

Chapitre C-VIII

Equations de Maxwell.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Après un rappel de l'intérêt de la notion de champ pour régler le problème de l'interaction à distance, on montre comment Maxwell a été amené à ajouter un terme aux équations connues de l'électromagnétisme pour en assurer la cohérence.

On introduit ensuite les potentiels électromagnétiques qui vérifient les équations de Laplace en régime permanent (on retrouve à partir de là les lois classiques de l'électrostatique et de la magnétostatique) et de Poisson dans le cas général.

On montre que, dans le vide, les solutions des équations de Poisson sont ondulatoires et l'on en déduit la formule des potentiels retardés.

On se penche sur la notion de régime quasi-permanent et de ses conditions d'utilisation.

Enfin l'on montre qu'un champ électromagnétique contient des densités volumiques d'énergie et de quantité de mouvement et qu'il peut transporter ces deux grandeurs.

Pour terminer, on rappelle que les paradoxes soulevés par cette théorie ont engendré les théories de la relativité générale et de la mécanique quantique.

Table des matières

C-VIII Equations de Maxwell.	1
1 Interaction électromagnétique.	5
1.a La problématique de l'interaction à distance.	5
1.b La force de Lorentz.	5
1.c Lien entre les charges mobiles et le champ qu'elles créent, quelle approche ?	6
1.d Charges et courants.	6
1.e Compléments sur la force de Lorentz.	7
2 Les équations de Maxwell.	8
2.a La genèse.	8
2.b Formulation locale des équations de Maxwell.	9
2.c Présentation intégrale	10
3 Potentiels	12
3.a Existence	12
3.b Non-unicité	12
3.c Régimes permanents. Equations de Laplace.	13
3.d Equations de Poisson.	16
4 Recherche de solutions dans le vide aux équations de Maxwell.	17
4.a Mise en équation	17
4.b Ondes planes progressives sinusoïdales	18
4.c Génération des ondes.	21
4.d Aspects historiques et contemporains.	21
4.e Ondes sphériques progressives.	21

5	Solutions des équations de Poisson.	22
5.a	Approche intuitive : formules des potentiels retardés.	22
5.b	Validité de la solution des des potentiels retardés.	24
6	Approximation des régimes quasi-stationnaires	27
6.a	Définition et conséquences	27
6.b	Critère de validité	28
6.c	Le piège de la présentation.	29
7	Aspects énergétiques.	30
7.a	Remarques préalables.	30
7.b	Bilan de conservation : l'équation de Poynting.	31
7.c	Un exemple simple : onde plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement.	33
8	Aspects dynamiques.	34
8.a	Bilan de conservation.	34
8.b	Premier exemple avec une onde progressive.	37
8.c	Second exemple avec une onde stationnaire.	38
9	En guise de conclusion : la crise du XX ^e siècle.	39

1 Interaction électromagnétique.

1.a La problématique de l'interaction à distance.

En électrostatique la loi de COULOMB établit une loi de force entre deux charges q_1 et q_2 immobiles en deux points M_1 et M_2 . Dès que les charges sont en mouvement, l'expérience¹ prouve que cette force dépend aussi des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des charges.

Nous avons vu dans le chapitre C-I consacré à l'électrostatique que l'instantanéité des interactions était suspecte, ce qui a été systématisé par la mécanique relativiste. La réponse à ce scrupule est classique : on considère qu'une charge q_1 placée à l'instant t en M_1 et animée à ce même instant d'une vitesse $\vec{v}_1$ crée à tout instant et en tout point de l'espace un champ électromagnétique et c'est lui qui interagit avec toute autre charge.

Reste alors à formuler d'une part le lien entre une charge mobile et le champ qu'elle crée et d'autre part la force subie par une charge placée en un point où règne un champ donné.

Remarque 1 : en pratique une charge en interaction avec plusieurs autres est en fait en interaction avec la somme des champs que créent les autres charges.

Remarque 2 : une fois conceptualisé le champ comme truchement de l'interaction entre charges, on peut passer au degré d'abstraction supérieur et considérer qu'un ensemble de charges crée en un point M et à l'instant t un champ électromagnétique même si en ce point et à cet instant, il n'y a aucune charge qui subisse leur action.

1.b La force de Lorentz.

On postule² que le champ électromagnétique créé en un point M et à l'instant t par toutes les charges, sauf celle qui est en ce point à cet instant (sauf à utiliser la remarque 2 qui précède), est décrit par deux composantes vectorielles appelées respectivement champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et champ magnétique $\vec{B}(M, t)$, ces deux champs formant une entité indissociable $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$; du reste on verra dans le chapitre C-X, qui reformule ceci dans un cadre relativiste, qu'il s'agit bien d'une entité unique.

On postule enfin qu'une charge q , placée à l'instant t au point M où règne le champ $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ et animée d'une vitesse $\vec{v}$, est soumise à une force, dite force de LORENTZ, dont l'expression est :

$$\vec{F} = q \left[\vec{E}(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t) \right]$$

1. en fait indirectement par l'étude de l'interaction entre fils parcourus par des courants

2. Rappelons qu'en physique un postulat est construit à partir de l'expérience de façon qu'on puisse en déduire mathématiquement les résultats observés.

1.c Lien entre les charges mobiles et le champ qu'elles créent, quelle approche ?

On peut rêver de généraliser le champ créé par des charges q_i immobiles en des points M_i , calculé dans le cadre de l'électrostatique, soit

$$\vec{E}(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{\|\vec{M_i P}\|}$$

dans le cas où elles sont mobiles en y ajoutant quelques modifications.

Malheureusement la suite (voir chapitre C-XI sur le rayonnement électromagnétique) montre que le champ électromagnétique créé par des charges mobiles est d'une extrême complexité.

Il est apparu que c'est non par sommation sur les charges mobiles, mais par sommation sur des volumes élémentaires fixes³ de l'espace, contenant à tout moment des charges mobiles, que l'on peut formuler des lois simples.

Explicitons le changement de point de vue. Dans la sommation sur les charges, on individualise chaque charge et à chaque instant, l'on repère l'endroit où chacune se trouve ; à deux instants différents, la sommation porte sur les mêmes charges situées à des endroits différents. Dans la sommation sur les volumes élémentaires, à chaque instant, l'on calcule la charge de chaque volume élémentaire et l'élément de courant qui lui correspond ; à deux instants différents, la sommation porte sur les mêmes volumes qui contiennent une charge totale et un courant total différents car des charges élémentaires y sont entrées et d'autres en sont sorties.

Avant d'aller plus loin, effectuons quelques rappels sur les charges et courants.

1.d Charges et courants.

On ne fait ici que rappeler, sans développement, ce qui a déjà été présenté dans les chapitres C-I et C-III consacrés à l'électrostatique et à la magnétostatique.

Si un élément de volume $d\Omega$ infiniment petit, centré sur le point M , contient, à l'instant t , une charge élémentaire $\sum_i q_i$ et un élément de courant $\sum_i q_i \vec{v}_i$, on définit la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ et le vecteur densité de courant $\vec{j}(M, t)$ par :

$$\rho(M, t) = \frac{\sum_i q_i}{d\Omega} \quad \vec{j}(M, t) = \frac{\sum_i q_i \vec{v}_i}{d\Omega}$$

Remarque (rappel de prudence) : il y a en pratique toujours plusieurs porteurs de charge, électrons et ions métalliques d'un métal, anions et cations d'une solution ionique,

3. On retrouve la distinction entre point de vue lagrangien (ou particulaire) et point de vue eulérien (ou local) qui est essentiel en mécanique des fluides.

etc. et il faut présenter les grandeurs précédentes comme somme des contributions de différentes espèces. En effet, en se plaçant dans le cas de deux espèces notées α et β et donc avec $\rho = \rho_\alpha + \rho_\beta$ et $\vec{j} = \vec{j}_\alpha + \vec{j}_\beta$, il sera licite de définir des vitesses locales moyennes (vis à vis de l'agitation thermique) par espèce en posant $\vec{j}_\alpha = \rho_\alpha \vec{v}_\alpha$ et $\vec{j}_\beta = \rho_\beta \vec{v}_\beta$ alors que la définition globale $\vec{j} = \rho \vec{v}$ posera problème dans le cas extrêmement fréquent où ρ est nul et $\vec{j}$ non nul.

Rappelons aussi que la conservation de la charge se traduit localement par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

Signalons enfin le cas où les charges mobiles se trouvent confinées sur la surface d'un corps (un métal par exemple) auquel cas les charges et courants élémentaires sont surfaciques sur une aire dS et l'on pose alors :

$$\sigma(M, t) = \frac{\sum_i q_i}{dS} \quad \vec{i}_S(M, t) = \frac{\sum_i q_i \vec{v}_i}{dS}$$

et celui où les charges mobiles se trouvent confinées sur une courbe de section négligeable (un circuit filiforme par exemple) auquel cas les charges et courants élémentaires sont linéiques sur un segment $d\vec{l}$ de longueur dl et l'on pose alors :

$$\lambda(M, t) = \frac{\sum_i q_i}{dl} \quad \sum_i q_i \vec{v}_i = I d\vec{l}$$

1.e Compléments sur la force de Lorentz.

La force de LORENTZ totale exercée sur les charges d'un volume infiniment petit $d\Omega$ est donc :

$$d\vec{F} = \sum_i q_i \left(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B} \right) = \left(\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \right) d\Omega$$

d'où une force volumique :

$$\vec{F}_v = \frac{d\vec{F}}{d\Omega} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

qui se réduit la plupart du temps au second terme car, en général, la matière est électriquement neutre même à des échelles très petites. Cette force volumique sera très utile en magnéto-hydrodynamique, dans les moteurs à courants de FOUCAULT, etc.

De même la puissance de cette force est, en remarquant un produit mixte nul car on y trouve deux fois le même vecteur :

$$\mathcal{P} = \sum_i q_i \left(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v}_i = \sum_i q_i \left[\vec{E} \cdot \vec{v}_i + \left(\vec{v}_i \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v}_i \right] = \sum_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\Omega$$

d'où une puissance volumique :

$$\mathcal{P}_v = \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

qui sera utile dans les mêmes contextes.

2 Les équations de Maxwell.

2.a La genèse.

Quand, en 1864, MAXWELL cherche à unifier les lois de l'électromagnétisme, comme l'incite la découverte de l'induction en 1831 par FARADAY, qui met en évidence un couplage entre magnétisme et électrocinétique, il a à sa connaissance une série de lois disparates : en électrostatique, la loi de COULOMB et sa conséquence le théorème de GAUSS, en magnéto-statique, la formule de BIOT et SAVART, le théorème d'AMPÈRE et la loi du flux conservatif et enfin, pour l'induction, la loi de FARADAY.

La première chose dont il prenne conscience est que ces lois sont incompatibles. Je choisis pour cet exposé un exemple simple sans prétendre que ce soit un de ceux utilisés par MAXWELL mais en assurant le lecteur qu'il est dans l'esprit de ceux-ci.

Considérons un fil rectiligne infini confondu avec l'axe Oz et parcouru par un courant continu d'intensité I . On veut calculer le champ magnétique en un point P à la distance r du fil et à la cote z . Les conditions habituelles de symétrie montrent que ce champ est orthoradial et ne dépend que de r . On peut alors le calculer soit par la formule de BIOT et SAVART, soit par le théorème d'AMPÈRE appliqué à un cercle d'axe le fil, de rayon r , à la cote z auquel on associe pour l'intensité enlacée le disque dont il est le bord ; on trouve bien sûr le même résultat.

Comme expérience de pensée, supprimons⁴ de ce fil, sans en changer l'intensité une portion entre les cotes $-a$ et a et supposons que la cote z du point P soit supérieure à a . Par rapport à la situation précédente, la formule de BIOT et SAVART donne un résultat différent car le domaine d'intégration a changé mais, par contre le théorème d'AMPÈRE appliqué au même cercle et au même disque donne quant à lui le même résultat. Diable, dans ce contexte, les deux lois ne sont plus compatibles ! Pis encore, si nous appliquons le théorème d'AMPÈRE au même cercle mais en prenant comme surface la portion de cylindre de rayon r entre les cotes 0 et z , complétée par le disque de rayon r à la cote nulle, là où le fil a été coupé, alors le courant enlacé est nul et le théorème conduit à un champ nul, c'est-à-dire que le théorème donne des résultats différents selon le choix de la surface qui a pour contour le cercle.

Bien sûr, ce qui saute aux yeux, c'est qu'il ne s'agit plus de magnétostatique au sens strict, car si le fil parcouru par l'intensité continue I s'interrompt à la cote $-a$, correspon-

4. On n'a pas cru utile de faire une figure, le lecteur peut aisément en griffonner une sur un bout de papier.

dant à un point A , ce point accumule des charges et en choisissant correctement l'origine du temps, sa charge à l'instant t est $Q(t) = It$ et le point B de cote a porte de même la charge $-Q(t) = -It$.

Pour y voir plus clair remplaçons le trou entre A et B par un condensateur plan formé de deux disques d'axe le fil, de surface S , aux cotes $-a$ et a et l'on supposera que le point P se trouve à une distance r du fil supérieure au rayon des armatures (ce n'est pas physiquement fondamental, mais ça simplifie l'explication). Les armatures portent les densités surfaciques $\pm\sigma = \pm\frac{Q(t)}{S} = \pm\frac{It}{S}$, le champ électrique qui règne dans le condensateur est alors parallèle à l'axe, uniforme et de module (de norme) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{It}{\varepsilon_0 S}$ et l'on supposera a assez petit devant le rayon des armatures pour que le champ soit nul ailleurs. Dès lors, la seconde surface choisie dans l'application du théorème d'AMPÈRE traverse le condensateur parallèlement à ses armatures et est donc traversé par un flux électrique $\Phi_e(t) = ES = \frac{It}{\varepsilon_0}$. La remarque géniale de MAXWELL est d'avoir remarqué que $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = I$ et son idée géniale et de rajouter ce terme au théorème d'AMPÈRE pour assurer un résultat commun au calcul du champ avec les deux surfaces utilisées ci-dessus.

Le théorème modifié peut se formuler ainsi : la circulation du champ magnétique sur un circuit fermé est égale au produit de la constante μ_0 par la somme de l'intensité traversant une surface quelconque dont le contour est la courbe fermée et de la dérivée temporelle de flux électrique à travers la même surface, cette dérivée étant multipliée par la constante ε_0 .

MAXWELL n'utilise que quatre lois qui forment un ensemble cohérent, dont on peut déduire toutes les lois connues à l'époque... plus quelques autres (voir plus loin la prédiction des ondes électromagnétiques) et dont la vérification expérimentale servira à valider la théorie, ce qui est la démarche normale de la physique. Il s'agit :

- la loi du flux magnétique conservatif
- la loi de FARADAY sur l'induction
- le théorème de GAUSS supposé encore valable en dehors de l'électrostatique
- le théorème d'AMPÈRE modifié comme ci-dessus

L'analyse moderne est beaucoup plus efficace en gérant ces lois de façon locale en termes de relations entre fonctions du point et du temps ; c'est ainsi que nous les présenterons tout de suite après, mais MAXWELL ne les a jamais formulées sous cette forme.

2.b Formulation locale des équations de Maxwell.

Outre l'expression de la force de LORENTZ, les lois de l'électromagnétisme sont contenues dans les quatre équations qui suivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Les deux premières sont des propriétés intrinsèques du champ électromagnétique de composantes $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ et les deux dernières le lien entre celui-ci et les charges et courants qui le créent, par l'intermédiaire des densités $\rho(M, t)$ et $\vec{j}(M, t)$.

Remarque 1 : ε_0 et μ_0 sont des constantes qui sont liées au choix des unités⁵. Dans le système international, le choix de l'ampère comme unité d'intensité revient à choisir $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$. On verra un tout petit peu plus loin que la vitesse c de la lumière est liée à μ_0 et ε_0 par la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$; comme $c \approx 3 \cdot 10^8$ à un pour mille près, on en tire la valeur de ε_0 , cela dit c'est surtout $\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9$ qu'il faut retenir.

Remarque 2 : Des équations de MAXWELL, on tire $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$ et

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Formons la combinaison $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}$; comme les opérateurs div et $\frac{\partial}{\partial t}$ commutent et que la divergence d'un rotationnel est nulle, on trouve 0, c'est à dire que les équations de MAXWELL sont compatibles avec la conservation de la charge. En fait, sous une forme adaptée aux calculs de l'époque, c'est un autre des arguments qui ont poussé MAXWELL à ajouter le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ à la quatrième équation pour assurer cette compatibilité. Dans les expériences de l'époque, ce terme était négligeable (on verra plus loin qu'il s'agit de ce qu'on appelle le régime quasi-stationnaire) et était donc passé inaperçu. Le mérite de MAXWELL a été de montrer la nécessité logique de faire figurer ce terme en général négligeable (à l'époque).

Historiquement, le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ a été appelé *courant de déplacement*, ce qui est un choix malheureux, parce que ce n'est pas homogène à un courant mais à une densité de courant et que rien ne se déplace dans cette histoire. Cette dénomination tend à disparaître mais on n'a pas choisi d'autre.

2.c Présentation intégrale

On a expliqué plus haut que ce n'est pas sous cette forme élaborée qu'ont été énoncées les équations de MAXWELL, il s'agit ici de la présentation moderne en termes de champs, c'est-à-dire une formulation locale. Retrouvons la formulation historique faisant apparaître des intégrales de flux ou de circulation.

Partons de la troisième équation et imaginons une surface fermée Σ orientée vers l'extérieur, découpée en éléments de vecteurs surfaces $d\vec{S}$ et limitant un volume Ω découpé en éléments de volume $d\Omega$. Le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI conduit à :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} d\Omega = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

5. Voir le chapitre A-V sur l'analyse dimensionnelle.

On retrouve le théorème de GAUSS, mais valable même en régime non stationnaire, c'est-à-dire en dehors de l'électrostatique. La troisième équation de MAXWELL s'appelle donc aussi équation de MAXWELL-GAUSS.

De la même façon, la première équation, qui n'a reçu aucun nom particulier, conduit à :

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

donc $\vec{B}$ est à flux conservatif ; on rappelle les deux corollaires : les flux magnétiques à travers deux surfaces de même contour, orientées dans le même sens, sont identiques ; de même que les deux flux à travers deux sections d'un même tube de champ (voir chapitre A-IX d'analyse vectorielle).

Partons de la quatrième équation et imaginons une courbe fermée orientée Γ , découpée en éléments $d\vec{l}$ limitant une surface Σ , orientée par la règle du tire-bouchon et découpée en éléments de vecteurs surfaces $d\vec{S}$. Le théorème de STOKES conduit à :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \left[\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right] = \dots \\ &\dots = \mu_0 \left[\iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right] = \mu_0 \left[I_{\text{enlacée}} + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{\text{élec.}}}{dt} \right] \end{aligned}$$

On retrouve le théorème d'AMPÈRE sous sa forme complétée d'où le nom d'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

De la même façon, la deuxième équation conduit à :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi_{\text{magn.}}}{dt}$$

Sachant que la force électromotrice e (voir chapitre C-V sur l'électrocinétique) se définit par la circulation de $\vec{E}$, on retrouve la loi de FARADAY :

$$e = - \frac{d\Phi_{\text{magn.}}}{dt}$$

La deuxième équation de MAXWELL s'appelle donc aussi équation de MAXWELL-FARADAY. Remarquons en outre que le choix de la surface s'appuyant sur Γ est parfaitement arbitraire car $\vec{B}$ est à flux conservatif ; ceci assure une cohérence interne aux équations.

3 Potentiels

3.a Existence

Grâce au chapitre A-IX sur l'analyse vectorielle, nous savons que, puisque la divergence du champ magnétique est nulle, celui-ci est le rotationnel d'un autre champ vectoriel. On note donc :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

et l'on appelle $\vec{A}$ potentiel vecteur magnétique, abrégé en pratique en potentiel vecteur.

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Un champ de rotationnel nul est le gradient d'un champ scalaire (voir encore le chapitre A-IX) ; l'usage est de le noter négativement, soit :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

où V s'appelle potentiel scalaire électrique, abrégé en potentiel électrique.

Retenons qu'il existe deux potentiels V et $\vec{A}$ tel que :

$$\begin{cases} \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

On fera bien attention au terme $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ qui s'ajoute à $-\overrightarrow{\text{grad}} V$ en dehors de l'électrostatique.

Remarque : de la même façon que le champ électrique et le champ magnétique sont les deux composantes indissociables du champ électromagnétique, le potentiel (scalaire) électrique et le potentiel vecteur (magnétique) sont les deux composantes indissociables du potentiel électromagnétique.

3.b Non-unicité

Considérons maintenant un champ scalaire arbitraire $f(M, t)$ et formons $V_1 = V - \frac{\partial f}{\partial t}$ et $\vec{A}_1 = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f$ et calculons $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1$; comme le rotationnel d'un gradient est nul, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1 = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$$

De même, en permutant gradient et dérivée temporelle et en simplifiant :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} V_1 - \frac{\partial \overrightarrow{A_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}} f)}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = \overrightarrow{E}$$

C'est dire que les couples $(V_1, \overrightarrow{A_1})$ et $(V, \overrightarrow{A})$ définissent le même champ électromagnétique : à un champ électromagnétique donné correspondent une infinité de couples de potentiels possibles.

On profitera plus loin de cette multiplicité de couples de potentiels pour leur imposer une relation qui facilite les développements ultérieurs.

Remarque : Inversement si $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}$ et $-\overrightarrow{\text{grad}} V_1 - \frac{\partial \overrightarrow{A_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$, alors $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{A_1} - \overrightarrow{A})$ est nul ; il existe donc (cf supra) f tel que $\overrightarrow{A_1} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ d'où $\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f$ et en reportant dans l'autre relation, on aboutit à $\overrightarrow{\text{grad}} V_1 = \overrightarrow{\text{grad}} \left(V - \frac{df}{dt} \right)$ soit $V_1 = V - \frac{df}{dt}$ à une fonction du temps près qui peut être intégrée à f sans en modifier le gradient donc l'expression de $\overrightarrow{A_1}$. La conclusion est que le changement de potentiels proposé ci-dessus est le seul possible.

3.c Régimes permanents. Equations de Laplace.

Lorsque les densités de charges et de courants ne dépendent pas du temps, il en est bien sûr de même pour le champ électromagnétique. Dans ce cas, les dérivées temporelles sont nulles dans toutes les relations que nous venons de voir. Dans les équations rencontrées, il y a découplage entre relations électrostatiques :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \\ \text{div} \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \end{cases}$$

et relations magnétostatiques :

$$\begin{cases} \text{div} \overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} \end{cases}$$

En régime permanent, électrostatique et magnétostatique sont donc des domaines parfaitement indépendants.

Reportons $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ et $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}$ dans les équations de MAXWELL-GAUS et MAXWELL-AMPÈRE ; nous obtenons, grâce à l'analyse vectorielle :

$$\begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div} \overrightarrow{E} = -\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} V) = -\Delta V \\ \mu_0 \overrightarrow{j} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \overrightarrow{A}) - \Delta \overrightarrow{A} \end{cases}$$

Pour une meilleure analogie entre les résultats et parallèlement une seconde équation plus simple, nous tirerons parti de la non-unicité des potentiels pour choisir parmi tous les potentiels électromagnétiques celui qui vérifie la condition $\text{div } \vec{A} = 0$; connue sous le nom de « condition de jauge⁶ stationnaire ». Nous arrivons alors aux « équations de LAPLACE » :

$$\begin{cases} \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \\ \Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \end{cases}$$

La solution de la première est connue :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

où $d\mathcal{V}_P$ désigne un volume élémentaire centrés sur P , pour insister sur le fait que l'intégration porte sur les coordonnées du point P . Comment le démontrer ? Tout simplement parce que dans le cadre de l'électrostatique, c'est une conséquence de la loi de COULOMB, de la même façon que l'équation de LAPLACE en est une autre : historiquement, le résultat de l'équation était connu avant qu'on formulât celle-ci ; ça aide bien.

Les trois projections de la seconde équation, qui est vectorielle, sont formellement identiques à la première, on en connaît donc les solutions par analogie que l'on peut regrouper aisément en une intégrale vectorielle :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

On en déduit assez simplement les champs correspondant, pourvu que l'on ne mélange pas les coordonnées de M et celle de P et l'on écrira $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V(M)$ ainsi que $\vec{B}(M) = \overrightarrow{\text{rot}}_M \vec{A}(M)$ en mettant en indice aux opérateurs gradient et rotationnel le point dont les coordonnées servent aux dérivation partielles. En permutant⁷ dérivation par rapport à M et intégration par rapport à P , on a :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}_M \iiint \frac{\rho(P)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\rho(P)}{\|\vec{PM}\|} \right) d\mathcal{V}_P$$

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{\text{rot}}_M \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}}_M \iiint \frac{\vec{j}(P)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \overrightarrow{\text{rot}}_M \left(\frac{\vec{j}(P)}{\|\vec{PM}\|} \right) d\mathcal{V}_P$$

Notons très provisoirement $a = \frac{1}{\|\vec{PM}\|}$, l'analyse vectorielle permet d'écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_M [a \rho(P)] = a \overrightarrow{\text{grad}}_M \rho(P) + \rho(P) \overrightarrow{\text{grad}}_M a = \rho(P) \overrightarrow{\text{grad}}_M a$$

6. Comme beaucoup de termes physiques, le choix du mot « jauge » relève de la fantaisie de son inventeur, en l'occurrence le mathématicien et physicien Hermann Weyl en 1918.

7. En fait cette permutation n'est pas licite pour des raisons qui seront évoquées à l'occasion de l'étude des potentiels retardés. On montrera alors comment raisonner proprement mais comme ça alourdirait ici l'exposé sans changer le résultat, on s'est permis de faire l'impasse.

$$\overrightarrow{\text{rot}}_M[a \overrightarrow{j}(P)] = a \overrightarrow{\text{rot}}_M \overrightarrow{j}(P) + \overrightarrow{\text{grad}}_M a \wedge \overrightarrow{j}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}_M a \wedge \overrightarrow{j}(P)$$

où le gradient ou rotationnel par rapport à M d'une fonction de P est nul. Par ailleurs, il est connu (calcul aisé) que $\overrightarrow{\text{grad}}_M a = \overrightarrow{\text{grad}}_M \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} = -\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$, d'où, en tenant compte de l'anti-commutativité du produit vectoriel :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P) \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dV_P$$

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\overrightarrow{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} dV_P$$

Les équations de LAPLACE permettent donc de retrouver tous les résultats historiques des calculs de champs et de potentiels électriques et magnétiques.

Remarque 1 : en régime permanent, l'équation de conservation de la charge devient $\text{div} \overrightarrow{j} = 0$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{j}$ est à flux conservatif. Comme un fil électrique canalise le courant et fait donc office de tube de champ (on dit aussi ici tube de courant), le flux de $\overrightarrow{j}$ (l'intensité électrique, bien sûr) est identique en tous les points du circuit. Certes on le sait depuis longtemps, mais c'en est la justification profonde.

Remarque 2 : on peut avoir un scrupule car le potentiel-vecteur obtenu doit vérifier la condition de jauge stationnaire $\text{div} \overrightarrow{A} = 0$. On a :

$$\text{div}_M \overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{div}_M \iiint \frac{\overrightarrow{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|} dV_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \text{div}_M \left(\frac{\overrightarrow{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|} \right) dV_P$$

puis, avec les notations précédentes et pour les mêmes raisons :

$$\text{div}_M(a \overrightarrow{j}(P)) = a \text{div}_M \overrightarrow{j}(P) + \overrightarrow{\text{grad}}_M a \cdot \overrightarrow{j}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}_M a \cdot \overrightarrow{j}(P)$$

mais aussi

$$\text{div}_P(a \overrightarrow{j}(P)) = a \text{div}_P \overrightarrow{j}(P) + \overrightarrow{\text{grad}}_P a \cdot \overrightarrow{j}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}_P a \cdot \overrightarrow{j}(P)$$

car $\text{div} \overrightarrow{j} = 0$ (voir remarque 1). Avec $\overrightarrow{\text{grad}}_P \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|} = -\frac{\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = -\overrightarrow{\text{grad}}_M \frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|}$, on a donc $\text{div}_M(a \overrightarrow{j}(P)) = -\text{div}_P(a \overrightarrow{j}(P))$, ce qui permet après report dans l'intégrale d'utiliser le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI :

$$\text{div}_M \overrightarrow{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \text{div}_P \left(\frac{\overrightarrow{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|} \right) dV_P = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\overrightarrow{j}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|} \cdot d\Sigma$$

où Σ est la surface du domaine d'intégration qui est ici l'espace entier, donc la sphère de rayon infini. Dans tout les problèmes que l'on rencontre en pratique, les courants sont localisés dans un domaine fini et il n'y en a pas à l'infini ; le champ à intégrer sur la sphère de rayon infini est donc nul, ce qui assure $\text{div} \overrightarrow{A} = 0$. Nous respirons !

3.d Equations de Poisson.

Revenons au cas général où les deux premières équations de MAXWELL, $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ont permis d'introduire des potentiels V et $\vec{A}$ tels que $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ et $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; reportons ces dernières expressions dans les deux dernières équations de Maxwell (on regroupe tout dans le second membre) :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \text{div} \left(-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \dots \\ &\dots = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \text{div} (\vec{\text{grad}} V) + \text{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \Delta V + \frac{\partial(\text{div } \vec{A})}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \dots \\ &\dots = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\text{grad}} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) + \Delta \vec{A} = \dots \\ &\dots = \mu_0 \vec{j} + \Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Comme dans le paragraphe précédent, nous tirerons parti de la non-unicité des potentiels pour choisir parmi tous les potentiels électromagnétiques celui qui vérifie la condition $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ où l'on note $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$; connue sous le nom de « condition de jauge de LORENTZ ». Ce choix supprime directement des termes compliqués dans la seconde relation et permet dans la première de remplacer $\text{div } \vec{A}$ par $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$; on arrive alors aux équations de POISSON :

$$\begin{cases} \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \end{cases}$$

et l'on ne peut que pleurer de bonheur en notant la similitude entre les deux équations entre elles et avec les équations de LAPLACE.

4 Recherche de solutions dans le vide aux équations de Maxwell.

4.a Mise en équation

Dans le vide, il n'y a pas de charges donc pas de courants ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$). Les équations de Poisson deviennent alors :

$$\begin{cases} \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases}$$

où l'on reconnaît l'équation de d'ALEMBERT tridimensionnelle et le paramètre c introduit plus haut comme simple notation s'identifie à la vitesse de propagation.

Par ailleurs, les équations de MAXWELL sont, en utilisant $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Prenons le rotationnel membre à membre de la deuxième équation ; grâce aux formules d'analyse vectorielle (voir le chapitre qui lui est consacré), on tire :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B})$$

puis grâce aux troisième et quatrième équations :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

De la même façon, le rotationnel de la quatrième équation conduit à :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E})$$

puis grâce aux première et deuxième équations :

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

donc les deux champs et les deux potentiels vérifient l'équation de propagation dite aussi équation de D'ALEMBERT. En pratique, dans ce contexte du vide, les potentiels électromagnétiques s'avèrent de peu d'intérêt.

4.b Ondes planes progressives sinusoïdales

• Nature de ces ondes.

Le chapitre D-II de ce cours est consacré aux solutions de l'équation de propagation (voir physique vibratoire et ondulatoire) dans tous les contextes possibles ou presque. On y renvoie le lecteur et nous nous contenterons d'en reprendre les résultats principaux sans démonstration. Du reste, nous ne nous appesantirons pas trop là-dessus car c'est somme toute mineur dans la dynamique de ce chapitre.

Les solutions les plus intéressantes sont celles pour lesquelles, avec un choix judicieux des axes, les champs ne dépendent que de l'abscisse x et du temps t ; on les appelle ondes planes car dans les surfaces d'équation $x = Cte$, les champs sont uniformes à un instant donné. L'équation pour le champ électrique devient alors :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

et il en est bien sûr de même pour le champ magnétique. De plus, sachant ce qu'est la dérivée d'un vecteur, chacune des composantes des deux champs, par exemple E_x vérifie :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Comme solutions, on retrouvera les ondes stationnaires et les ondes progressives, sinusoïdales ou non; mais on sait aussi que toutes ces solutions peuvent être considérées comme somme d'ondes progressives sinusoïdales. Ce sont donc celles-ci qu'on étudiera ici, par exemple, on aura : $E_x = E_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ avec $k = \omega/c$ ou encore en notation complexe : $\underline{E}_x = \underline{E}_1 \exp j(\omega t - kx)$ avec $\underline{E}_1 = E_1 \exp(j\varphi_1)$ ou encore en introduisant le vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{e}_x = (\omega/c) \vec{e}_x$: $\underline{E}_x = \underline{E}_1 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})$

• Structure de l'onde plane progressive sinusoïdale

A ce stade les équations de MAXWELL n'ont pas encore livré toutes leurs conséquences. Remarquons d'abord qu'en notation complexe, pour une onde en $\exp j(\omega t - kx)$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ peuvent se remplacer respectivement par $j\omega$, $-jk$, 0 et 0 et donc le vecteur symbolique $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x})\vec{e}_x + (\frac{\partial}{\partial y})\vec{e}_y + (\frac{\partial}{\partial z})\vec{e}_z$ par $-jk\vec{e}_x = -j\vec{k}$ et donc les opérateurs $\text{div} = \vec{\nabla} \cdot$ et $\text{rot} = \vec{\nabla} \wedge$ par $-j\vec{k} \cdot$ et $-j\vec{k} \wedge$

Considérons le champ :

$$\underline{\vec{E}} = \begin{vmatrix} \underline{E}_1 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

L'équation $\text{div } \vec{E} = 0$ donne $-j \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ soit $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ avec

$$\vec{k} = \begin{vmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

donc $k \underline{E}_1 \exp j(\omega t - k x) = 0$ soit $\underline{E}_1 = 0$. Le champ n'a donc pas de composante dans la direction de propagation ; rappelons qu'on qualifie une telle onde de transversale. La forme la plus générale du champ d'une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale est donc :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - k x) \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - k x) \end{vmatrix}$$

Et, puisque $\text{div } \vec{B} = 0$, il en est de même pour le champ magnétique.

L'équation $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne $-j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j \omega \vec{B}$ soit, après simplification :

$$\begin{vmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - k x) \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - k x) \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{B}_2 \exp j(\omega t - k x) \\ \underline{B}_3 \exp j(\omega t - k x) \end{vmatrix}$$

On en tire (avec $k = \omega/c$) :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \underline{B}_2 \exp j(\omega t - k x) \\ \underline{B}_3 \exp j(\omega t - k x) \end{vmatrix} = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} 0 \\ -\underline{E}_3 \exp j(\omega t - k x) \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - k x) \end{vmatrix}$$

qu'on peut aussi écrire vectoriellement :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E}$$

On en déduit que dans le plan Oyz on passe du champ électrique au champ magnétique par une similitude d'angle $\pi/2$ et de rapport $1/c$.

Une onde plane progressive non sinusoïdale est somme d'ondes sinusoïdales ; pour chacun des termes de la somme, la propriété précédente est vrai ; il en est donc de même⁸ pour la somme. Retenons donc que c'est vrai pour toute onde plane progressive dans le vide.

Remarque : la quatrième équation, traitée comme les trois autres, ne permettrait rien de plus que retrouver $k = \omega/c$

8. sauf toutefois en présence de champs stationnaires que l'on traitera à part.

• Polarisation des ondes transversales

Revenons aux notations réelles, le champ électrique est :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ E_2 \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \\ E_3 \cos(\omega t - kx + \varphi_3) \end{vmatrix}$$

Plaçons nous en une abscisse x donnée ; en changeant l'origine des temps, on arrive aisément à quelque chose du type :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ E_2 \cos(\omega t) \\ E_3 \cos(\omega t + \varphi) \end{vmatrix}$$

Si nous traçons sur un schéma l'ensemble des extrémités du champ électrique (à partir d'une origine commune) en un point donné et à des instants variables (ou l'inverse), on obtient une ellipse. Inutile de faire de longs calculs puisqu'on retrouve le résultat classique d'un oscilloscope avec deux signaux déphasés sur les deux voies et placé en mode X-Y. On dit que l'onde est polarisée elliptiquement, ce qui du reste n'est pas un renseignement, puisqu'il s'agit du cas le plus général. Si, au cours du temps, l'ellipse est parcourue dans le sens positif, c'est-à-dire de Oy vers Oz , on dit qu'on a affaire à une onde elliptique directe (naguère, on disait gauche) sinon il s'agit d'une polarisation elliptique indirecte (ou droite).

Un premier cas particulier est celui où $\varphi = 0$ ou π et donc où l'ellipse se réduit à un segment. Bien sûr dans ce cas, on choisit Oy ou Oz parallèle à ce segment. On dit évidemment qu'on a affaire à une polarisation rectiligne. On a par exemple :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Il est important de remarquer qu'une onde de polarisation elliptique peut être considérée comme (donc se décomposer en) une somme de deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions orthogonales ; en effet :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - kx + \varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E}_3 \exp j(\omega t - kx + \varphi) \end{vmatrix}$$

Un autre cas particulier est celui où $\varphi = \pm \pi/2$ et $|\underline{E}_2| = |\underline{E}_3|$ et où donc l'ellipse se réduit à un cercle. On dit qu'on a affaire selon le sens de rotation (cf supra) à une polarisation circulaire directe (on dit encore gauche) ou bien indirecte (on dit encore droite). Avec $\exp(j\pi/2) = j$, on a :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \\ \pm j \underline{E}_2 \exp j(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

ou encore en notation réelle avec un choix convenable de l'origine des temps :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \cos(\omega t - k x) \\ \pm E_2 \sin(\omega t - k x) \end{pmatrix}$$

Là aussi, il est important de remarquer qu'une onde polarisée rectilignement est somme de deux ondes polarisées circulairement et tournant en sens inverse ; en effet (en notation réelles, car le couple cos-sin met bien en évidence le cercle) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - k x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 E_0 \cos(\omega t - k x) \\ 1/2 E_0 \sin(\omega t - k x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 E_0 \cos(\omega t - k x) \\ -1/2 E_0 \sin(\omega t - k x) \end{pmatrix}$$

On en déduit aisément que toute onde polarisée elliptiquement se décompose en deux circulaires.

4.c Génération des ondes.

Tout d'abord, on ne s'étonnera pas qu'une onde puisse se propager en l'absence de charges et de courants. Une onde est effectivement générée par charges et courants mais peut se propager loin de l'endroit où elle est née, de même que les ronds dans l'eau s'éloignent du caillou qu'on a jeté. Dans le chapitre C-XI consacré au rayonnement électromagnétique, on étudiera cette génération d'onde.

4.d Aspects historiques et contemporains.

L'ajout d'un terme correctif dans les équations de l'électromagnétisme par MAXWELL en 1864 a donc permis de prédire la possibilité d'ondes électromagnétiques, ondes qui furent produites vingt ans plus tard par HERTZ ; c'est ainsi que progresse la physique par d'incessants allers-retours entre expérience et théorie.

Les applications de ce chapitre dans le monde actuel sautent aux yeux : nous vivons dans un monde de télécommunications : radio, télévision, téléphonie mobile, localisation par GPS, communications entre ordinateurs par Bluetooth ou WiFi, etc. qui relèvent toutes de la modulation d'ondes porteuses se propageant dans l'air (qui a, en bonne approximation, les mêmes propriétés que le vide).

4.e Ondes sphériques progressives.

Signalons aussi, car ce sera important pour la suite, la possibilité (développée dans le chapitre D-II consacré aux solutions de l'équation de propagation) d'ondes sphériques

progressives, plus simples pour les champs (au sens mathématique de fonction du point et du temps) scalaires comme le potentiel électrique. En particulier, toute fonction

$$V(r, t) = \frac{A}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

où $r = \|\vec{OM}\|$ (O est un centre de symétrie du problème), A une constante et f une fonction quelconque⁹, est solution de l'équation de D'ALEMBERT.

5 Solutions des équations de Poisson.

5.a Approche intuitive : formules des potentiels retardés.

On cherche à résoudre

$$\Delta V(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0} = 0$$

Commençons par quelques cas simples et fions-nous à notre intuition. S'il n'y a qu'une charge ponctuelle q constante et immobile en un point P , l'électrostatique classique nous apprend que la solution est :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\|\vec{PM}\|}$$

Si la charge est toujours immobile en P mais dépend du temps (on la note $q(t)$), la solution doit avoir la symétrie sphérique de centre P et puisqu'on est dans le vide, sauf au point P , on peut utiliser le résultat du paragraphe précédent et l'on s'attend donc à une solution de la forme :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{f\left(t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|}$$

Certes, une charge isolée et non constante n'est pas physiquement acceptable (non-conservation de la charge), mais on est ici dans une étape d'une démarche purement mathématique.

Ce dernier résultat doit redonner l'avant-dernier dans le cas particulier où $q(t)$ est constant ce qui nous oblige à choisir :

$$f\left(t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right) = q\left(t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)$$

9. deux fois dérivable quand même.

où $\frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}$ sera interprété comme retard de propagation entre P et M .

Une autre solution serait

$$f\left(t - \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right) = q\left(t - \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c} - t_0\right)$$

avec t_0 constante arbitraire, mais elle interdirait cette interprétation qui semble pertinente, c'est pourquoi on la rejette.

Un autre solution encore pourrait être en

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{f\left(t + \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right)}{\|\overrightarrow{PM}\|}$$

mais le potentiel en M serait en avance sur ce qui se passe en P , ce qui remettrait en cause le principe de causalité, on le rejette donc aussi.

Remplaçons la charge ponctuelle $q(t)$ par un volume infiniment petit, indéformable, centré sur P , de volume constant $d\mathcal{V}_P$ et de densité volumique de charge $\rho(P, t)$ donc de charge $q(t) = \rho(P, t) d\mathcal{V}_P$. Puisqu'il est quasiment ponctuel, on peut reprendre le résultat précédent en l'adaptant au contexte, soit :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right)}{\|\overrightarrow{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

Enfin dans le cas d'une distribution de charges quelconque, on la considère comme somme de distributions formée chacune d'un seul volume élémentaire chargé et reconstituant l'espace entier. L'équation différentielle en V étant linéaire, on sait alors que sa solution est somme des solutions correspondant aux distributions élémentaires, soit puisqu'il s'agit d'une démarche qui définit l'intégration :

$$V(M, t) = \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right)}{\|\overrightarrow{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

Par la même analogie que celle utilisée pour les solutions de l'équation de LAPLACE, on peut alors affirmer que la solution de l'équation :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

est :

$$\vec{A}(M, t) = \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

Ces deux formules sont connues sous le nom de « formules des potentiels retardés ».

Attention toutefois, rien ne permet d'affirmer qu'il y ait des formules de cette nature pour les champs électrique et magnétique et en fait il n'en est rien ; une fois calculés les potentiels par intégration, on en déduira les champs à partir de ceux-ci. Cette étape du calcul sera développée dans le chapitre C-XI traitant du rayonnement électromagnétique.

5.b Validité de la solution des des potentiels retardés.

Animé d'un doute sur la validité du raisonnement intuitif qui précède, on peut se rassurer en reportant

$$V(M, t) = \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

dans l'équation de POISSON $\square V = \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (on utilise la notation $\square$ pour $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ appelée « d'Alembertien »).

Bien sûr, on pense permuter les dérivations par rapport au point M (on notera $\square_M$ pour insister) et l'intégration par rapport au point P , soit

$$\square V = \square_M \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P = \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \square_M \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

mais cette permutation n'est pas licite pour deux raisons, la première est que le domaine d'intégration est infini, la seconde est que la fonction à intégrer n'est pas définie si le point P d'intégration prend la valeur M à cause du $\frac{1}{\|\vec{PM}\|}$, heureusement du reste car la suite montrera que l'on obtiendrait un résultat nul au lieu de $-\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

La réponse au premier obstacle est physique. On peut supposer un univers fini ce qui supprime le problème ; on peut aussi supposer un univers non éternel d'âge T car au delà d'une sphère de centre M et de rayon cT , le retard de propagation est supérieur à l'âge de l'univers est la valeur retardée de ρ est alors nulle.

La réponse au second obstacle consiste à scinder l'espace en deux zones, la première est l'intérieur d'une sphère de centre M et de rayon a suffisamment petit pour que d'une part $\rho(P, t)$ puisse être confondu avec $\rho(M, t)$ (variations spatiales négligeables) et d'autre part $\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)$ avec $\rho(P, t)$ (variations temporelles négligeables pour un retard maximal

de $\frac{a}{c}$) et la seconde zone l'extérieur de cette sphère. Dans la première zone, on ne peut pas permuter d'Alembertien et intégration mais la charge volumique à intégrer est considérée comme constante et dans la seconde la permutation est licite.

Dans la seconde zone, on doit à calculer $\square_M \frac{\rho(P, t - \frac{r}{c})}{r}$ où $r = \|\overrightarrow{PM}\|$; procédons par étapes. On a

$$\frac{\partial}{\partial x_M} \left[\frac{1}{r} \rho \left(P, t - \frac{r}{c} \right) \right] = \left[-\frac{1}{r^2} \rho \left(P, t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \dot{\rho} \left(P, t - \frac{r}{c} \right) \left(-\frac{1}{c} \right) \right] \frac{\partial r}{\partial x_M}$$

où $\dot{\rho}$ est la dérivée temporelle de ρ ; par ailleurs on a :

$$r = [(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2]^{\frac{1}{2}}$$

d'où $\frac{\partial r}{\partial x_M} = \frac{1}{2} [(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2]^{-\frac{1}{2}} [2(x_M - x_P)] = \frac{(x_M - x_P)}{r}$ et, en notant ρ^* pour $\rho(P, t - \frac{r}{c})$ et analogues :

$$\frac{\partial}{\partial x_M} \left(\frac{1}{r} \rho^* \right) = \left[-\frac{1}{r^2} \rho^* - \frac{1}{c r} \dot{\rho}^* \right] \frac{(x_M - x_P)}{r} = \left[-\frac{1}{r^3} \rho^* - \frac{1}{c r^2} \dot{\rho}^* \right] (x_M - x_P)$$

Une seconde dérivation, en accélérant les calculs, conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_M^2} \left(\frac{1}{r} \rho^* \right) &= \left[-\frac{1}{r^3} \rho^* - \frac{1}{c r^2} \dot{\rho}^* \right] + \left[\frac{3}{r^4} \rho^* + \frac{1}{c r^3} \dot{\rho}^* + \frac{2}{c r^3} \dot{\rho}^* + \frac{1}{c^2 r^2} \ddot{\rho}^* \right] (x_M - x_P) \frac{\partial r}{\partial x_M} = \dots \\ \dots &= \left[-\frac{1}{r^3} \rho^* - \frac{1}{c r^2} \dot{\rho}^* \right] + \left[\frac{3}{r^4} \rho^* + \frac{3}{c r^3} \dot{\rho}^* + \frac{1}{c^2 r^2} \ddot{\rho}^* \right] \frac{(x_M - x_P)^2}{r} = \dots \\ \dots &= \left[-\frac{1}{r^3} \rho^* - \frac{1}{c r^2} \dot{\rho}^* \right] + \left[\frac{3}{r^5} \rho^* + \frac{3}{c r^4} \dot{\rho}^* + \frac{1}{c^2 r^3} \ddot{\rho}^* \right] (x_M - x_P)^2 \end{aligned}$$

On calcule de même $\frac{\partial^2}{\partial y_M^2} \left(\frac{1}{r} \rho^* \right)$ et $\frac{\partial^2}{\partial z_M^2} \left(\frac{1}{r} \rho^* \right)$, et par addition et avec $(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2 = r^2$, on arrive à :

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{r} \rho^* \right) &= 3 \left[-\frac{1}{r^3} \rho^* - \frac{1}{c r^2} \dot{\rho}^* \right] + \left[\frac{3}{r^5} \rho^* + \frac{3}{c r^4} \dot{\rho}^* + \frac{1}{c^2 r^3} \ddot{\rho}^* \right] r^2 = \dots \\ \dots &= \left[-\frac{3}{r^3} \rho^* - \frac{3}{c r^2} \dot{\rho}^* \right] + \left[\frac{3}{r^3} \rho^* + \frac{3}{c r^2} \dot{\rho}^* + \frac{1}{c^2 r} \ddot{\rho}^* \right] = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\rho}^* \end{aligned}$$

d'où, à l'évidence :

$$\square \left(\frac{1}{r} \rho^* \right) = \Delta \left(\frac{1}{r} \rho^* \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{r} \rho^* \right) = \Delta \left(\frac{1}{r} \rho^* \right) - \frac{1}{c^2 r} \ddot{\rho}^* = 0$$

La fonction à intégrer est donc nulle et la contribution de la seconde zone à l'intégrale est nulle. La permutation licite entre d'Alembertien et intégration permet donc d'affirmer :

$$\square_M \iint_{\text{extérieur}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P = 0$$

Dans la première zone, l'intérieur d'une sphère de rayon a très petit, de volume $\frac{4}{3}\pi a^3$ a une densité volumique quasiment uniforme et confondue avec $\rho(M, t)$ (cf supra) ; dans cette hypothèse, le potentiel qu'elle crée non seulement au point M mais en tout point Q de la zone (n'oublions pas qu'il va falloir dériver donc connaître le potentiel en un voisinage de M) est aisé à calculer par le théorème de GAUSS. Contentons nous de reprendre un résultat classique établi dans le chapitre C-I relatif à l'électrostatique :

$$V_{int}(Q) = \frac{\rho(M, t)}{6\varepsilon_0} (3a^2 - MQ^2)$$

Un calcul direct du laplacien en Q donne aisément (même genre de calculs que ci-dessus, en plus simple) $-\frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$ en tout point Q intérieur et en particulier en M . On a donc, en M :

$$\Delta_M \iint_{\text{intérieur}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P = -\frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$$

Par ailleurs :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V_{int}}{\partial t^2} \Big|_Q = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}(M, t)}{6\varepsilon_0} (3a^2 - MQ^2)$$

et en particulier, en M

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V_{int}}{\partial t^2} \Big|_M = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\rho}(M, t)}{2\varepsilon_0} a^2$$

qui peut être rendu négligeable en faisant tendre a vers 0, ce qui du reste rend l'approximation utilisée d'autant plus valable. D'où, par addition :

$$\square_M \iint_{\text{intérieur}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P = -\frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$$

enfin l'addition des contributions des deux zones aboutit bien à :

$$\square_M \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P + \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0} = 0$$

La formules des potentiels retardés est donc bien solution de l'équation de POISSON. Nous voilà rassurés.

Enfin presque, comme pour les équations de LAPLACE qui ne sont valables qu'avec le choix de la jauge stationnaire, celles de POISSON ne le sont qu'avec celui de la jauge de LORENTZ. Il reste à vérifier que les potentiels retardés la vérifient. Je l'ai fait ¹⁰ sur le papier avec le même découpage de l'espace en deux zones pour les mêmes raisons, le même genre de calculs que ci-dessus et que dans la vérification que les potentiels statiques vérifient la jauge stationnaire, en plus long et plus minutieux et avec enfin l'utilisation de la formulation locale de la conservation de la charge. Je ne reproduis pas ici les six pages de calculs, mes lecteurs fuiraient. J'ose croire qu'ils me feront confiance.

6 Approximation des régimes quasi-stationnaires

6.a Définition et conséquences

L'approximation des régimes quasi-stationnaires se définit ainsi : les champs ont, en bonne approximation, la même valeur que si l'équation de MAXWELL-AMPÈRE s'écrivait sous sa première forme historique, avant la correction de MAXWELL, soit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$$

Si nous prenons la divergence membre à membre de cette relation et puisque la divergence d'un rotationnel est nulle, on en déduit que $\overrightarrow{j}$ est à divergence nulle ; là encore la conséquence est que l'intensité est la même en tout point d'un circuit à un instant donné (cf régimes permanents).

Les deux premières équations de MAXWELL, $\text{div} \overrightarrow{B} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ permettent encore d'introduire des potentiels V et $\overrightarrow{A}$ tels que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$; reportons ces dernières expressions dans les deux dernières équations de Maxwell dans notre hypothèse de travail (on regroupe tout dans le second membre) :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \text{div} \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right) = \dots \\ &\dots = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} V) + \text{div} \left(\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \Delta V + \frac{\partial (\text{div} \overrightarrow{A})}{\partial t} \\ \overrightarrow{0} &= \mu_0 \overrightarrow{j} - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}) = \mu_0 \overrightarrow{j} - \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \overrightarrow{A}) + \Delta \overrightarrow{A} \end{aligned}$$

Pour simplifier les équations ici, on choisit parmi tous les potentiels électromagnétiques celui qui vérifie la condition de jauge stationnaire $\text{div} \overrightarrow{A} = 0$ et l'on retrouve alors

10. Comme dans le sketch-culte de Pierre Dac et Francis Blanche, « C'est fantastique, il peut le faire ».

aux équations de LAPLACE :

$$\begin{cases} \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \\ \Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \end{cases}$$

à ceci près qu'elles ne portent pas sur des fonctions du point M uniquement comme dans les régimes permanents, mais sur des fonctions de point M et du temps t . Il en résulte que, puisqu'aucune dérivée temporelle n'apparaît, le temps se comporte comme un simple paramètre dans les équations donc dans leurs solutions ; comprenons par là dans les solutions du régime permanent, il suffit de remplacer $\rho(P)$ par $\rho(P, t)$ et $\vec{j}(P)$ par $\vec{j}(P, t)$, d'où :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(P, t)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P, t)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

On en déduira avec les mêmes calculs que pour les régimes permanents que :

$$-\vec{\text{grad}}_M V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(P, t) \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} d\mathcal{V}_P$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{\text{rot}}_M \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P, t) \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} d\mathcal{V}_P$$

mais attention : la première relation ne donne pas $\vec{E}(M, t)$ car ce champ doit être calculé par $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Remarquons qu'on retrouve les lois de la magnétostatique : $\text{div } \vec{B} = 0$, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$, $\text{div } \vec{A} = 0$ et l'expression intégrale de $\vec{A}$ et celle de $\vec{B}$ (formule de BIOT et SAVART)

En particulier la formule de BIOT et SAVART reste valable à un instant donné ; par exemple le lien entre intensité et champ magnétique dans un solénoïde est le même en continu et en quasi-stationnaire.

Par contre, les lois de l'électrostatique ne sont plus valables et la situation relève de l'induction magnétique (voir le chapitre C-VII qui lui est consacré) par le terme $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ dans l'expression de $\vec{E}$ ou de $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dans l'expression de $\vec{\text{rot}} \vec{E}$; certes l'expression du potentiel électrique reste valable mais, dans un contexte d'induction, son rôle est tout à fait marginal.

6.b Critère de validité

Par chance, il y a un moyen très simple de savoir *a priori* si l'on est ou non dans le cadre de l'approximation : il suffit, par exemple, que le remplacement de I par $I(t)$ dans la formule

de BIOT et SAVART (solution approchée) ne soit pas incompatible avec le fait qu'il doit y figurer $t - r/c$ au lieu de t (potentiels retardés, soit la solution exacte), donc il suffit que r/c soit négligeable. Négligeable, oui mais... devant quoi? Par exemple en sinusoïdal devant la période T , donc que $r = \|\overrightarrow{MP}\|$ soit négligeable devant $cT = \lambda$, en réintroduisant une notion de physique des phénomènes propagatifs sinusoïdaux. M désignant un des points où se trouve charges ou courants et P un des points où l'on calcule les champs, ceci n'est possible que si l'on renonce à calculer les champs dans tout l'espace (r pourrait alors être arbitrairement grand) pour se limiter à un laboratoire, voire une paillasse où l'on trouve à la fois les points M et les points P

Par exemple, pour une paillasse de plus grande dimension $r_{max} = 3\text{ m}$; on doit avoir $cT \gg r_{max}$, soit avec $c = 3.10^8\text{ m.s}^{-1}$, $T \gg 10^{-8}\text{ s}$, disons $T > 10^{-6}\text{ s}$ soit encore $f < 10^6\text{ Hz} = 1\text{ MHz}$. Il se trouve que les générateurs basse-fréquence des laboratoires d'enseignement ne montent justement pas beaucoup plus haut que 1 MHz, on est donc alors dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire. Tant mieux!

6.c Le piège de la présentation.

L'hypothèse des régimes quasi-permanents revient à remplacer $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right)$ par $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$, il est tentant de la formuler en disant que $\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ est négligeable devant $\overrightarrow{j}$ puis de mener l'étude ci-dessus. On en déduira la validité de la formule de BIOT et SAVART et l'on prendra comme exemple qu'à l'extérieur d'un fil rectiligne infini parcouru par le courant uniforme $I(t)$, le champ magnétique, à une distance r du fil est orthoradial et de valeur $\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$. Bien!

Mais à l'extérieur du fil, la densité de courant $\overrightarrow{j}$ est nulle et $\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ n'est donc pas négligeable devant $\overrightarrow{j}$; c'est contraire à l'hypothèse de départ et voilà pourquoi il faut se contenter de la définition un peu floue qui précède.

Une autre option est de définir ce régime comme celui où les retards de propagation sont négligeables mais il sera moins facile mais non impossible de remonter à $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$.

Une autre option est de partir de $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ et de considérer la vitesse de la lumière comme infinie, ou les propagations instantanées. Toutefois, la relation $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ ne pourra plus être valable. Certes la disparition du terme $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ supprime la possibilité des ondes électromagnétiques et la pertinence de cette relation, mais le soulagement est de courte durée : supposer la vitesse de la lumière infinie empêche donc la possibilité d'onde électromagnétique, donc de lumière ce qui n'est guère cohérent.

Restons donc modeste : l'approximation des régimes quasi-permanents est une approximation bien pratique mais dont les fondements théoriques restent un peu bancals.

7 Aspects énergétiques.

7.a Remarques préalables.

Effectuons les trois remarques suivantes.

- **Energie volumique électrique.**

Considérons un condensateur chargé : entre ses plaques règne un champ électrique et en même temps, il accumule une énergie $\frac{1}{2} C U^2$; il n'est pas insensé de supposer que là où règne un champ électrique, il y a de l'énergie.

Supposons connus les grands classiques de l'électrostatique (voir chapitre C-II consacré aux conducteurs à l'équilibre) et plaçons nous dans le cas simple d'un condensateur plan de surface S , d'épaisseur e donc de capacité $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$. Si sa charge est Q la différence de potentiel est $U = \frac{Q}{C} = \frac{e Q}{\varepsilon_0 S}$ et son énergie :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C U^2 = (1/2) \left(\frac{\varepsilon_0 S}{e} \right) \left(\frac{e Q}{\varepsilon_0 S} \right)^2 = \frac{e Q^2}{2 \varepsilon_0 S}$$

Le champ qui règne dans le condensateur est $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$ et en éliminant Q entre les expressions de $\mathcal{E}$ et de E , on tire

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S e E^2$$

pour un volume où ce champ $\mathcal{V} = S e$ existe, d'où une énergie volumique ou densité volumique d'énergie, traditionnellement notée u_e , égale à

$$u_e = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Nous allons essayer de généraliser ce résultat obtenu dans un cas particulier.

- **Energie volumique magnétique.**

Considérons un solénoïde parcouru par un courant : il y règne un champ magnétique et en même temps, il accumule une énergie $\frac{1}{2} L I^2$; il n'est pas insensé de supposer que là où règne un champ magnétique, il y a de l'énergie.

Supposons connus les grands classiques de l'induction (voir le chapitre C-VII qui lui est consacré) et plaçons nous dans le cas simple d'un solénoïde de N spires de surface S sur une longueur ℓ , donc d'inductance $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$. S'il est parcouru par un courant I , son énergie est :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L I^2 = (1/2) \frac{\mu_0 N^2 S I^2}{\ell}$$

Le champ qui règne dans le solénoïde est $B = \frac{\mu_0 N I}{\ell}$ et en éliminant I entre les expressions de $\mathcal{E}$ et de I , on tire

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{S \ell B^2}{\mu_0}$$

pour un volume où ce champ $\mathcal{V} = S \ell$ existe, d'où une énergie volumique, traditionnellement notée u_m , égale à

$$u_m = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Nous allons essayer de généraliser ce résultat obtenu dans un cas particulier. Par ailleurs nous noterons u la somme des deux densités volumiques d'énergie u_e et u_m .

• Puissance surfacique transportée.

Supposons maintenant qu'un été radieux détourne un lecteur de mon cours et qu'il aille s'allonger longuement au soleil d'une plage de Saint-Tropez : immanquablement il sera brûlé au troisième degré au bout d'une heure de ce régime et regrettera amèrement sa lecture préférée. C'est donc que les ondes électromagnétiques émises par le soleil et qui se sont propagées dans le vide pendant cent cinquante millions de kilomètres ont transporté de l'énergie. Nous sommes donc amenés à concevoir, comme dans tout phénomène de transport, l'existence d'une densité de courant d'énergie ou puissance surfacique qu'on appellera désormais vecteur de POYNTING et qu'on notera $\vec{H}$.

7.b Bilan de conservation : l'équation de Poynting.

Si l'énergie électromagnétique se conservait, on aurait entre la densité volumique d'énergie u et $\vec{H}$ la même relation qu'entre ρ et $\vec{j}$ pour exprimer la conservation de la charge mais avons vu plus haut que le champ électromagnétique transfère aux charges une puissance volumique $\vec{j} \cdot \vec{E}$. Si nous reprenons le raisonnement standard, il faut tenir compte de cette puissance transférée aux charges donc perdue par le champ et l'on aboutit alors à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \vec{H} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Pour plus de détails sur le raisonnement, on renvoie le lecteur au chapitre A-VI « Bilans dans un volume de contrôle ».

Partons de la seule chose établie dans cette équation, à savoir $\vec{j} \cdot \vec{E}$. On tire $\vec{j}$ de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE, la seule où il figure, et on le multiplie par $\vec{E}$, d'où (on abrège) :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{E}$$

Première joie, on a fait apparaître la dérivée temporelle (le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ recherché) et l'on y retrouve la densité volumique d'énergie électrique établie dans un cas particulier et qui se généralise donc.

Où et comme faire apparaître une divergence? Ce sera en se servant de la relation d'analyse vectorielle $\text{div}(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{W} - \text{rot } \vec{W} \cdot \vec{V}$ appliquée à $\vec{V} = \vec{E}$ et $\vec{W} = \vec{B}$ et l'on arrive à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{B}$$

Deuxième joie, on a réussi à faire apparaître la divergence d'un vecteur que l'on identifiera au vecteur $\vec{H}$ recherché et il ne reste plus qu'à tirer parti de l'équation de MAXWELL-FARADAY, d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2 \right) + \text{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

qui est de la forme recherchée et qui nous offre la troisième et dernière joie, celle de retrouver la densité volumique d'énergie magnétique établie dans un cas particulier et qui se généralise donc.

On admettra donc qu'un champ électromagnétique contient une énergie volumique u et transporte une puissance surfacique par l'intermédiaire d'une densité de courant énergétique $\vec{H}$ (rappelons, cf le chapitre A-VI sur les bilans dans un volume de contrôle, que le flux de $\vec{H}$ à travers une surface sera un débit, ici d'énergie, donc une puissance). Les expressions de u et $\vec{H}$ sont :

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

Remarque : l'existence de retard dans l'interaction entre charges rend caduques les notions de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie d'un ensemble de points matériels chargés. On pourrait rétablir ces lois en ajoutant aux énergies classiques (mécaniques donc) l'énergie contenue dans le champ électromagnétique. Cela dit, ce ne sera pas une bonne idée de passer par l'énergie pour résoudre un problème de charges en interaction car ce serait ingérable.

7.c Un exemple simple : onde plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement.

Rappelons que le calcul des grandeurs énergétiques nécessite, dans ce contexte, des produits ou carrés de fonctions sinusoïdales et qu'il est dès lors indispensable de revenir aux notations réelles.

Soit une onde plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement dont les champs ont pour expression (cf supra), avec un choix judicieux des axes :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k x) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k x) \vec{e}_z$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$.

La densité volumique d'énergie est :

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} E_0^2 \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{2 \mu_0 c^2} \right) \cos^2(\omega t - k x) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - k x)$$

grâce à $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

et en moyenne dans le temps :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

Le vecteur de POYNTING est :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - k x) \vec{e}_x$$

et en moyenne dans le temps :

$$\langle \vec{H} \rangle = \frac{1}{2 \mu_0 c} E_0^2 \vec{e}_x$$

Remarque : par analogie avec $\vec{j} = \rho \vec{v}$ de tout phénomène de transport, on peut définir une vitesse de l'énergie par $\vec{H} = u \vec{V}_E$, les résultats précédents conduisent alors à $\vec{V}_E = c \vec{e}_x$, ce qui n'est guère surprenant.

• Ordres de grandeurs.

Par une journée de fort ensoleillement sous nos latitudes, le sol reçoit du soleil une puissance surfacique de 1 kW.m^{-2} , ce qui correspond à la valeur moyenne du vecteur de

POYNTING, soit en module $\frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2$; avec $2\mu_0 c = 8\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,997 \cdot 10^8 \approx 10^3$, on en déduit $E_0 \approx 1 \text{ kV.m}^{-1}$ et $B_0 = E_0/c \approx 3 \mu\text{T}$. Le champ électrique est élevé, mais aux fréquences concernées de l'ordre de 10^{15} Hz (cf optique physique, c'est sans danger car la matière n'arrive pas à « suivre » et n'absorbe pas). Le champ magnétique, lui, est bien inférieur au champ magnétique terrestre (environ $50 \mu\text{T}$)

Autre exemple : un émetteur de puissance moyenne P , si l'on suppose son émission isotrope, réparti, à une distance R cette puissance sur une sphère de surface $4\pi R^2$; à cette distance on a donc une puissance surfacique $\Pi = P/(4\pi R^2) \approx P/(10 R^2)$.

L'émetteur parisien de Radio-Classique, sur la Tour EIFFEL, a une puissance de 10 kW , au pied de la Tour, on a donc environ $\Pi = 10^{-2} \text{ W.m}^{-2}$ (d'où 3 V.m^{-1} et 10 nT); en proche banlieue, à une dizaine de kilomètres, $\Pi = 10^{-5} \text{ W.m}^{-2}$ (d'où $0,1 \text{ V.m}^{-1}$ et $0,3 \text{ nT}$).

Pour un téléphone portable (1 W) à 10 cm du cerveau, on a $\Pi = 10 \text{ W.m}^{-2}$ (d'où 100 V.m^{-1} et $0,3 \mu\text{T}$).

8 Aspects dynamiques.

8.a Bilan de conservation.

Intéressons-nous¹¹ maintenant à la quantité de mouvement; le champ électromagnétique exerce sur les charges une force volumique dont nous avons établi plus haut l'expression :

$$\vec{F}_v = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

qui est aussi la quantité de mouvement perdue par le champ par unité de volume et de temps.

Puisque la grandeur étudiée est vectorielle, on va l'étudier composante à composante et sur l'axe des x la loi de conservation doit avoir l'allure suivante :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi}_x + F_x = 0$$

et expressions analogues sur y et z . Convenons ici (pour éviter le passage par l'algèbre tensorielle) de noter (Π) une matrice 3×3 dont les colonnes soient $\vec{\Pi}_x$, $\vec{\Pi}_y$ et $\vec{\Pi}_z$ et $\text{div}(\Pi)$ un vecteur de composantes $\text{div} \vec{\Pi}_x$, $\text{div} \vec{\Pi}_y$ et $\text{div} \vec{\Pi}_z$ ainsi que $\vec{u}$ le vecteur de composantes u_x , u_y et u_z ; on pourra donc écrire vectoriellement :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{div}(\Pi) + \rho \vec{E} + \vec{j} \cdot \vec{B} = \vec{0}$$

11. Je recycle ici un article, inspiré de la « Théorie des champs » de Landau et Lipschitz, que j'ai publié en 1995 dans le « Bulletin de l'Union des Physiciens » en y essayant de rendre les choses moins abstruses que dans mes sources.

Le plus dur reste à faire : trouver des expressions plausibles pour $\vec{u}$ et (Π) . On ne change pas une équipe qui gagne : inspirons nous de la démarche suivie dans l'étude énergétique. On tire ρ et $\vec{j}$ des équations de MAXWELL-GAUSS et MAXWELL-AMPÈRE et on les multiplie respectivement par $\vec{E}$ (produit d'un vecteur par un scalaire) et $\vec{B}$ (produit vectoriel) d'où :

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = \varepsilon_0 (\text{div } \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{B} \wedge \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{B}$$

Et puis ? Le fil est tenu ; on pense à :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{B} = \frac{\partial (\vec{E} \wedge \vec{B})}{\partial t} - \vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'où en utilisant l'équation de MAXWELL-FARADAY :

$$\frac{\partial (\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})}{\partial t} + \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{E} - \varepsilon_0 (\text{div } \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{B} + \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Et puis ? Rétablissons l'analogie entre terme électrique et terme magnétique en ajoutant un terme nul déduit de $\text{div } \vec{B} = 0$, d'où en réintroduisant la force volumique $\vec{F}_v$ d'expression $\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ pour alléger l'écriture, maintenant que son expression a été exploitée :

$$\frac{\partial (\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})}{\partial t} + \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{E} - \varepsilon_0 (\text{div } \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} (\text{div } \vec{B}) \vec{B} + \vec{F}_v = \vec{0}$$

Tout le monde suit ? Le terme $\frac{\partial (\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})}{\partial t}$ est un bon candidat à l'expression de $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ et $\vec{u} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ serait une densité volumique de quantité de mouvement. Découplons les termes encore obscurs et cherchons à monter qu'il existe deux matrices telles que :

$$\text{div}(\Pi_e) = -\varepsilon_0 \left[\vec{\text{rot}} \vec{E} \wedge \vec{E} + (\text{div } \vec{E}) \vec{E} \right]$$

$$\text{div}(\Pi_m) = -\frac{1}{\mu_0} \left[\vec{\text{rot}} \vec{B} \wedge \vec{B} + (\text{div } \vec{B}) \vec{B} \right]$$

étant entendu que si l'on réussit pour la première, on déduira la seconde sans calcul par analogie. Procédons composantes à composante, là encore les deux secondes se déduiront de la première par analogie. Selon x , on voudrait avoir :

$$\text{div } \vec{\Pi}_{ex} = -\varepsilon_0 \left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) E_z - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) E_y + \left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) E_x \right]$$

et là, les choses s'arrangent de telle façon qu'on en pleure de bonheur :

$$\operatorname{div} \vec{H}_{ex} = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (-E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (-E_x E_z) \right]$$

En grillant un peu les étapes, on en déduit la matrice (Π_e) :

$$(\Pi_e) = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (-E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) & (-E_x E_y) & (-E_x E_z) \\ (-E_y E_x) & \frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2 + E_z^2) & (-E_y E_z) \\ (-E_z E_x) & (-E_z E_y) & \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2 - E_z^2) \end{pmatrix}$$

résultat que l'on va condenser en :

$$(\Pi_e) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 (Id) - \varepsilon_0 (E_i E_j)$$

où (Id) est la matrice identité et $(E_i E_j)$ est la matrice dont le terme sur la ligne i et la colonne j est $E_i E_j$, les indices i et j prenant les valeurs x, y et z .

Par analogie, on aura :

$$(\Pi_m) = \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2 (Id) - \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j)$$

et bien sûr $(\Pi) = (\Pi_e) + (\Pi_m)$

Les différentes colonnes de cette matrice gèrent le transport par le champ électromagnétique des différentes composantes de la quantité de mouvement et c'est au lecteur de visualiser la chose car, à vrai dire, seul lui peut le faire¹². Les exemples qui suivent l'y aideront.

Il est par contre plus simple à visualiser que le champ électromagnétique s'accompagne d'une densité volumique de quantité de mouvement $\vec{u} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ à qui il faudrait trouver une notation plus pertinente, par exemple $\vec{p}_{\text{vol}}$.

Remarque : comme nous l'avons dit plus haut, l'existence de retard dans l'interaction entre charges rend caduques les notions de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie d'un ensemble de points matériels chargés. On pourrait rétablir ces lois en ajoutant aux quantités de mouvement classiques (mécaniques donc) celle contenue dans le champ électromagnétique. Cela dit, ce ne sera pas non plus une bonne idée de passer par là pour résoudre un problème de charges en interaction car ce serait ingérable. L'approche par les champs créés et les forces de LORENTZ a été inventée pour cela.

12. ou, autre façon de dire les choses, moi seul je ne peux pas faire en sorte que le lecteur visualise les choses si celui-ci reste passif.

8.b Premier exemple avec une onde progressive.

Soit l'onde plane progressive sinusoïdale polarisée rectilignement étudiée plus haut et dont les champs ont pour expression :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k x) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k x) \vec{e}_z$$

La densité volumique de quantité de mouvement (indice « p ») est :

$$\vec{u}_p = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{\varepsilon_0}{c} E_0^2 \cos^2(\omega t - k x) \vec{e}_x$$

et en moyenne dans le temps :

$$\langle \vec{u}_p \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2c} E_0^2 \vec{e}_x$$

Remarque : le vecteur densité de courant énergétique (indice « $\mathcal{E}$ ») ou vecteur de POYNTING de cette onde est :

$$\vec{\Pi}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - k x) \vec{e}_x$$

et en moyenne dans le temps :

$$\langle \vec{\Pi}_{\mathcal{E}} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \varepsilon_0 E_0^2 \vec{e}_x$$

et grâce à la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on remarque enfin que $\vec{u}_p = \frac{1}{c^2} \vec{\Pi}_{\mathcal{E}}$

• Point de vue corpusculaire.

On identifie cette onde avec un vol de photons¹³ qui se propagent dans la direction de Ox avec la vitesse c et une densité particulaire (nombre de photons par unité de volume) notée n . Chaque photon a une énergie $\hbar\omega$ et une quantité de mouvement $\frac{\hbar\omega}{c} \vec{e}_x$ (voir le chapitre B-VII en mécanique relativiste).

La densité volumique de quantité de mouvement est donc tout simplement :

$$\vec{u}_p = n \frac{\hbar\omega}{c} \vec{e}_x$$

.

13. hors du charnier natal ?

La densité volumique d'énergie est $\vec{u}_{\mathcal{E}} = n \hbar \omega$ avec une vitesse de transport $c \vec{e}_x$ d'où une densité de courant (on pense au $\vec{j} = \rho \vec{v}$ des phénomènes de transport) :

$$\vec{\Pi}_{\mathcal{E}} = n \hbar \omega c \vec{e}_x$$

On retrouve le lien entre ces grandeurs : $\vec{u}_p = \frac{1}{c^2} \vec{\Pi}_{\mathcal{E}}$, ce qui nous rassure sur la validité de la notion de quantité de mouvement volumique du champ

8.c Second exemple avec une onde stationnaire.

Imaginons que l'onde précédente se réfléchisse en $x = 0$ avec un changement de signe pour le champ électrique ; l'onde réfléchie a pour champs :

$$\vec{E} = -E_0 \cos(\omega t + k x) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + k x) \vec{e}_z$$

où l'expression de $\vec{B}$ est, comme plus haut, tirée de celle de $\vec{E}$ par l'équation de MAXWELL-FARADAY. Il en résulte une onde stationnaire, somme des ondes progressives incidente et réfléchie, qu'un minimum de trigonométrie peut mettre sous la forme :

$$\vec{E} = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(k x) \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{2 E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(k x) \vec{e}_z$$

En particulier au point de réflexion, en $x = 0$, on a :

$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{B} = \frac{2 E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

La matrice (Π_e) y est donc nulle et la matrice (Π_m) y vaut donc :

$$(\Pi_m) = \frac{2 E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Un surface $d\vec{S} = dS \vec{e}_x$ perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde incidente est traversée par un quantité de mouvement par unité de temps, c'est à dire subit une force dont la composante sur x est :

$$d\vec{F}_x = \vec{\Pi}_{mx} \cdot d\vec{S}$$

où $\overrightarrow{\Pi_{mx}}$ est la première colonne de (Π_m) et analogues pour les autres composantes ; on en tire donc :

$$d\overrightarrow{F}_x = \frac{2 E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) dS$$

et les deux autres composantes nulles, une force normale à la surface donc, associée à une pression dite *pression de radiation* d'expression :

$$p_{\text{rad.}} = \frac{2 E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t)$$

de valeur moyenne :

$$\langle p_{\text{rad.}} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 E_0^2$$

Remarque¹⁴ : ce type de réflexion est typique de la réflexion d'une onde sur un « métal parfait » ; les « relations de passage » permettent alors de montrer que la surface du métal porte une charge surfacique σ nulle et une densité surfacique de courant d'expression $\vec{i}_S = \frac{2 E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_y$, qu'il en résulte une pression électromagnétique vers l'extérieur du métal (dans le sens des x décroissants donc, le sens opposé à celui de l'exposé qui précède) d'expression $p = \frac{1}{2} \sigma^2 - \frac{1}{2} \vec{i}_S^2$ qui redonne bien, au signe près comme expliqué ci-dessus, le résultat qui précède, ce qui nous rassure, là encore, sur la validité des notions développées sur le transport de quantité de mouvement.

9 En guise de conclusion : la crise du XX^e siècle.

Après les premiers succès des équations de MAXWELL, la cohérence interne, la prédiction et la réalisation d'ondes électromagnétiques, les ennuis ont commencé, mais des ennuis fructueux ; en effet, elles ont engendré deux problèmes théoriques majeurs au début du XX^e siècle et deux réponses majeures.

Le premier est lié justement aux ondes. En effet, si les équations de MAXWELL sont valables dans tous les référentiels galiléens, alors la vitesse de la lumière doit être la même ($c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$) dans tous ces référentiels, ce qui est contraire à la loi de composition des vitesses. Le chapitre B-VI de mécanique relativiste montre comment cet apparent paradoxe a conduit à la théorie de la relativité restreinte.

Le second, qui sera évoqué dans le chapitre C-XI sur le rayonnement électromagnétique montre que l'électron que l'on imaginait tourner autour du noyau doit rayonner de l'énergie donc en perdre et, en conséquence, doit spiraler et tomber sur le noyau, rendant ainsi les atomes instables. La réponse à ce paradoxe fut la construction de la mécanique quantique.

Les équations de MAXWELL ont donc un rôle charnière éminent dans l'histoire de la physique.

14. qui nécessite quelques connaissances sur le comportement des champs électromagnétiques à l'interface entre deux milieux, voir le chapitre C-XIII.