIGURE 11 – Solénoïde.

$B(r = r_1, z = \ell)$, $C(r = r_2, z = \ell)$ et $D(r = r_2, z = 0)$ avec $r_1 < R < r_2$ (voir figure 11 p. 23). La circulation du champ magnétique le long de $ABCDA$ est, avec $\overrightarrow{B}$ orthogonal à BC et DA :

$$\oint_{ABCDA} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B(r_1)} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{B(r_2)} = (B(r_1) - B(r_2))\ \ell$$

Le rectangle enlace un nombre $n\,\ell$ spires parcourues par le courant I ; le courant total enlacé est donc $n\,\ell\,I$. Le théorème d'AMPÈRE conduit donc à :

$$\forall r_1 < R \qquad \forall r_2 > R \qquad B(r_1) - B(r_2) = \mu_0\, n\, I$$

On en déduit que $B(r)$ est constant par morceaux, on notera B_{int} sa valeur pour $r < R$ et B_{ext} sa valeur pour $r < R$. Donc $B_{\text{int}} - B_{\text{ext}} = \mu_0\, n\, I$. On termine l'étude en remarquant que si r_2 tend vers l'infini, on se trouve infiniment loin des courants et donc que le champ est nul, d'où :

$$\overrightarrow{B}_{\text{ext}} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{B}_{\text{int}} = \mu_0\, n\, I\, \overrightarrow{e_z}$$

L'expérience prouve que ce résultat est correct pour un solénoïde fini, sauf bien sûr près des bords où les lignes de champ commencent à diverger ; elles se referment par un long trajet à l'extérieur du solénoïde où le champ ne sera pas nul mais très petit.

On peut pallier [16] cet inconvénient en courbant un solénoïde pour lui donner la forme d'un tore ; le théorème d'AMPÈRE appliqué à un cercle de rayon r à l'intérieur du solénoïde torique donne, en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0\, N\, I}{2\,\pi\, r}\, \overrightarrow{e_\theta}$$

L'inconvénient en retour [17] est que le module (la norme) du champ n'est plus uniforme, car r n'est pas constant dans le tore.

16. verbe transitif.
17. Toujours cette vieille histoire de beurre et d'argent du beurre !

• **Champ créé par une nappe plane de courant.**

Soit un plan choisi comme plan Oxy parcouru par un courant surfacique uniforme dont on prend la direction et le sens pour direction et sens de Ox, on le note donc $\overrightarrow{j_S} = j_S\,\overrightarrow{e_x}$. soit un point M hors du plan de cote z, positive pour fixer les idées.

Le plan passant par M et parallèle à Oxz et plan de symétrie ; le champ magnétique en M est donc orthogonal à ce plan, c'est à dire parallèle à Oy ; on notera $\overrightarrow{B}(M) = B(M)\,\overrightarrow{e_y}$.

L'invariance du problème par translation parallèlement à Ox ou Oy implique que le champ ne dépend ni de x, ni de y, donc uniquement de z ; on notera donc $\overrightarrow{B}(M) = B(z)\,\overrightarrow{e_y}$.

Enfin la symétrie par rapport à Oxy change z en $-z$ et le champ en l'opposé de son symétrique ; on en déduit que $B(-z) = -B(z)$.

On va appliquer le théorème d'Ampère à un circuit fermé rectangulaire $ABCD$ où :
- AB est parallèle à Oy de cote z de longueur arbitraire ℓ, d'où $\int_A^B \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = B(z)\,\ell$
- BC est perpendiculaire au plan Oxy entre les cotes z et $-z$; il est orthogonal au champ d'où $\int_B^C \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$
- CD, puisqu'il s'agit d'un rectangle, est parallèle à Oy de cote $-z$ de longueur ℓ dans le sens opposé à Oy, d'où $\int_C^D \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -B(-z)\,\ell = B(z)\,\ell$
- DA est perpendiculaire au plan Oxy entre les cotes $-z$ et z ; il est orthogonal au champ d'où $\int_D^A \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$

La circulation du champ est donc $\oint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 2\,B(z)\,\ell$. La règle du tire-bouchon appliquée à $ABCDA$, avec z positif, donne comme sens positif de traversée le sens opposé à Oy donc opposé au courant ; l'intensité enlacée est donc comptée négativement. Pour un courant surfacique, elle est le produit de la densité de courant surfacique j_S par la largeur traversée, ici ℓ. Le théorème d'Ampère conduit, avec rappelons-le z positif, donc à :

$$2\,B(z)\,\ell = -\mu_0\,j_S\,\ell$$

$$B(z) = -\frac{1}{2}\,\mu_0\,j_S$$

Pour la figure[18], voyez... sur votre bureau, car j'espère bien que vous lisez ce cours activement un stylo à la main, ce qui a toujours été la seule façon de mémoriser ce que l'on reçoit.

3.i Validité en courant variable.

Toutes les lois de la magnétostatique ont d'abord été découvertes expérimentalement avec du courant continu, donc en régime permanent. Quand on a commencé à savoir créer du courant alternatif sinusoïdal, on a bien sûr cherché à savoir ce que devenaient ces lois

18. Certes, je peux facilement la faire, cette figure ; mais bon, il faut bien vous forcer la main de temps à autre.

et les premières expériences ont amené à croire qu'elle étaient valables à un instant donné, je veux dire par là ceci :

Au vu de la loi de Biot et Savart, le champ en un point M créé par un circuit parcouru par une intensité I est de la forme $\overrightarrow{B}(M) = I\,\overrightarrow{V}(M)$ où $\overrightarrow{V}(M)$ est une intégrale dont le résultat ne dépend que de la position de M et de la forme du circuit. Si l'intensité dépend du temps, il faut lire que $\overrightarrow{B}(M,t) = I(t)\,\overrightarrow{V}(M)$. En pratique, on calcule le champ avec une intensité I et, en fin de calcul, on remplace I par son expression en fonction du temps.

Plus tard, on a su créer des courants de fréquences de plus en plus élevées et les ennuis ont commencé, ennuis transformés ensuite en découvertes technologiques comme l'antenne émettrice, tout cela sera détaillé dans le chapitre C-VIII consacré aux équations de Maxwell. Provisoirement, retenons qu'au laboratoire, les lois de la magnétostatique sont valables en gros jusque la fréquence de 1 MHz.

3.j Rappel épistémologique

Cette étude présente la magnétostatique comme une série de lois expérimentales indépendantes et c'est historiquement partiellement vrai. C'est l'occasion de rappeler l'une des démarches fondamentales de la physique : à partir une série de lois expérimentales jugées trop nombreuses, tenter d'en rendre compte par une seule loi théorique, baptisée principe, dont on puisse toutes les déduire logiquement. Maxwell a effectué cette démarche à partir de toutes les lois expérimentales de l'électrostatique, de la magnétostatique et de l'induction.

4 Force exercée par un champ magnétique sur un élément de courant.

4.a De la force de Laplace à la force de Lorentz.

Ampère a le premier observé que deux fils électriques parallèles parcourus par un courant exercent une action l'une sur l'autre. Ultérieurement, Laplace a traduit cet effet comme l'action sur l'un des fils du champ que crée l'autre. Il a été aisé de découvrir la loi de force connue sous le nom de force de Laplace.

Formulée avec l'outil plus moderne du produit vectoriel, un élément de circuit filiforme $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit une force :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{B}$$

Restait ensuite à faire la synthèse entre les actions d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique et un élément de courant ; pour ce faire, il a d'abord fallu abandonner la théorie des masses magnétiques et comprendre qu'un dipôle magnétique est équivalent

à une petite boucle de courant. Les calculs seront détaillés dans le chapitre C-IV sur les dipôles électriques et magnétiques.

Restait aussi à bien comprendre la nature du courant électrique, d'en déduire que la force de LAPLACE est la résultante des forces exercées électromagnétiques sur les porteurs de charges et les charges fixes pour arriver enfin à la force de LORENTZ exercée par un champ électromagnétique sur une charge mobile ou non. Détaillons : le paragraphe 2.f p. 10 a montré l'équivalence entre $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ et $\sum_{i\in \mathrm{d}V} q_i\,\overrightarrow{v}_i$ d'où l'on déduit celle entre la force de LAPLACE $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}\wedge\overrightarrow{B}$ et $\sum_{i\in \mathrm{d}V} q_i\,\overrightarrow{v}_i\wedge\overrightarrow{B}$, ce qui suggère que la charge q_i, compte tenu de la force de COULOMB, est soumise à la force de LORENTZ [19]

$$\overrightarrow{F}_i = q_i\,\overrightarrow{E} + q_i\,\overrightarrow{v}_i\wedge\overrightarrow{B}$$

Cette formule a été ultérieurement érigée au statut de principe. Nous y reviendrons au chapitre C-VIII.

4.b Définition de l'ampère.

Un fil rectiligne infini confondu avec Oz parcouru par un courant I compté positivement dans le sens de Oz crée en tout point un champ calculé plus haut, à avoir :

$$\overrightarrow{B}(M) = B_\theta(r)\,\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

En tout point d'un autre fil rectiligne infini, parallèle à Oz et passant par le point A de Ox d'abscisse a positive, le vecteur orthoradial $\overrightarrow{e_\theta}$ se confond avec $\overrightarrow{e_y}$, vecteur unitaire de Oy et la distance r avec a. Une longueur L de ce fil, parcouru par la même intensité I dans le même sens subit donc une force de LAPLACE totale obtenue par intégration des forces élementaires sur des portions $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}l\,\overrightarrow{e_z}$ de ce fil, soit :

$$\overrightarrow{F} = \int I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}\wedge\overrightarrow{B} = \int I\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{e_z}\wedge\frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,a}\,\overrightarrow{e_y} = \frac{\mu_0\,I^2}{2\,\pi\,a}\left(\int \mathrm{d}l\right)\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_y} = -\frac{\mu_0\,I^2\,L}{2\,\pi\,a}\,\overrightarrow{e_x}$$

où le signe et la direction indiquent que les fils sont attirés l'un vers l'autre.

La définition de l'Ampère, dans le Système International revient à fixer la valeur de μ_0 à $4\,\pi\,10^{-7}$; la voici :

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre de longueur.

19. La réalité est un peu plus complexe, on y reviendra dans l'étude de l'effet Hall au chapitre C-V.

4.c Balance de Cotton.

Il s'agit d'une balance classique dont l'un des fléaux a été modifié pour mesurer un champ magnétique assez intense dans une zone limité de l'espace, typiquement l'entrefer d'un électroaimant. Le fléau modifié est remplacé par un circuit filiforme rigide parcouru par un courant I intense mesuré par un ampèremètre ; ce circuit est plan et placé orthogonalement au champ. Ce circuit représenté sur la figure 12 p. 27 se compose :

- d'un fil d'amenée du courant se raccordant au circuit en un point O de l'axe de la balance ; ainsi, même s'il exerce une force en O, son moment par rapport à l'axe est nul,
- d'un segment OP en dehors du champ magnétique, donc soumis à aucune force,
- d'un arc de cercle PM de centre O partiellement plongé dans le champ ; les éléments de ce circuit dans le champ sont soumis à une force de Laplace, orthogonale au fil et au champ donc dirigée selon le rayon et donc de moment nul par rapport à l'axe.
- d'un segment MN dont le support passe par O ; la force de Laplace exercée sur un segment élémentaire entre les distances r et $r + \mathrm{d}r$ du point O est soumis à une force verticale vers le bas de module (de norme) $\mathrm{d}F = I\,B\,\mathrm{d}r$ et donc de moment par rapport à l'axe $\mathrm{d}\mathcal{M} = r\,\mathrm{d}F = I\,B\,r\,\mathrm{d}r$; par intégration le moment total est $\mathcal{M} = \frac{1}{2}\,I\,B\,(r_M^2 - r_N^2)$,
- d'un arc de cercle MQ de centre O partiellement plongé dans le champ ; les éléments de ce circuit dans le champ sont soumis à une force de Laplace, orthogonale au fil et au champ donc dirigée selon le rayon et donc de moment nul par rapport à l'axe.
- d'un segment QO en dehors du champ magnétique, donc soumis a aucune force,
- d'un fil de retour du courant se raccordant au circuit en un point O de l'axe de la balance ; ainsi, même s'il exerce une force en O, son moment par rapport à l'axe est nul.

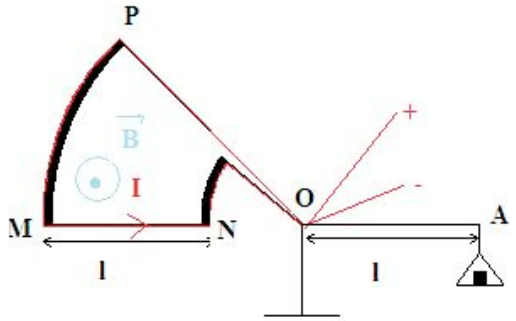

Figure 12 – Balance de Cotton.

Le moment total $\mathcal{M} = \frac{1}{2}\,I\,B\,(r_M^2 - r_N^2)$ est équilibré par celui du poids d'une masse m placée à une distance l de l'axe soit $\mathcal{M} = m\,g\,l$. Mesurer B, c'est placer une masse marquée m qui équilibre la balance.

Inventée en 1900 par Aimé Cotton, elle a été détronée une cinquantaine d'année plus tard, quand la fabrication en masse des semi-conducteurs l'a permis, par la sonde à effet

Hall (voir chapitre C-V sur l'électrocinétique) qui présente l'avantage de pratiquer des mesures pratiquement ponctuelles.

4.d Travail élémentaire des forces de Laplace. Le flux coupé.

Soit un élément de courant $I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ d'un circuit filiforme (en marron sur la figure 13 p. 28) placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ (en bleu) et donc soumis à la force $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = I\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{B}$ (en vert). Si cet élément se déplace d'une longueur élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}L}$ (en rouge), le travail doublement élémentaire de la force est $\mathrm{d}_2W = \overrightarrow{\mathrm{d}F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}L}$. Comme tenu qu'un *produit mixte* est invariant par permutation circulaire de ses trois vecteurs, on peut réécrire ainsi le travail élémentaire :

$$\mathrm{d}_2W = I\,(\overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}L} = I\,(\overrightarrow{\mathrm{d}L} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}l}) \cdot \overrightarrow{B} = I\overrightarrow{\mathrm{d}_2S} \cdot \overrightarrow{B} = I\,\delta_2\varphi$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}_2S}$ est le vecteur surface de la surface balayée par $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ dans son déplacement de $\overrightarrow{\mathrm{d}L}$ (attention : le sens positif est celui du produit vectoriel « déplacement $\wedge$ courant ») et de façon imagée $\delta_2\varphi$ est le *flux coupé* par l'élément de courant dans son déplacement. Résumons : le travail élémentaire est le produit de l'intensité et du flux coupé par le circuit.

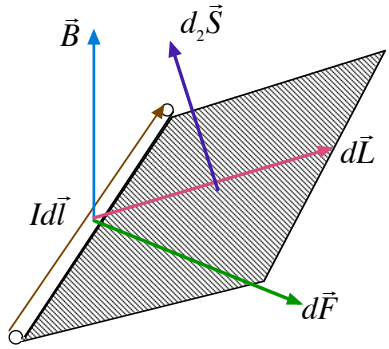

Figure 13 – Flux coupé.

Si l'on remplace mentalement l'élément de courant par une faux et les lignes de champ magnétique par des épis de blé mur, on comprend le sens de la métaphore du flux coupé ; les physiciens ont l'âme très bucolique [20]. Le tableau 14 p. 29, issu de Wikimedia, est de Seurat et s'appelle « Le faucheur ».

20. « O fortunatos nimium sua si bona norint agricolas ! » dirait le grand Virgile... et l'un des pirates récurrents des aventures d'Astérix.

FIGURE 14 – Le faucheur.

4.e Du flux coupé à la variation de flux. Théorème de Maxwell.

Soit un circuit fermé parcouru par une intensité I et subissant un petit déplacement vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{d}L}$, dépendant éventuellement du point du circuit, ce qui permet des déplacements avec rotation, voire déformation. Chaque élément de courant balaie une surface traversée par un flux coupé doublement élémentaire $\delta_2\varphi$; par sommation, le circuit balaie une surface ayant la forme d'un manchon étiré entre ses positions extrêmes, notées 1 et 2, traversé par un flux coupé simplement élémentaire $\delta\varphi$, somme des $\delta_2\varphi$.

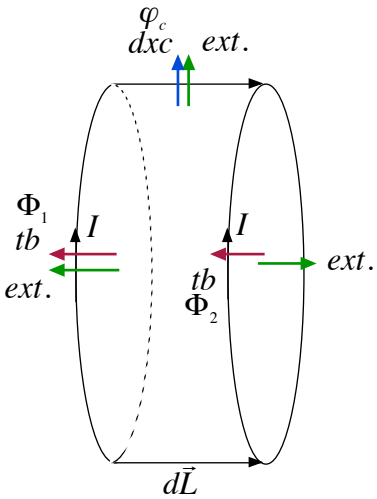

FIGURE 15 – Flux coupé et variation de flux.

Les conventions d'orientation sont précisées dans un cas particulier sur la figure 15 p. 29.

Le flux coupé est compté positivement dans le sens « déplacement $\wedge$ courant » (mention « dxc » et flèche bleue sur la figure.). Le flux Φ_1 à travers le circuit dans sa position initiale et Φ_2 dans sa position finale sont calculés avec le sens positif déterminé par la règle du tire-bouchon appliquée au sens du courant (mention « tb » et flèche rouge).

L'ensemble formé par les deux positions extrêmes du circuit et la surface qu'il a balayée est une surface fermée. Or $\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif et son flux à travers une surface fermée est, *à un instant donné*, nul. Un déplacement ne se fait pas de façon instantané et l'on ne peut en général rien déduire de la remarque, sauf si le champ ne dépend pas du temps.

Dans le cas d'un champ stationnaire (on dit aussi permanent), la somme de trois flux est nulle à condition d'orienter les surfaces vers l'extérieur (mention « ext » et flèche verte), ce qui, dans le cas de la figure conduit à un changement de signe pour Φ_2. On en déduit, en notant $\mathrm{d}\Phi$ la variation élémentaire $\Phi_2 - \Phi_1$ du flux traversant le circuit, que :

$$\delta\varphi + \Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

$$\delta\varphi = \Phi_2 - \Phi_1 = \mathrm{d}\Phi$$

On vérifie aisément que les autres cas de figure (intensité dans l'autre sens et/ou déplacement dans l'autre sens) conduisent au même résultat.

On en déduit que, *si le champ magnétique est stationnaire*, le travail élémentaire est le produit de l'intensité et de la variation élémentaire de flux à travers le circuit. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Maxwell.

Cette propriété est à utiliser avec prudence, car on oublie plus souvent la condition de validité. Par ailleurs, elle est souvent inutilisable, car il est fréquent que l'on connaisse le champ magnétique au niveau du fil conducteur, ce qui permet le calcul du flux coupé, mais non en plein milieu de la spire, ce qui interdit le calcul du flux à travers le circuit. Retenons que c'est souvent *une mauvaise idée*.

4.f Développements à venir.

La notion de flux va aussi être de première importance dans les phénomènes d'induction magnétique qui seront traités dans le chapitre C-VII.

On y détaillera les flux de circuits en interaction et ce sera le moment de s'intéresser aux aspects énergétiques.