

Chapitre C-XI

Rayonnement électromagnétique.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On commence par établir la formule des potentiels retardés dans le cas d'une distribution de charges en mouvement et celle de potentiels de Liénard-Wiechert dans le cas d'une répartition discrète puis on en simplifie les expressions à grande distance et dans l'approximation non-relativiste.

On en déduit l'expression du champ électromagnétique créé par une distribution dipolaire dans la zone de rayonnement, que l'on définit, et l'on en étudie la structure ainsi que l'énergie rayonnée. On en profite pour donner des indications sur le freinage de rayonnement et la diffusion Rayleigh.

On finit par quelques exemples de cas où les approximations précédentes ne sont pas valables, essentiellement l'antenne demi-onde, les rayonnements quadrupolaire et magnétodipolaire et le champ électromagnétique créé en un point quelconque par une charge unique en mouvement.

Table des matières

C-XI Rayonnement électromagnétique.	1
1 Potentiels créés par une distribution volumique de charges.	5
2 Potentiels de Liénard-Wiechert créés par une charge ponctuelle mobile.	7
2.a Problème posé par le déplacement de la charge.	7
2.b Potentiels créés ; approche relativiste.	8
2.c Potentiels créés ; approche par les distributions.	10
3 Potentiels à grande distance d’une distribution de charges.	15
3.a Calcul des distances et des retards. Approximation dipolaire. . . .	15
3.b Application à une distribution volumique non relativiste.	16
3.c Application à une distribution discrète non relativiste.	18
4 Calculs des champs créés dans la zone de rayonnement avec l’approxi- mation dipolaire non relativiste.	19
4.a Quelques résultats utiles. Zone de rayonnement.	19
4.b Calcul des champs dans la zone de rayonnement.	21
4.c Propriétés du champ électromagnétique rayonné.	23
4.d Puissance rayonnée	24
4.e Indications sur le freinage de rayonnement.	26
4.f Diffusion Rayleigh. Ciel bleu, soleil couchant rouge, rayon vert. . .	27
5 Etude de cas complexes.	31
5.a Distribution monopolaire.	32
5.b Hors de la zone de rayonnement.	32
5.c Rayonnement d’une antenne demi-onde.	32
5.d Rayonnements quadripolaire et magnéto-dipolaire.	37

5.e	Champ électromagnétique créé par une charge en mouvement.	. . .	39
-----	---	-------	----

1 Potentiels créés par une distribution volumique de charges.

Ce point a été détaillé dans le chapitre C-VIII consacré aux équations de MAXWELL. Pour permettre une lecture autonome de ce chapitre, nous en recopions l'essentiel ici.

On cherche à résoudre

$$\Delta V(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0} = 0$$

Commençons par quelques cas simples et fions-nous à notre intuition. S'il n'y a qu'une charge ponctuelle q constante et immobile en un point P , l'électrostatique classique nous apprend que la solution est :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\|\vec{PM}\|}$$

Si la charge est toujours immobile en P mais dépend du temps (on la note $q(t)$), la solution doit avoir la symétrie sphérique de centre P et puisqu'on est dans le vide, sauf au point P , on sait que les solutions y sont des ondes sphériques et l'on s'attend donc à une solution de la forme :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{f\left(t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|}$$

Certes, une charge isolée et non constante n'est pas physiquement acceptable (non-conservation de la charge), mais on est ici dans une étape d'une démarche purement mathématique.

Ce dernier résultat doit redonner l'avant-dernier dans le cas particulier où $q(t)$ est constant ce qui nous oblige à choisir :

$$f\left(t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right) = q\left(t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)$$

où $\frac{\|\vec{PM}\|}{c}$ sera interprété comme retard de propagation entre P et M .

Une autre solution serait

$$f\left(t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right) = q\left(t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c} - t_0\right)$$

avec t_0 constante arbitraire, mais elle interdirait cette interprétation qui semble pertinente, c'est pourquoi on la rejette.

Une autre solution encore pourrait être en

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{f\left(t + \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|}$$

mais le potentiel en M serait en avance sur ce qui se passe en P , ce qui remettrait en cause le principe de causalité, on la rejette donc aussi.

Remplaçons la charge ponctuelle $q(t)$ par un volume infiniment petit, indéformable, centré sur P , de volume constant $d\mathcal{V}_P$ et de densité volumique de charge $\rho(P, t)$ donc de charge $q(t) = \rho(P, t) d\mathcal{V}_P$. Puisqu'il est quasiment ponctuel, on peut reprendre le résultat précédent en l'adaptant au contexte, soit :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

Enfin dans le cas d'une distribution de charges quelconque, on la considère comme somme de distributions élémentaires formées chacune d'un seul volume élémentaire chargé et reconstituant l'espace entier. L'équation différentielle en V étant linéaire, on sait alors que sa solution est somme des solutions correspondant aux distributions élémentaires, soit puisqu'il s'agit d'une démarche qui définit l'intégration :

$$V(M, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

Par analogie, on peut alors affirmer que la solution de l'équation :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

est :

$$\vec{A}(M, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P$$

Ces deux formules sont connues sous le nom de « formules des potentiels retardés ».

La vérification que ces solutions sont bien les bonnes pourra être trouvée dans le chapitre C-VIII consacré aux équations de MAXWELL.

On en déduira $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$, à condition de savoir intégrer la formules des potentiels retardés ; ce qu'on ne *sait*¹ pas faire avec une distribution

1. le début de la phrase impose le belgicisme (je suis né près de la frontière).

quelconque. On verra un peu plus loin comment se débrouiller dans le cas des champs à grande distance d'une distribution finie de charges.

2 Potentiels de Liénard-Wiechert créés par une charge ponctuelle mobile.

2.a Problème posé par le déplacement de la charge.

- **La problématique.**

La philosophie des potentiels retardés est qu'en un point M et à l'instant t , ils dépendent, entre autres, de la charge du point P à l'instant $\tau = t - \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}$ (on posera par la suite $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{PM}$ et $R = \|\overrightarrow{R}\|$). S'il n'y a qu'une seule charge ponctuelle q , en un point $P(t)$ mobile, il faut comprendre que ce qui se passe en M et à t dépend de la position de la charge à l'instant τ tel que :

$$\tau = t - \frac{R(\tau)}{c} = t - \frac{\|\overrightarrow{R}(\tau)\|}{c} = t - \frac{\|\overrightarrow{P(\tau)M}\|}{c}$$

que l'on peut réécrire ainsi :

$$R(\tau) = c(t - \tau)$$

qui est une équation en τ qu'il est rarement aisé de résoudre. Dans tous les développements ultérieurs, on pourra toutefois exprimer tous les résultats intéressants en fonction de ce τ , même non explicité ; je dis bien « ce » τ car il est unique (cf infra).

- **Un exemple simple.**

Supposons q animée d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v sur une droite que nous choisirons comme axe Oz dans le sens du mouvement et sur laquelle nous prendrons comme origine la position de la charge à l'instant initial $t = 0$. A un instant τ la charge est donc en P sur Oz à la cote $z_P = v\tau$.

Choisissons un point M (fixe de par la philosophie des champs) quelconque (donc hors de l'axe) de coordonnées fixes x , y et z donnés à un instant t donné. τ est alors solution de :

$$\tau = t - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - v\tau)^2}}{c}$$

que l'on peut réécrire ainsi :

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - v\tau)^2} = c(t - \tau)$$

d'où encore τ est la solution inférieure à t (car $c(t - \tau)$, égal à une racine, est positif) de

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z - v\tau)^2 &= c^2(t - \tau)^2 \\ c^2(t - \tau)^2 - [x^2 + y^2 + (z - v\tau)^2] &= 0 \end{aligned}$$

que l'on peut résoudre puisqu'il s'agit d'une équation du second degré en τ ; en remarquant que $c^2 - v^2$, coefficient de τ^2 est positif² et que, pour $\tau = t$, le polynôme en τ prend la valeur $-[x^2 + y^2 + (z - vt)^2]$ manifestement négative, alors on sait qu'il y a deux racines et que t est entre elles deux, donc qu'il y en a une et une seule inférieure à t . Son expression est aisée à obtenir... mais sans réel intérêt, car c'est un cas tout à fait particulier.

• Unicité de la solution.

Voir à quatre dimensions n'est pas aisé, aussi imaginerons-nous ici que l'espace soit à deux dimensions, c'est-à-dire un plan Oxy , auquel nous ajouterons l'axe des temps pour passer en trois dimensions ; ainsi on visualisera mieux les choses en sachant qu'en quatre dimensions, le raisonnement est identique mais moins facile à visualiser.

Imaginons que nous veuillons calculer l'effet en un point, pris comme origine O , et à un instant t_0 pris comme origine des temps (donc $t_0 = 0$), d'une charge mobile en un point P dépendant du temps ; on doit rechercher l'instant τ défini ci-dessus. L'ensemble des points à trois dimensions de projection $P(\tau)$ sur Oxy et de coordonnée $\tau < t_0 = 0$ sur l'axe des temps qui vérifient l'équation $\tau = t_0 - \frac{R(\tau)}{c} = -\frac{R(\tau)}{c}$ soit encore $R(\tau) = -c\tau$ est un cône (côté $t < 0$), de sommet O , d'axe celui du temps et d'angle au sommet α de tangente $\tan \alpha = \left| \frac{R}{\tau} \right| = c$.

Le point $P(\tau)$ et l'instant τ recherché correspond à la trajectoire dans cet espace $Oxyt$ de la charge ; un déplacement élémentaire fait avec l'axe de temps un angle β de tangente égale au plus à $\tan \beta_{\max.} = \frac{\|\vec{v}\| dt}{dt} = \|\vec{v}\| < c$, l'inégalité finale étant due au fait que la charge se déplace moins vite que la lumière. La trajectoire fait avec l'axe du temps un angle toujours plus petit que celui du « cône du passé absolu », ce qui assure³ l'unicité de la solution.

2.b Potentiels créés ; approche relativiste.

La lecture de ce paragraphe nécessite de se rafraîchir la mémoire en relisant en diagonale le chapitre B-VI de mécanique relativiste.

La vitesse de la lumière est un invariant relativiste, donc dans tout référentiel galiléen, la relation :

$$R(\tau) = c(t - \tau)$$

2. la relativité impose, bien sûr, que $v < c$

3. Le lecteur sceptique est invité à faire un petit schéma sur son tapis de souris.

est valable. Plaçons-nous dans celui où la charge q est immobile à l'instant τ ; on indiquera ce choix par un indice 0, classique dans ce contexte. Dans ce contexte, les potentiels au point M_0 à l'instant t_0 relèvent de l'électrostatique et de la magnétostatique (en l'absence de mouvement de charge !) et ont pour expressions :

$$V_0(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(\tau_0)} \quad \vec{A}_0(M_0, t_0) = \vec{0}$$

ce qui correspond à un quadrivecteur potentiel⁴ d'expression :

$$\overleftarrow{A}_0(M_0, t_0) = \left[i \frac{V_0(M_0, t_0)}{c}, \vec{A}_0(M_0, t_0) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(\tau_0)} \left(\frac{i}{c}, \vec{0} \right)$$

On y fait apparaître le quadrivecteur vitesse de la charge, dont l'expression est $\overleftarrow{v} = (i c, \vec{v})$ dans le cas général mais ici, puisque la charge est immobile, $\overleftarrow{v}_0 = (i c, \vec{0})$, soit, en utilisant $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$:

$$\overleftarrow{A}_0(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q}{R(\tau_0)} \left(i c, \vec{0} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overleftarrow{v}_0}{R(\tau_0)}$$

On aimerait que cette proportionnalité reste valable dans tous les référentiels mais c'est impossible en l'état car $R(\tau_0)$ n'est pas un invariant. Cherchons donc à lui donner une expression invariante et pour cela exploitons la relation $R(\tau_0) = c(t_0 - \tau_0)$. Le quadrivecteur événement (au sens relativiste) associé au vecteur $\vec{R}(\tau) = P(\tau)\vec{M}$ a pour expression dans le référentiel où la charge est immobile :

$$\overleftarrow{R}(\tau_0) = [i c(t_0 - \tau_0), \vec{R}(\tau_0)] = [i R(\tau_0), \vec{R}(\tau_0)]$$

d'où l'on déduit, avec $\overleftarrow{v}_0 = (i c, \vec{0})$:

$$\overleftarrow{R}_0 \cdot \overleftarrow{v}_0 = -c R(\tau_0)$$

Dans ce référentiel, on a donc :

$$\overleftarrow{A}_0(M_0, t_0) = -\frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{\overleftarrow{v}_0}{\overleftarrow{R}_0 \cdot \overleftarrow{v}_0}$$

Cette formulation étant composée d'invariants relativistes, on se croit autorisé à affirmer qu'elle est valable dans tous les référentiels sous la forme :

$$\overleftarrow{A}(M, t) = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{\overleftarrow{v}}{\overleftarrow{R} \cdot \overleftarrow{v}}$$

4. Voir le chapitre C-X sur la formulation relativiste des lois de l'électromagnétisme.

où

$$\overleftarrow{A}(M, t) = \left[i \frac{V(M, t)}{c}, \overrightarrow{A}(M, t) \right]$$

$$\overleftarrow{v} = (i c, \overrightarrow{v})$$

$$\overleftarrow{R}(\tau) = [i c (t - \tau), \overrightarrow{R}(\tau)] = [i R(\tau), \overrightarrow{R}(\tau)]$$

$$\overleftarrow{R} \cdot \overleftarrow{v} = -c R(\tau) + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{R}$$

d'où

$$\left[i \frac{V(M, t)}{c}, \overrightarrow{A}(M, t) \right] = -\frac{\mu_0 c}{4 \pi} \frac{(i c, \overrightarrow{v})}{-c R(\tau) + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{R}} = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{(i c, \overrightarrow{v})}{R(\tau) - \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{R}}{c}}$$

d'où en projetant et avec $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$:

$$\begin{cases} V(M, t) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{q}{R(\tau) - \frac{\overrightarrow{v}(\tau) \cdot \overrightarrow{R}(\tau)}{c}} \\ \overrightarrow{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{q \overrightarrow{v}(\tau)}{R(\tau) - \frac{\overrightarrow{v}(\tau) \cdot \overrightarrow{R}(\tau)}{c}} \end{cases}$$

où τ est la solution (cf supra) de $R(\tau) = c(t - \tau)$.

Ces formules sont connues sous le nom de *potentiels de LIÉNARD-WIECHERT*.

2.c Potentiels créés ; approche par les distributions.

• Indications minimales sur les distributions.

Cette théorie a été développée par Laurent SCHWARTZ⁵ (avec un « t » à ne pas confondre avec Hermann SCHWARZ sans « t », celui du théorème de permutation des dérivées partielles) et est bien utile au physicien. J'en donne ici un aperçu utilitaire, loin de leur introduction théorique.

Soit, selon que l'on est en une ou trois dimensions, une fonction $d_\varepsilon(x)$ ou $d_{3\varepsilon}(M)$ (ou $d_{3\varepsilon}(\overrightarrow{OM})$, ce qui revient au même) égale à :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \varepsilon \text{ ou } \|\overrightarrow{OM}\| > \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{(une dimension) ou } \frac{1}{\frac{4\pi}{3}\varepsilon^3} \text{ (trois dimensions) sinon} \end{cases}$$

5. ce qui lui a valu la médaille Fields en 1950.

Si g est une fonction continue strictement positive (ou négative) en $x = 0$ ou $M = O$ donc dans un voisinage de ces valeurs, alors le théorème de la moyenne généralisé permet d'affirmer que pour ε assez petit et selon la dimension de l'espace :

$$\exists a \quad |a| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) g(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} g(x) dx = 2\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} g(a) = g(a)$$

$$\begin{aligned} \exists A \quad \|\overrightarrow{OA}\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_{3\varepsilon}(M) g(M) d_3M &= \dots \\ \dots &= \iiint_{\|\overrightarrow{OM}\| < \varepsilon} \frac{1}{\frac{4\pi}{3}\varepsilon^3} g(M) d_3M = \frac{4\pi}{3} \varepsilon^3 \frac{1}{\frac{4\pi}{3}\varepsilon^3} g(A) = g(A) \end{aligned}$$

Faisons maintenant tendre ε vers 0 ; le nombre a tend vers 0 ou le point A vers O et les fonctions δ_{ε} et $\delta_{3\varepsilon}$ vers des « fonctions » δ et δ_3 nulles partout, sauf respectivement en 0 et O où elles sont infinies et telles que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0)$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_3(M) g(M) d_3M = g(O)$$

et en particulier pour la fonction constante $g(x) = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_3(M) d_3M = 1$$

Ces entités, presque des fonctions sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^3$, mais qui n'en sont pas à cause de la divergence en 0 ou O , sont appelées, avec un abus de langage donc, *fonctions de DIRAC*.

L'intérêt pour le physicien est qu'une charge ponctuelle q en O peut être associée à une densité volumique de charge :

$$\rho(M) = q \delta_3(M) \quad \text{ou encore} \quad \rho(M) = q \delta_3(\overrightarrow{OM})$$

puisque ρ est ainsi nul là où n'est pas la charge (partout sauf O) et infinie en O (un point a un volume nul donc une densité volumique infinie) et que la charge totale est bien :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(M) d_3M = q \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_3(M) d_3M = q$$

On se convaincra aisément qu'une charge ponctuelle q en un point P donné correspond à une densité volumique de charge $\rho(M) = q \delta_3(\overrightarrow{PM})$ et plus subtilement qu'une charge ponctuelle mobile en un point $P(t)$ à :

$$\rho(M, t) = q \delta_3(\overrightarrow{P(t)M})$$

et de même (cela servira ci-dessous) $\delta(x - x_0)$ correspond à un décalage en x_0 de l'origine de sorte que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) g(x) dx = g(x_0)$$

et que $\delta_3(\overrightarrow{M_0M})$ correspond à un décalage en M_0 de l'origine de sorte que :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_3(\overrightarrow{M_0M}) g(M) d_3M = g(M_0)$$

• Calcul du potentiel électrique.

Dans le cas d'une charge mobile q en $P(t)$, le potentiel électrique en M sera désormais donné par la formule des potentiels retardés :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right)}{\|\overrightarrow{PM}\|} dV_P$$

Le terme de retard $\frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}$ rend la formule $\rho(M, t) = q \delta_3(\overrightarrow{P(t)M})$ inutilisable de façon claire. Utilisons l'astuce suivante : pour un instant T donné, la définition de la fonction δ permet d'affirmer, en notant θ la variable « muette » d'intégration, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta - T) F(\theta) d\theta = F(T)$$

puis que, en prenant $T = t - \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}$ où M et P sont deux points donnés, pour l'instant quelconques

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - t + \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right) F(\theta) d\theta = F\left(t - \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right)$$

ce que nous appliquerons à $F(t) = \rho(P, t)$, où P est l'un des points donnés ci-dessus, d'où, en inversant l'ordre des deux membres :

$$\rho\left(P, t - \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - t + \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right) \rho(P, \theta) d\theta$$

« Où diable veut-on en venir ? » me diras-tu, ô mon lecteur que je devine intrigué. Tout simplement que désormais, on peut affirmer (cf supra) que :

$$\rho(P, \theta) = q \delta_3(\overrightarrow{P(\theta)P})$$

où P est un point quelconque et $P(\theta)$ le point particulier où se trouve la charge en $t = \theta$ et que nous noterons désormais P_θ . Reportons ce résultat dans l'intégrale des potentiels retardés pour arriver à une intégrale quadruple où l'ordre des intégrations importe peu⁶ ; nous arrivons alors à :

$$V(M, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta\left(\theta - t + \frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}\right) \frac{\delta_3(\overrightarrow{P(\theta)P})}{\|\overrightarrow{PM}\|} dV_P d\theta$$

« Et maintenant ? » me diras-tu, ô mon lecteur que je devine effaré. Maintenant utilisons une seconde astuce, à savoir intégrons d'abord sur le point P ; quelque compliquée que soit l'expression ci-dessus, elle est de la forme $\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_3(\overrightarrow{M_0M}) g(M) d_3M = g(M_0)$ où P_θ joue le rôle de M_0 et P celui de M , d'où $\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_3(\overrightarrow{P_\theta P}) g(P) d_3P = g(P_\theta)$ dont la philosophie est : « on escamote le signe d'intégration sur P , l'élément différentiel lié à P , la fonction δ_3 et l'on remplace, partout, P par P_θ », on arrive donc à :

$$V(M, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - t + \frac{\|\overrightarrow{P_\theta M}\|}{c}\right) \frac{1}{\|\overrightarrow{P_\theta M}\|} d\theta$$

Et il ne reste plus qu'à intégrer sur le temps ; mais malheureusement la variable d'intégration θ apparaît bien dans une fonction δ mais en deux endroits, l'un explicite, l'autre par l'intermédiaire de P_θ . « En finirons-nous jamais ? » me diras-tu, ô mon lecteur que je devine désespéré. Courage, nous touchons au but.

Dégageons la structure sous l'anecdote ; on s'intéresse à calculer une expression :

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(\theta)) g(\theta) d\theta$$

Effectuons tout naturellement, car c'est la seule façon d'espérer avancer, le changement de variable $u = f(\theta)$ d'où $\theta = f^{-1}(u)$ (f^{-1} est la fonction inverse de f) et par conséquent, en connaissant la dérivée d'une fonction inverse, $d\theta = (f^{-1})'(u) du = \frac{1}{f'[f^{-1}(u)]} du$; on arrive alors⁷ à :

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) g(f^{-1}(u)) \frac{1}{f'[f^{-1}(u)]} du$$

6. Encore faudrait-il vérifier que cette affirmation reste vraie avec ces quasi-fonctions mais ce serait un très long cours de mathématiques de haut niveau ; nous l'admettons donc.

7. dans le cas où g est monotone croissante avec $g(\pm\infty) = \pm\infty$ ce qu'on vérifierait avec un cône de temps comme pour l'unicité de τ ; la démonstration en cours est très longue et je m'abstiens donc de développer ce point-ci.

soit par définition de la fonction δ :

$$V = g(f^{-1}(0)) \frac{1}{f'[f^{-1}(0)]} = \frac{g(f^{-1}(0))}{f'[f^{-1}(0)]}$$

Appliquons cela à ce qui nous occupe en notant $\tau = f^{-1}(0)$ (j'ai une idée derrière la tête, bien sûr), soit encore $f(\tau) = 0$ et avec l'expression de f (voir la dernière expression connue de $V(M, t)$), on tire :

$$\tau - t + \frac{\|\overrightarrow{P_\tau M}\|}{c} = 0$$

où l'on reconnaît la solution de :

$$\tau = t - \frac{R(\tau)}{c} = t - \frac{\|\overrightarrow{R}(\tau)\|}{c} = t - \frac{\|\overrightarrow{P(\tau)M}\|}{c}$$

ou de :

$$R(\tau) = c(t - \tau)$$

dont nous avons parlé longuement plus haut.

Puisque (voir la dernière expression connue de $V(M, t)$) $g(\theta) = \frac{1}{\|\overrightarrow{P_\theta M}\|}$, on a :

$$g(f^{-1}(0)) = g(\tau) = \frac{1}{\|\overrightarrow{P_\tau M}\|} = \frac{1}{R(\tau)}$$

en reprenant à la fin une notation antérieure.

Pour $f'(f^{-1}(0))$, c'est un peu plus délicat. On a :

$$f(\theta) = \theta - t + \frac{\|\overrightarrow{P_\theta M}\|}{c} = \theta - t + \frac{\|\overrightarrow{MP_\theta}\|}{c} = \theta - t + \frac{\sqrt{\overrightarrow{MP_\theta}^2}}{c}$$

d'où

$$f'(\theta) = 1 + \frac{1}{2c} \frac{1}{\sqrt{\overrightarrow{MP_\theta}^2}} 2 \overrightarrow{MP_\theta} \cdot \frac{d\overrightarrow{MP_\theta}}{d\theta} = 1 + \frac{1}{c} \frac{\overrightarrow{MP_\theta} \cdot \overrightarrow{v_P}(\theta)}{\sqrt{\overrightarrow{MP_\theta}^2}} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\overrightarrow{P_\theta M} \cdot \overrightarrow{v_P}(\theta)}{\|\overrightarrow{P_\theta M}\|}$$

d'où finalement, en reprenant à la fin des notations antérieures :

$$f'(f^{-1}(0)) = f'(\tau) = 1 - \frac{1}{c} \frac{\overrightarrow{P(\tau)M} \cdot \overrightarrow{v_P}(\tau)}{\|\overrightarrow{P(\tau)M}\|} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\overrightarrow{R}(\tau) \cdot \overrightarrow{v_P}(\tau)}{R(\tau)}$$

Il ne reste qu'à faire la synthèse de ces calculs :

$$V(M, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{1}{R(\tau)}}{1 - \frac{1}{c} \frac{\overrightarrow{R}(\tau) \cdot \overrightarrow{v_P}(\tau)}{R(\tau)}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(\tau) - \frac{\overrightarrow{R}(\tau) \cdot \overrightarrow{v_P}(\tau)}{c}}$$

qui est le même résultat que celui obtenu par l'approche relativiste, heureusement, sinon la déprime aurait été assurée.

Remarque 1 : bien sûr, pour le potentiel vecteur, on ne s'aventure pas à reprendre le calcul, on s'appuie sur l'analogie des formules de départ.

Remarque 2 : l'invention des distributions permet d'unifier distributions discrètes et distributions volumique.

3 Potentiels à grande distance d'une distribution de charges.

3.a Calcul des distances et des retards. Approximation dipolaire.

On considère un ensemble de charges, en répartition discrète ou continue, occupant un volume de l'espace, dont on note a la plus grande dimension, autour d'un point O situé vaguement⁸ au milieu. En général la charge totale sera nulle, car la matière est électriquement neutre sauf rares exceptions. Les formules des potentiels retardés ou des potentiels de LIÉNARD-WICHERT donnant les potentiels en tout point M et à tout instant t ne peuvent être intégrées pour la première et sommées pour la seconde, sauf cas très particuliers.

Nous nous proposons donc ici et *dans toute la suite du chapitre sauf mention contraire*, de nous intéresser à ce qui se passe en tout point M situé à grande distance de la distribution, soit en notant $r = \|\vec{OM}\|$, dans l'hypothèse $r \gg a$, ce qui permettra des approximations et l'avancée des calculs. Cette hypothèse s'appelle *approximation dipolaire* comme la suite le justifiera.

Soit un point P à l'intérieur de la répartition volumique de charge ou un point P_i de la distribution discrète. On mènera les calculs dans le premier cas, le second se traite à l'identique. On se propose de calculer une expression approchée de $\|\vec{PM}\|$ qui figure au dénominateur des potentiels élémentaires et dans le retard de propagation ; le calcul est classique et relève du développement limité :

$$\begin{aligned} \|\vec{PM}\| &= \sqrt{\vec{PM}^2} = \sqrt{(\vec{OM} - \vec{OP})^2} = \sqrt{\vec{OM}^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP} + \vec{OP}^2} = \dots \\ &\dots = \|\vec{OM}\| \left(1 - 2 \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} \cdot \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OM}\|} + \frac{\|\vec{OP}\|^2}{\|\vec{OM}\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

soit en notant (cf supra) $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ (vecteur unitaire de $\vec{OM}$) et en

8. inutile de trouver une position bien particulière.

n'explicitant que les deux premiers termes du développement en $\frac{\|\vec{OP}\|}{\|\vec{OM}\|}$:

$$\|\vec{PM}\| = r \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{r} + \dots \right) = r - \vec{u} \cdot \vec{OP} + \dots$$

3.b Application à une distribution volumique non relativiste.

Au premier ordre non nul, on a $\|\vec{PM}\| = r = \|\vec{OM}\|$, que l'on reporte dans la formule des potentiels retardés. On en déduit alors :

$$V(M, t) = \iint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} dV_P \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \iint_{\mathbb{R}^3} \rho\left(P, t - \frac{r}{c}\right) dV_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

où l'on a reconnu dans la dernière intégrale rencontrée la charge totale, officiellement calculée à l'instant $\tau = t - \frac{r}{c}$ mais, conservation de la charge oblige, est en fait une constante notée Q , bien sûr.

On a rappelé plus haut que Q est pratiquement toujours nul, ce qui nous oblige à utiliser l'approximation au cran suivant soit $\|\vec{PM}\| = r - \vec{u} \cdot \vec{OP}$ mais uniquement là où le premier ordre est nul. On conserve $\frac{1}{\|\vec{PM}\|} \approx \frac{1}{r}$ mais on utilisera :

$$\rho\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right) \approx \rho\left(P, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c}\right) = \rho\left(P, \tau + \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c}\right)$$

où l'on notera $\tau = t - \frac{r}{c}$, comme dans toute la suite du reste.

Le différence des retards entre P et M d'une part et O et M d'autre part, soit $\frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c}$ est majorée, en ordre de grandeur par $\frac{a}{c}$ où a est la taille de la distribution de charges. On ne peut aller plus loin qu'en introduisant une hypothèse supplémentaire à savoir que sur un temps $\frac{a}{c}$, les charges volumiques varient très peu, ce qui nous autorisera à effectuer un développement de TAYLOR en bonne approximation. Précisons les choses : soit T un temps caractéristique sur lequel ρ varie significativement, ce qui pourrait être la période s'il y a des variations sinusoïdales ; on veut donc $\frac{a}{c} \ll T$ soit $a \ll \lambda = cT$ où l'on introduit λ qui va s'avérer être la longueur d'onde du rayonnement engendré dans le cas sinusoïdal, d'où la notation, mais qui peut être manipulée comme simple notation sans cette interprétation.

Une autre formulation de la condition de validité est $\frac{a}{T} \ll c$ où $\frac{a}{T}$, rapport du déplacement maximum sur le temps caractéristique d'évolution, est un ordre de grandeur raisonnable de la vitesse v des charges ; la condition de validité est donc d'avoir des mouvements non relativistes, condition que l'on retrouvera dans le cas d'une distribution discrète et que l'on considérera comme vérifiée dans toute la suite du chapitre, sauf à⁹ voir sur un exemple simple ce qui peut se passerait le cas contraire.

9. Le vrai sens de « sauf à » est « en se réservant la possibilité de ».

On pourra finalement, dans ce contexte, réaliser l'approximation suivante :

$$\rho\left(P, \tau + \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c}\right) = \rho(P, \tau) + \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c} \dot{\rho}(P, \tau)$$

où $\dot{\rho}(P, \tau)$ note $\frac{\partial \rho(P, \tau)}{\partial t}$; en reportant ce résultat dans la formule des potentiels retardés, on arrive à :

$$V(M, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(P, \tau) d\mathcal{V}_P + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r} \vec{u} \cdot \iiint_{\mathbb{R}^3} \dot{\rho}(P, \tau) \vec{OP} d\mathcal{V}_P$$

soit encore, en permutant intégration spatiale et dérivation temporelle et en reconnaissant dans $\iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(P, \tau) \vec{OP} d\mathcal{V}_P$ la définition classique du moment dipolaire $\vec{p}$ et puisque Q , charge totale, est nulle :

$$V(M, t) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r} \vec{u} \cdot \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\tau} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r} \vec{u} \cdot \dot{\vec{p}}(\tau)$$

Pour le potentiel vecteur, c'est plus simple, car l'approximation $\|\vec{PM}\| = r$ conduit à un résultat non nul :

$$\vec{A}(M, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c}\right)}{\|\vec{PM}\|} d\mathcal{V}_P \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(P, \tau) d\mathcal{V}_P$$

Poursuivons, car l'analogie classique $\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j} d\mathcal{V} \sim \sum q_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt}(\sum q_i \vec{OP}_i) = \dot{\vec{p}}$ suggère d'approfondir. La composante selon x de $\dot{\vec{p}}$ est, en permutant dérivation temporelle et intégration spatiale, en utilisant la formulation de conservation de la charge :

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(P, \tau) x d\mathcal{V}_P = \iiint_{\mathbb{R}^3} \dot{\rho}(P, \tau) x d\mathcal{V}_P = - \iiint_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \vec{j}(P, \tau) x d\mathcal{V}_P$$

puis, en utilisant la formule $\operatorname{div}(x \vec{j}) = x \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{grad} x \cdot \vec{j} = x \operatorname{div} \vec{j} + \vec{e}_x \cdot \vec{j}$, le théorème de GREEN-OSTROGRASKI et le fait que, sur la sphère Σ_∞ de rayon infini, il n'y a pas de charges ni de courants (on étudie une distribution de charges proche de O) :

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= - \iiint_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(x \vec{j}) d\mathcal{V}_P + \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{e}_x \cdot \vec{j}(P, \tau) x d\mathcal{V}_P = \dots \\ &\dots = - \oint_{\Sigma_\infty} \operatorname{div}(x \vec{j}) d\mathcal{V}_P + \iiint_{\mathbb{R}^3} j_x(P, \tau) d\mathcal{V}_P = \iiint_{\mathbb{R}^3} j_x(P, \tau) d\mathcal{V}_P \end{aligned}$$

et de même pour les projections sur y et z d'où, vectoriellement :

$$\dot{\vec{p}} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(P, \tau) d\mathcal{V}_P$$

qui est bien le résultat soupçonné par analogie.

Résumons : dans l'hypothèse où $a \ll \lambda$, $a \ll r$, $Q = 0$ et $\vec{p}(t) \neq 0$ (je veux dire que $\vec{p}(t)$ n'est pas nul à tout instant, sinon V et $\vec{A}$ sont nuls à cet ordre et il faut poursuivre le développement limité ; mais $\vec{p}(t)$ peut s'annuler à certains instants, par exemple s'il est sinusoïdal), on a :

$$\begin{cases} V(M, t) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 c r} \vec{u} \cdot \dot{\vec{p}}(\tau) \\ \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4 \pi r} \dot{\vec{p}}(\tau) \end{cases}$$

où l'on rappelle que $\tau = t - \frac{r}{c}$, $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$

Remarque 1, anecdotique : avec $\mu_0 \varepsilon c^2 = 1$, on a $V = c \vec{u} \cdot \vec{A}$

Remarque 2 : la suite prouvera que, pour le calcul des champs, l'utilisation de la condition de jauge de LORENTZ permet de se dispenser de connaître $V(M, t)$; c'est du reste pourquoi la première remarque est anecdotique.

3.c Application à une distribution discrète non relativiste.

En sommant sur les particules l'expression du potentiel électrique de LIÉNARD-WIECHERT, on a :

$$V(M, t) = \sum \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{q_i}{R_i(\tau_i) - \frac{\vec{v}_i(\tau_i) \cdot \vec{R}_i(\tau_i)}{c}} = \sum \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0 R_i(\tau_i)} \frac{q_i}{1 - \frac{\vec{v}_i(\tau_i) \cdot \vec{u}_i}{c}}$$

Dans l'hypothèse non relativiste détaillée plus haut on a $\frac{v_i}{c} \ll 1$, ce qui autorise l'approximation suivante :

$$V(M, t) = \sum \frac{q_i}{4 \pi \varepsilon_0 R_i(\tau_i)} \left(1 + \frac{\vec{v}_i(\tau_i) \cdot \vec{u}_i}{c} \right)$$

En outre, puisque que $a \ll r$, on peut donc confondre les $\vec{R}_i$ avec $\vec{r} = \vec{OM}$, les R_i avec r d'où $\vec{u}_i = \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ et donc les τ_i avec le $t - \frac{r}{c}$, d'où, avec une charge totale nulle et la définition discrète du moment dipolaire :

$$\begin{aligned} V(M, t) &= \sum \frac{q_i}{4 \pi \varepsilon_0 r} \left(1 + \frac{\vec{v}_i(\tau) \cdot \vec{u}}{c} \right) = \frac{\sum q_i}{4 \pi \varepsilon_0 r} + \vec{u} \cdot \frac{\sum q_i \vec{v}_i(\tau)}{4 \pi \varepsilon_0 c r} = \dots \\ &\dots = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r} + \vec{u} \cdot \frac{\frac{d}{dt} \left[\sum q_i \vec{OP}_i(\tau) \right]}{4 \pi \varepsilon_0 c r} = \frac{\vec{u} \cdot \dot{\vec{p}}(\tau)}{4 \pi \varepsilon_0 c r} \end{aligned}$$

et de même :

$$\vec{A}(M, t) = \sum \frac{\mu_0}{4\pi R_i(\tau_i)} \frac{q_i \vec{v}_i(\tau_i)}{1 - \frac{\vec{v}_i(\tau_i) \cdot \vec{u}_i}{c}} = \sum \frac{\mu_0}{4\pi R_i(\tau_i)} q_i \vec{v}_i(\tau_i) \left(1 + \frac{\vec{v}_i(\tau_i) \cdot \vec{u}_i}{c} \right)$$

dont le premier ordre en $\frac{\vec{v}_i}{c}$ est

$$\vec{A}(M, t) = \sum \frac{\mu_0}{4\pi R_i} q_i \vec{v}_i(\tau_i) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum q_i \vec{v}_i(\tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(\tau)$$

On retrouve donc exactement les mêmes résultats que dans la distribution continue et il y aura donc les mêmes conséquences. Un vrai bonheur !

4 Calculs des champs créés dans la zone de rayonnement avec l'approximation dipolaire non relativiste.

4.a Quelques résultats utiles. Zone de rayonnement.

Nous aurons par la suite besoin de calculer des rotationnels de champs vectoriels ou gradient de champs scalaires, de la forme $\vec{\text{rot}} \left[\frac{1}{r} \vec{f} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$ ou $\vec{\text{grad}} \left[\frac{1}{r} f \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$, ou, en un peu plus compliqué, de la forme $\vec{\text{rot}} \left[\frac{1}{r} \vec{f} \left(\vec{u}, t - \frac{r}{c} \right) \right]$ ou autres, avec $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{r}$ puis d'en donner une approximation raisonnable dans des conditions à définir.

Dans le premier cas, on aura à calculer des expressions du type $\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{r} f_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$ où f_z est la composante de $\vec{f}$ selon Oz , ce qui donne, en notant $\dot{f}_z$ la dérivée de f_z , formellement fonction du temps :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{r} f_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} f_z \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \dot{f}_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \left(-\frac{\frac{\partial r}{\partial y}}{c} \right)$$

Or $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} (2y) = \frac{y}{r} = u_y$ où u_y est la composante selon Oy de $\vec{u}$; en reportant ce résultat dans le précédent, on arrive à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{r} f_z \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = -\frac{1}{r^2} u_y f_z \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{cr} u_y \dot{f}_z \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

En calculant de même $\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} f_y \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$, on en déduira la composante sur Ox du rotationnel, puis par analogie, les deux autres. Inutile de faire les calculs : car en regardant bien l'expression obtenue ci-dessus et en visualisant bien ce qu'il faut y changer, on se convainc facilement que le résultat est :

$$\vec{\text{rot}} \left[\frac{1}{r} \vec{f} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = -\frac{1}{r^2} \vec{u} \wedge \vec{f} - \frac{1}{cr} \vec{u} \wedge \dot{\vec{f}} = \frac{1}{r^2} \vec{f} \wedge \vec{u} + \frac{1}{cr} \dot{\vec{f}} \wedge \vec{u}$$

calculés, bien sûr en $t - \frac{r}{c}$.

Le même genre de calcul¹⁰ conduit à :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{r} f \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{1}{r^2} f \vec{u} + \frac{1}{cr} \dot{f} \vec{u}$$

calculés, bien sûr en $t - \frac{r}{c}$.

A grande distance, le terme en r^{-2} est négligeable devant celui en r^{-1} , bien sûr, mais à partir de quelle distance, l'approximation est-elle valable ? Comparons pour cela, en ordre de grandeur, les deux termes, l'un en $\vec{u} \wedge \vec{f}$ de l'ordre de $\vec{f}$ puisque $\vec{u}$ est unitaire, et l'autre en $\vec{u} \wedge \dot{\vec{f}}$ est de l'ordre de $\dot{\vec{f}} = \frac{\vec{f}}{T}$ où T est le temps caractéristique défini plus haut ; le terme en r^{-2} est donc négligeable si $\frac{\|\vec{f}\|}{r^2} \ll \frac{\|\dot{\vec{f}}\|}{crT}$ soit $r \gg cT = \lambda$; la zone correspondant à cette condition est traditionnellement appelée *zone de rayonnement*.

Remarque : en optique, pour une lampe spectrale ($\lambda \approx 600$ nm), on est dans la zone de rayonnement à moins de 0,1 mm de la lampe ! Dans la bande radio FM (autour de 100 MHz soit $\lambda \approx 3$ m) si l'émetteur parisien est en haut de la tour Eiffel, on est dans la zone de rayonnement au pied de celle-ci. Enfin pour les « grandes ondes » (longueur d'onde de l'ordre du kilomètre et émetteur unique pour tout un pays), on n'est dans la zone de rayonnement qu'au delà d'une centaine de kilomètres. La zone de rayonnement de la B.B.C. commence à Calais (oh, my God!).

Donc dans cette zone :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left[\frac{1}{r} \vec{f} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{1}{cr} \dot{\vec{f}} \wedge \vec{u}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{r} f \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{1}{cr} \dot{f} \vec{u}$$

Pour un champ plus complexe en $\frac{1}{r} \vec{f}(\vec{u}, t - \frac{r}{c}) = \frac{1}{r} \vec{f}(u_x, u_y, u_z, t - \frac{r}{c})$, on a de même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{r} f_z \left(u_x, u_y, u_z, t - \frac{r}{c} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{r} f_z \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}, t - \frac{r}{c} \right) \right] = \\ &\dots + \frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial u_x} \left(-\frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial u_y} \left(-\frac{y}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial u_z} \left(-\frac{z}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ &= \dots - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f_z}{\partial u_x} u_x u_y - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f_z}{\partial u_y} (u_y^2 - 1) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f_z}{\partial u_z} u_z u_y \end{aligned}$$

où l'on a indiqué que les termes supplémentaires par rapport à l'autre calcul. Comme u_x , u_y et u_z sont les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$, il sont de l'ordre de grandeur de

10. On laisse le lecteur les faire lui-même pour lutter contre l'ankylose.

l'unité et l'on en déduit, en outre que $\frac{\partial f_z}{\partial u_x}$ et analogues sont de l'ordre de f , donc que tous les termes supplémentaires sont de l'ordre de $\frac{f}{r^2}$, le même que celui du terme négligé dans le calcul précédent et ils sont donc eux aussi négligeables dans les mêmes conditions, d'où :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left[\frac{1}{r} \overrightarrow{f} \left(\overrightarrow{u}, t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{1}{c r} \dot{\overrightarrow{f}} \wedge \overrightarrow{u} \quad \text{pour } r \gg \lambda$$

On pourra aussi avoir besoin du résultat suivant ¹¹ :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{r} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{f} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{r^2} \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{f} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{1}{r^2} \overrightarrow{f} - \frac{2}{r^2} (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{f}) \overrightarrow{u} - \frac{1}{c r} (\overrightarrow{u} \cdot \dot{\overrightarrow{f}}) \overrightarrow{u}$$

qui se réduit dans la zone de rayonnement à $-\frac{1}{c r} (\overrightarrow{u} \cdot \dot{\overrightarrow{f}}) \overrightarrow{u}$

4.b Calcul des champs dans la zone de rayonnement.

Le champ magnétique se calcule par $\overrightarrow{B}(M, t) = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}$ avec $\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\overrightarrow{p}}(\tau)$ où $\tau = t - \frac{r}{c}$ donc, grâce aux résultats qui précèdent, valables uniquement dans la zone de rayonnement :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\overrightarrow{p}}(\tau) \wedge \overrightarrow{u}}{c r}$$

ou encore

$$\overrightarrow{B} = \dot{\overrightarrow{A}} \wedge \frac{\overrightarrow{u}}{c}$$

Le champ électrique se calcule par $\overrightarrow{E}(M, t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ avec $\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\overrightarrow{p}}(\tau)$ et $V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c r} \overrightarrow{u} \cdot \dot{\overrightarrow{p}}(\tau)$ où $\tau = t - \frac{r}{c}$ donc, grâce aux résultats qui précèdent, valables uniquement dans la zone de rayonnement :

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} (\overrightarrow{u} \cdot \ddot{\overrightarrow{p}}) \overrightarrow{u} - \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\overrightarrow{p}}$$

soit avec $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$, $\overrightarrow{u}^2 = 1$ (vecteur unitaire) et en reconnaissant le développement d'un double produit vectoriel :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[(\overrightarrow{u} \cdot \ddot{\overrightarrow{p}}) \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}) \ddot{\overrightarrow{p}} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r} (\ddot{\overrightarrow{p}} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{u}$$

ou encore

$$\overrightarrow{E} = (\dot{\overrightarrow{A}} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{u} = c \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{u}$$

11. que le lecteur pourra aisément démontrer à partir de la forme $\frac{1}{r^2} \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{f}$, maintenant qu'il a sorti papier et stylo

Le champ électrique aurait pu aussi se calculer en tirant parti de la condition de jauge de LORENTZ, soit $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$; cette méthode s'avère en effet plus aisée dans des cas plus complexes que celui-ci. On remarque que $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(\tau) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{p}(\tau) \right]$ d'où :

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{p} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{p} \right)$$

d'où, par intégration :

$$\frac{V}{c^2} + \text{div} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{p} \right) = 0$$

à une composante statique près, exclue par l'hypothèse $Q = 0$. On en déduit, avec le relation classique $\overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{U}) = \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}) + \Delta \vec{U}$:

$$-\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \left(\frac{\vec{p}}{r} \right) = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{p}}{r} \right) + \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \Delta \left(\frac{\vec{p}}{r} \right)$$

Or $\frac{\vec{p}(\tau)}{r}$ où $\tau = t - \frac{r}{c}$ est une solution classique de l'équation de propagation (ou de D'ALEMBERT) $\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dt^2}$, d'où :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{p}}{r} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\vec{p}}{r} \right)$$

Par ailleurs de $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{p}(\tau)}{r} \right)$, on déduit :

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\vec{p}(\tau)}{r} \right)$$

puis, par une simple addition :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{p}}{r} \right)$$

On termine le calcul en utilisant les résultats du paragraphe précédent :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{p}}{r} \right) = \frac{\dot{\vec{p}}(\tau) \wedge \vec{u}}{c r}$$

puis :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{p}}{r} \right) = \frac{[\ddot{\vec{p}}(\tau) \wedge \vec{u}] \wedge \vec{u}}{c^2 r}$$

et :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}}(\tau) \wedge \vec{u}}{c^2 r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\ddot{\vec{p}} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u}}{r}$$

qui est bien le résultat précédemment obtenu.

Résumons : dans l'hypothèse où $a \ll \lambda \ll r$, $Q = 0$ et $\vec{p}(t) \neq 0$, on a :

$$\begin{cases} V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r} \vec{u} \cdot \dot{\vec{p}}(\tau) \\ \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(\tau) \\ \vec{B} = \dot{\vec{A}} \wedge \frac{\vec{u}}{c} \\ \vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u} = (\dot{\vec{A}} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} \end{cases}$$

où l'on rappelle que $\tau = t - \frac{r}{c}$, $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$

4.c Propriétés du champ électromagnétique rayonné.

De nombreux commentaires s'imposent :

- Les champs font intervenir le temps au travers de $\tau = t - \frac{r}{c}$, ce qui en montre le caractère ondulatoire progressif dans la direction radiale centrifuge de vecteur unitaire $\vec{u}$ (ou en notation de coordonnées sphériques, $\vec{e}_r$).
- Les champs sont proportionnel à $\dot{\vec{A}}$ donc à $\ddot{\vec{p}}$, dérivée seconde du moment dipolaire, donc à l'accélération des charges. Seules des charges accélérées rayonnent donc. Retenons bien qu'une charge, même immobile, est source de champ électrique, qu'elle doit avoir une vitesse pour être source de champ magnétique et une accélération pour être source d'onde électro-magnétique. Remarquons aussi qu'on parle d'accélération vectorielle, une charge en mouvement circulaire uniforme a une accélération et rayonne, c'est le cas d'un paquet de protons tournant comme des fous à l'intérieur d'un cyclotron. Ce devrait être le cas d'un électron tournant autour du noyau, la contradiction entre cette prédiction et la réalité a conduit à l'élaboration de la mécanique quantique.
- On retrouve la structure trirectangle d'une onde plane dans le vide puisqu'on vérifie aisément que $\vec{B}$ est orthogonal à la direction de propagation, de vecteur unitaire $\vec{u}$ car $\vec{B} = \dot{\vec{A}} \wedge \frac{\vec{u}}{c}$, que $\vec{E}$ est orthogonal à $\vec{B}$ et à la direction de propagation, avec un trièdre direct dans le sens $\vec{u}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et la relation $\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$, tout cela car $\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u}$. Dans une région de l'espace de taille petite devant r , on peut donc considérer que l'onde est plane, mais ce n'est pas vrai à plus grande échelle : on parle d'onde localement plane.
- Si le moment dipolaire a une direction fixe, alors, en un point M donné, les directions des champs sont fixes dans le temps ; localement, on a donc affaire à une onde polarisée rectilignement, tout au moins localement.
- Les champs varient en $1/r$, alors qu'en électrostatique et magnétostatique, les champs créés par des charges et des courants varient en $1/r^2$. On en verra plus loin les

conséquences énergétiques.

- Le rayonnement est anisotrope du fait de la présence du produit vectoriel avec le vecteur unitaire radial $\vec{u} = \vec{e}_r$.

Pour fixer les idées dans la suite de cette partie, nous nous placerons dans le cadre d'un « dipôle oscillant » tel que $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ où l'on a pris l'axe Oz parallèle à la direction fixe du moment dipolaire. On utilisera les coordonnées sphériques (voir figure 1 p. 24).

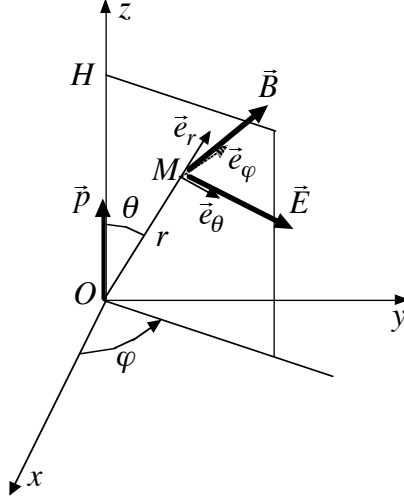


FIGURE 1 – Champs créés par le dipôle oscillant.

On a successivement, sans oublier que $\vec{u} = \vec{e}_r$ (la notation est une question de point de vue) :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(\tau) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{e}_z \\ \vec{B} &= \dot{\vec{A}} \wedge \frac{\vec{u}}{c} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c r} \sin(\omega \tau) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{e}_\varphi \\ \vec{E} &= c \vec{B} \wedge \vec{u} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Remarque : revenons au rayonnement est anisotrope ; du fait de la présence du facteur $\sin \theta$, il est ici nul sur l'axe Oz ($\theta = 0$ ou π), il est maximal dans les directions du plan Oxy ($\theta = \pi/2$).

4.d Puissance rayonnée

Dans le contexte de l'exemple du dipôle oscillant, le vecteur de POYNTING s'écrit :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \omega^4 p_0^2 \cos^2[\omega(t - r/c)] \vec{e}_r$$

soit en moyenne dans le temps :

$$\langle \vec{H} \rangle = \frac{\mu_0}{32 \pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \omega^4 p_0^2 \vec{e}_r$$

On y retrouve bien sûr l'anisotropie du rayonnement.

Calculons les puissances instantanée et moyenne émise à travers une sphère de centre O et de rayon r , soit :

$$\mathcal{P} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \oint \langle \vec{H} \rangle \cdot d\vec{S}$$

soit, par exemple, en reportant l'expression de $\langle \vec{H} \rangle$ et avec $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$ et en simplifiant par r^2 :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \oint \frac{\mu_0}{32 \pi^2 c} \sin^2 \theta \omega^4 p_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \dots$$

$$\dots = \frac{\mu_0}{32 \pi^2 c} \omega^4 p_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_{-\pi}^\pi d\varphi = \frac{\mu_0}{32 \pi^2 c} \omega^4 p_0^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot (2\pi) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12 \pi c}$$

et bien sûr :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{6 \pi c} \cos^2(\omega(t - r/c))$$

Remarque : le calcul de $I = \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$ se mène ainsi : on effectue le changement de variable défini par $u = -\cos \theta$ d'où $du = \sin \theta d\theta$; on en tire :

$$I = \int_{-1}^1 (1 - u^2) u du = \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

Revenons au résultat : la conséquence logique de la décroissance en $1/r$ des champs est que la puissance rayonnée à travers une sphère est indépendante de son rayon. Cette décroissance en $1/r$ ne traduit donc nullement une absorption mais une répartition de la puissance sur une sphère de surface croissant en r^2 . Il y a conservation de l'énergie.

Si l'on avait poussé le développement limité de V et $\vec{A}$ jusqu'aux termes en $\frac{1}{r^2}$, cela aurait conduit à des termes en $\frac{1}{r^2}$ dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (même remarque si l'on avait développé le calcul des champs à partir des potentiels jusqu'au deuxième ordre non nul) et à des termes en $\frac{1}{r^3}$ dans $\vec{H}$ (produit du terme en $\frac{1}{r}$ d'un champ par le terme en $\frac{1}{r^2}$ de l'autre) et des termes en $\frac{1}{r}$ dans la puissance rayonnée, négligeables dans la zone de rayonnement. On aurait donc travaillé inutilement.

Remarque : si la charge totale est non nulle (et constante bien sûr), on rajoute un champ électrostatique, donc en $\frac{1}{r^2}$ et la conclusion est la même.

4.e Indications sur le freinage de rayonnement.

Plaçons-nous dans le cas encore plus particulier où le dipôle est formé d'une charge fixe $-q$ en O et d'une charge q mobile sur Oz avec une cote $z(t)$ variant de façon sinusoïdale en $z(t) = a \cos(\omega t)$ et l'on a alors $p_0 = q a$

Dans la philosophie de l'action et de la réaction, si le dipôle fournit une puissance instantanée $\mathcal{P}$, il subit une puissance $-\mathcal{P}$ (avec un éventuel décalage de propagation) que l'on peut interpréter comme l'action d'une force $\vec{F}(t)$ de puissance $\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$ (sur la charge mobile donc ; la charge fixe, même soumise à une force, ne reçoit aucune puissance). On doit donc identifier, en notant $\vec{F} = F \vec{e}_z$

$$F(t) \dot{z}(t) = -F(t) a \omega \sin(\omega t)$$

et

$$-\mathcal{P} = -\frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{6 \pi c} \cos^2(\omega(t - r/c)) = -\frac{\mu_0 \omega^4 q^2 a^2}{6 \pi c} \cos^2(\omega(t - r/c))$$

à un déphasage temporel près.

Si l'on veut une identité pour toute amplitude a et toute pulsation ω , il faut une force en $\sin(\omega t)$ et un déphasage temporel qui fasse passer de $\cos^2(\omega \tau)$ à $\sin^2(\omega t)$ donc qu'il soit $\frac{\pi}{2}$ plus ou moins un nombre impair de fois le quart de période (considéré comme correctif pour la zone avant celle de rayonnement) puis une force en $a \omega^3$, soit en adaptant les constantes :

$$F(t) = \frac{\mu_0 q^2}{6 \pi c} a \omega^3 \sin(\omega t)$$

que l'on va chercher à lier au mouvement, soit à $z(t) = a \cos(\omega t)$. La seule façon de faire apparaître le facteur ω^3 est de faire apparaître la dérivée troisième que je note ¹² $\ddot{\dot{z}}$, soit

$$\ddot{\dot{z}} = a \omega^3 \sin(\omega t)$$

Il apparaît donc comme plausible une force dite *force de freinage de rayonnement* dont l'expression serait, en introduisant plutôt la vitesse :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 q^2}{6 \pi c} \ddot{\vec{v}}$$

Toutefois, quelque séduisante que puisse paraître cette idée, elle porte en elle-même une fâcheuse contradiction. En effet si l'on applique à une charge de masse m , supposée isolée, le théorème fondamental de la dynamique en tenant compte du rayonnement par l'intermédiaire de cette force, on doit résoudre :

$$m \dot{\vec{v}} = \frac{\mu_0 q^2}{6 \pi c} \ddot{\vec{v}}$$

12. A ma connaissance, L^AT_EX n'a pas prévu de triple point et je n'ai trouvé d'autre solution de superposer le dernier aux deux premiers ; que le lecteur franc-maçon qui aurait reconnu en moi un frère se détrompe et veuille bien m'excuser.

qui admet comme solution une exponentielle croissante donc divergente. C'est l'une des faiblesses de la théorie de MAXWELL.

De la même façon, l'électron qui, dans le modèle planétaire de BOHR, tourne autour du noyau, rayonne de l'énergie, en perd donc et doit donc spiraler et finir par tomber sur le noyau, l'atome serait donc instable. Force est de constater qu'il n'en est rien.

C'est pour résoudre ce type de contradiction, toutes à l'échelle atomique, que l'on a mis en place la mécanique quantique.

4.f Diffusion Rayleigh. Ciel bleu, soleil couchant rouge, rayon vert.

• Le rayonnement solaire.

La puissance surfacique émise par le soleil n'est pas également répartie dans le spectre. Si l'on appelle $\mathcal{P}_s$ la densité spectrale énergétique, définie de sorte que $\mathcal{P}_s d\omega$ soit la puissance surfacique émise correspondant à l'intervalle de pulsations $[\omega, \omega + d\omega]$, celle-ci est conforme à la théorie thermodynamique du corps noir (voir chapitre E-IX) , paramétrée par une température, ici la température de la surface solaire (environ 6000 K). La figure 2 à gauche, p. 27, donne $\mathcal{P}_s$, en unités arbitraires, en fonction de ω entre $\omega_{min} = \omega_{rouge}$ et $\omega_{max} = \omega_{violet} \approx 2\omega_{min}$.

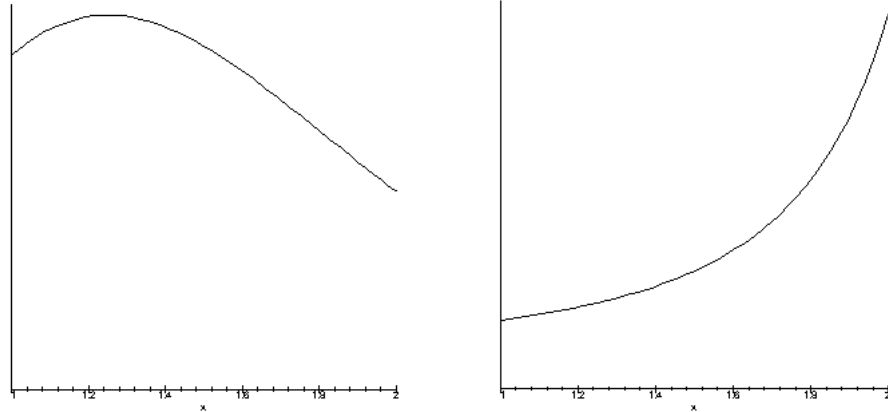


FIGURE 2 – Diffusion Rayleigh.

• Le dipôle oscillant excité

Sous l'action du champ électromagnétique solaire, les molécules d'azote et d'oxygène se déforment. Il se trouve que le modèle de l'électron élastiquement lié donne de bons

résultats, tout au moins dans la partie visible du spectre électromagnétique. Il sera étudié en détail dans le chapitre B-XII consacré à l'électromagnétisme dans la matière.

Résumons ce qu'on y apprendra : sous l'action d'un champ $E_0 \exp(j \omega t) \vec{e}_z$, la molécule se comporte comme un dipôle de moment $\underline{\alpha} E_0 \exp(j \omega t) \vec{e}_z$ avec $\underline{\alpha}$ de la forme suivante : $\underline{\alpha} = \frac{e^2}{(k-m\omega^2)+j\omega\lambda}$ qu'il faut identifier ce résultat avec la notation $p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ définie plus haut (à la phase à l'origine près). On a donc $p_0 = |\underline{\alpha}| E_0$ et donc $p_0^2 = |\underline{\alpha}|^2 E_0^2$ où E_0^2 est proportionnel à la puissance surfacique de la lumière solaire ($\vec{H} = (1/\mu_0) \vec{E} \wedge \vec{B}$). La figure 2 à droite, p. 27, donne $|\underline{\alpha}|^2$ en fonction de ω , dans le même intervalle et avec les mêmes unités que la courbe précédente. La pulsation de résonance est dans l'ultra-violet à $6.10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ (correspondant à 314 nm).

• Le bleu du ciel.

Les molécules de l'atmosphère, excitées par le rayonnement solaire rayonnent à leur tour, c'est le phénomène de *diffusion RAYLEIGH*, avec une puissance (cf supra) :

$$\mathcal{P}_{dif.} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12 \pi c} = C^{te} \omega^4 p_0^2 = C^{te} \omega^4 |\underline{\alpha}|^2 E_0^2 = C^{te} \omega^4 |\underline{\alpha}|^2 \mathcal{P}_s$$

Il est aisé, par multiplication de ω^4 (terme qui varie d'un facteur $2^4 = 16$ entre ω_{min} et ω_{max}), $|\underline{\alpha}|^2$ et $\mathcal{P}_s$, de tracer le graphe de $\mathcal{P}_{dif.}$ en fonction de ω , toujours avec les mêmes conventions (voir figure 3 p. 28)

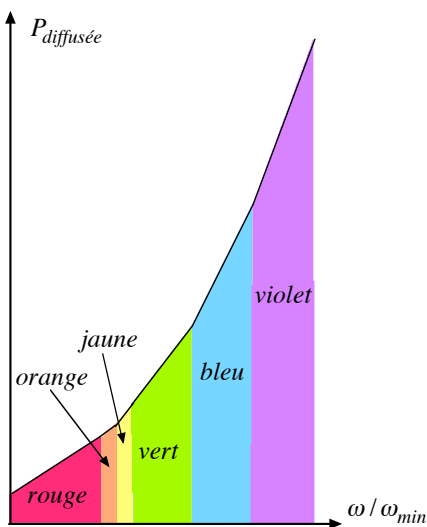


FIGURE 3 – Le bleu du ciel.

On remarque aisément que l'essentiel de l'énergie est rayonnée dans le violet et le bleu, ce qui explique la couleur du ciel, tout au moins lorsqu'il ne contient rien d'autre

(pollution urbaine, particules en suspension, gouttelettes d'eau ou cristaux de glace) que de l'oxygène et de l'azote. La croissance rapide de la courbe est, bien sûr, essentiellement due au facteur ω^4 dans la puissance rayonnée par le dipôle.

- **Polarisation du ciel bleu.**

Je suis au point O et je regarde le ciel dans une direction Ou , le soleil est à l'infini dans la direction de Ox , côté négatif, et envoie ses rayons parallèlement à Ox . Notons $\pi/2 - \alpha$ l'angle entre Ox et Ou (voir la figure 4 p. 29 ; en gras ce qui est hors du plan Oxy).

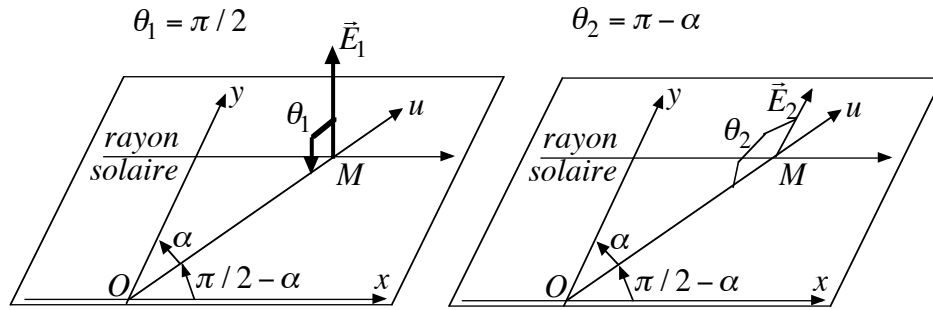


FIGURE 4 – Polarisation de la lumière diffusée.

On peut considérer que le rayonnement solaire est composé de deux rayonnements polarisés rectilignement, de même amplitude, l'un dans la direction orthogonale au plan (soit Oz) et l'autre dans le plan (soit selon Oy). Soit un dipôle en un point M de Ou excité par une onde 1, polarisée selon Oz , et oscillant donc parallèlement à Oz . Il émet une onde d'amplitude (cf supra) proportionnelle à $\sin \theta_1$, où θ_1 est l'angle entre Oz et MO , soit $\theta_1 = \pi/2$, son amplitude est donc maximale.

Par contre un dipôle excité par une onde 2 polarisée selon Oy , l'onde est en $\sin \theta_2$, où θ_2 est l'angle entre Oy et MO , soit $\theta_2 = \pi - \alpha$, son amplitude n'est pas maximale et l'onde totale reçue en O est donc partiellement polarisée (polarisation elliptique, en gros).

Le phénomène est le plus marqué si $\alpha = \pi/2$, auquel cas l'amplitude de la seconde onde diffusée est nulle et donc la lumière diffusée est polarisée selon Oz .

- **Le soleil couchant.**

Il va de soi que la puissance diffusée par l'atmosphère est prélevée sur celle des rayons solaires. Leur amplitude décroît donc au fur et à mesure de leur progression dans l'atmosphère. A midi, le soleil n'est pas loin de la verticale et ses rayons ne traversent qu'une trentaine de kilomètres d'atmosphère dense et l'affaiblissement est négligeable.

Par contre au soleil couchant, la longueur traversée est :

$$L = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} = \sqrt{2hR + h^2} \approx \sqrt{2Rh}$$

soit avec $R=6400$ km et $h \approx 30$ km, $L \approx 600$ km, soit vingt fois plus (voir figure 5 p. 30).

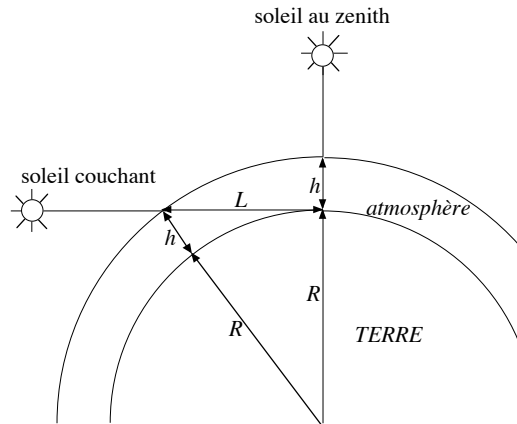


FIGURE 5 – Soleil couchant.

Dans ce cas, l'absorption n'étant pas la même pour toutes les longueurs d'onde, les rayons solaires ont complètement épuisé leurs composantes violette et bleue, diffusées fortement par l'atmosphère ; il ne reste qu'un peu de vert et beaucoup de jaune, orange et rouge, peu diffusés, d'où la couleur rouge-orangée du soleil couchant.

• Le rayon vert.

Ajoutons à cela que l'atmosphère est un milieu dispersif et qu'elle décompose la lumière du soleil couchant à la manière d'un prisme. La figure 6 p. 31 montre la formation du spectre en visualisant le rouge (R) l'orange (O), le jaune (J), le vert (V), le bleu (B) et le violet (Vt). Dans la position de la figure, seules les composantes du jaune au violet pointent vers le bas et peuvent être reçus au sol ; en pratique pas le bleu ni le violet totalement absorbés (cf supra ; on les a dessiné en pointillés). Quand le soleil plonge sous l'horizon (voir flèche descendante), le spectre se décale vers le haut (voir flèche ascendante) et finit par ne plus atteindre le sol, la dernière couleur à disparaître, puisqu'il n'y a plus ni bleu, ni violet, est donc le vert.

C'est le célèbre rayon vert, difficile à observer, car il faut 600 km de ciel pur dans la direction du ponant.

Que toutes ces explications sur les couleurs dans le ciel ne vous empêchent toutefois pas de jouir de leur poésie.

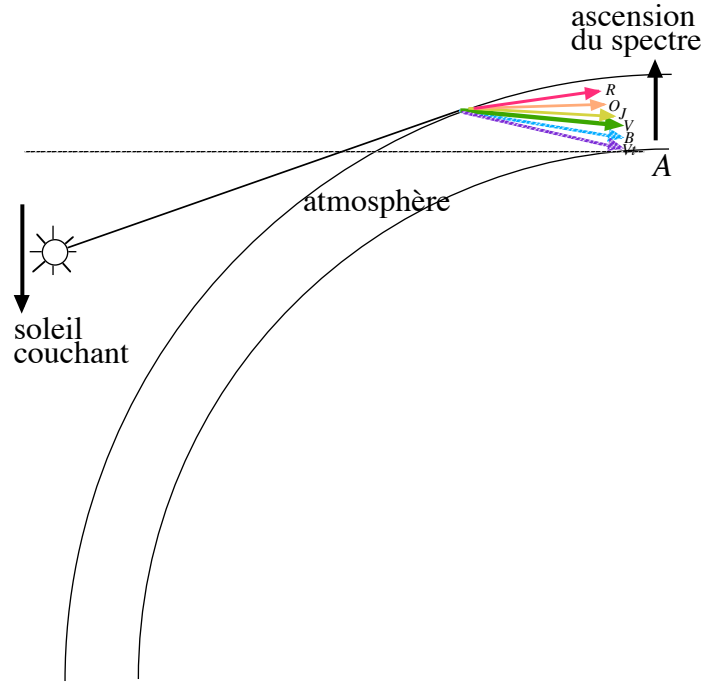


FIGURE 6 – rayon vert.

• Autres types de diffusion.

La diffusion de RAYLEIGH se fait par les molécules d'air dont la taille est très petite par rapport à la longueur d'onde de la lumière. D'autres mécanismes entrent en jeu quand les particules diffusantes sont plus grosses (poussières, gouttes d'eau, cristaux de glace). Si elles sont informes (poussières), la diffusion relève de la diffraction et si elles ont une forme régulière (gouttes sphériques), la diffusion relève alors de l'optique géométrique. Nous nous en tiendrons là.

5 Etude de cas complexes.

On a réussi à expliciter le champ électromagnétique sous cette quintuple hypothèse :

- on calcule le champ à une distance r grande devant la taille a de la distribution de charges, soit $a \ll r$,
- on se place dans un contexte de vitesses non relativistes, c'est-à-dire négligeables devant c , ce qui peut aussi se traduire par $a \ll \lambda = cT$ où T est un temps caractéristique de variation des caractéristiques de la distribution de charges,
- on se place dans la zone de rayonnement où les termes en $\frac{1}{r^2}$ sont négligeables devant ceux en $\frac{1}{cr}$, ce qui se traduit par $\lambda \ll r$,

- la distribution n'est pas monopolaire, c'est à dire que la charge totale Q , constante, de la distribution est nulle,
- la distribution est dipolaire, c'est-à-dire que son moment dipolaire électrique $\vec{p}(t)$ n'est pas constamment nul.

Nous allons explorer quelques situations où l'une de ces conditions n'est pas vérifiée et les quatre autres le restent afin de donner au lecteur quelques pistes à explorer. Il y a cinq conditions, il y aura donc cinq exemples.

5.a Distribution monopolaire.

On en a en fait déjà parlé antérieurement et ce n'est qu'un simple rappel. Dans le potentiel électrique, apparaît à grande distance le terme $\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\epsilon_0 r}$, mais la charge totale de la distribution de charges est constante, conservation de la charge oblige, et l'on retrouve un potentiel statique $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ qui ajoute au champ électrique dipolaire le champ statique $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$ car le gradient n'apporte plus les complications de la dérivation de $\tau = t - \frac{r}{c}$. Bref, il suffit d'ajouter au champ électromagnétique propagatif (formé d'un champ électrique et d'un champ magnétique que je note ici $\vec{E}_p$ et $\vec{B}_p$) un champ électrique statique (que je note ici $\vec{E}_s$).

Au niveau énergétique, on ajoute ainsi au vecteur de POYNTING le terme supplémentaire $\frac{1}{\mu_0} \vec{E}_s \wedge \vec{B}_p$ qui, en régime périodique sinusoïdal, a une moyenne nulle ; il en va de même pour la puissance rayonnée.

5.b Hors de la zone de rayonnement.

Les hypothèses $a \ll r$ et $a \ll \lambda$ sont conservées, donc les expressions des potentiels (voir paragraphes 3.b et 3.c débutant respectivement p. 16 et p. 18) sont encore valables. Par contre, si l'hypothèse $\lambda \ll r$ est abandonnée, dans l'expression des champs qui en résulte, les termes en $\frac{1}{r^2}$ cessent d'être négligeables devant ceux en $\frac{1}{cr}$. Mais puisque nous avons effectué les calculs plus haut (voir paragraphes 4.a et 4.b débutant respectivement p. 19 et p. 21) puis supprimé les termes négligeables, on sait calculer les champs dans cette situation pour la bonne raison qu'on l'a fait ou peu s'en faut (quelques calculs n'ont été qu'ébauchés).

5.c Rayonnement d'une antenne demi-onde.

• Le dispositif.

Une antenne est un conducteur filiforme rectiligne (sur l'axe Oz), de longueur a finie (et centré sur le point O), parcouru par un courant sinusoïdal de la forme $I(z, t) = f(z) \cos \omega t$. Bien évidemment, l'intensité doit s'annuler aux extrémités sinon il y aurait accumulation

de charges, impossible en l'absence de condensateur. La fonction $f(z)$ doit s'annuler aux extrémités, on peut donc proposer une analogie avec les cordes vibrantes¹³ et affirmer que $f(z)$ est décomposable en fondamental et harmoniques. Le fondamental est tel que la longueur de l'antenne soit une demi-longueur d'onde (d'où le nom de l'antenne) et $f(z)$, de période $2a$, s'écrit alors $f(z) = I_0 \cos\left(\pi \frac{z}{a}\right)$ pour s'annuler en $z = \pm \frac{a}{2}$. On se limitera ici à ce seul mode fondamental.

Pour déterminer ω , point n'est besoin d'étudier ce qui se passe dans le fil car ce qui s'y passe se raccorde par continuité¹⁴ à la surface avec un champ électromagnétique de même pulsation ω et avec la même allure de champ stationnaire de vecteur d'onde $k = \frac{\pi}{a}$ qui, puisqu'on est alors dans le vide, vérifie l'équation de propagation d'où $\omega = ck = \frac{\pi c}{a}$. Ce point mérite certes une vérification expérimentale, mais soyez persuadé qu'il y a bien longtemps qu'elle a été effectuée.

Classiquement, pour compenser les phénomènes dissipatifs (effet JOULE dans le fil, sans oublier le rayonnement que l'on est en train d'étudier), il faut un excitateur ; dans la pratique, le fil est coupé en son centre O et les deux brins sont réunis aux deux bornes d'un générateur de courant, non parfait en pratique, c'est-à-dire un générateur de NORTON¹⁵. Il faut qu'il ait la fréquence $\omega = ck = \frac{\pi}{a}$ pour engendrer une résonance, c'est pourquoi l'on dit aussi que l'antenne est accordée.

• Calcul du potentiel vecteur.

Par essence, la taille de l'antenne n'est pas négligeable devant la longueur d'onde (c'en est la moitié) et l'on ne peut donc pas reprendre les résultats du modèle non-relativiste pour trouver le potentiel vecteur. Ici ce n'est pas la vitesse des électrons dans le fil, au plus de l'ordre du millimètre par seconde¹⁶, mais celle de l'onde qui compte. De toute façon, d'un point de vue opératoire, l'approximation non-relativiste intervient par $a \ll \lambda = cT = 2\pi \frac{c}{\omega}$

La formule des potentiels retardés (voir partie 1 débutant p. 5), adaptée à la situation filiforme donne :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{I\left(z, t - \frac{\|\vec{P}(z)\vec{M}\|}{c}\right) d\vec{\ell}}{\|\vec{P}(z)\vec{M}\|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{I\left(z, t - \frac{r(z)}{c}\right)}{r(z)} dz \vec{e}_z$$

où $P(z)$ est le point de cote z sur Oz et $r(z) = \|\vec{P}(z)\vec{M}\|$.

Si l'on se place à grande distance, soit $r \gg a$, on a (voir paragraphe 3.a débutant p. 15) :

$$r(z) = r - \vec{u} \cdot \overrightarrow{OP(z)} = r - \vec{e}_r \cdot (z \vec{e}_z) = r - z \cos \theta$$

13. Voir chapitre D-II.

14. de certaines composantes, voir chapitre C-XIII.

15. Le chapitre C-V d'électrocinétique montre que c'est la même chose qu'un générateur de THÉVENIN, c'est-à-dire un générateur de tension non parfait ; ce n'est qu'une question de point de vue.

16. Pour être parlant, c'est la vitesse de l'escargot au galop !

où, en introduisant les coordonnées sphériques relatives au point M où l'on calcule $\vec{A}$, θ est l'angle entre Oz et OM . Puis, en reprenant le raisonnement du paragraphe 3.b débutant p. 16, si $r \gg a$, on pourra confondre $r(z)$ avec r ; par contre puisque a n'est pas négligeable devant λ , on ne pourra pas dans I confondre $\tau(z) = t - \frac{r-z \cos \theta}{c}$ avec $\tau = t - \frac{r}{c}$, d'où :

$$\begin{aligned} \vec{A}(M, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{e}_z \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} I\left(z, t - \frac{r(z)}{c}\right) dz = \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{e}_z \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} I\left(z, \tau + \frac{z \cos \theta}{c}\right) dz = \dots \\ &\dots = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} \vec{e}_z \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\pi \frac{z}{a}\right) \cos\left(\pi \frac{c\tau}{a} + \pi \frac{z \cos \theta}{a}\right) dz = \dots \\ &\dots = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} \vec{e}_z \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\pi \frac{z}{a}\right) \cos\left(\omega \tau + \pi \frac{z \cos \theta}{a}\right) dz \end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale est de routine, mais nécessite une bonne habitude de la trigonométrie ; je détaille pour ceux qui ne s'y sentent pas à l'aise. On commence par le changement de variable $u = \pi \frac{z}{a}$ puis on linéarise et l'on intègre :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\pi \frac{z}{a}\right) \cos\left(\omega \tau + \pi \frac{z \cos \theta}{a}\right) dz &= \frac{a}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \cos(\omega \tau + u \cos \theta) du = \dots \\ \dots &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos[u(1 + \cos \theta) + \omega \tau] du + \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos[u(1 - \cos \theta) - \omega \tau] du = \dots \\ \dots &= \frac{a}{2\pi} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1 + \cos \theta) + \omega \tau\right] - \sin\left[-\frac{\pi}{2}(1 + \cos \theta) + \omega \tau\right]}{1 + \cos \theta} + \dots \\ &\dots \frac{a}{2\pi} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta) - \omega \tau\right] - \sin\left[-\frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta) - \omega \tau\right]}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

On transforme les différences en produits puis on utilise $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \varphi$ et les parités des fonctions sinusoïdales :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos\left(\pi \frac{z}{a}\right) \cos\left(\omega \tau + \pi \frac{z \cos \theta}{a}\right) dz &= \dots \\ \dots &= \frac{a}{\pi} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1 + \cos \theta)\right] \cos(\omega \tau)}{1 + \cos \theta} + \frac{a}{\pi} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta)\right] \cos(-\omega \tau)}{1 - \cos \theta} = \dots \\ \dots &= \frac{a}{\pi} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \theta\right] \cos(\omega \tau)}{1 + \cos \theta} + \frac{a}{\pi} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \theta\right] \cos(\omega \tau)}{1 - \cos \theta} = \dots \\ \dots &= \frac{a}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \cos(\omega \tau)}{1 + \cos \theta} + \frac{a}{\pi} \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \cos(\omega \tau)}{1 - \cos \theta} = \dots \\ \dots &= \frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \cos(\omega \tau) \left(\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta}\right) = \dots \\ \dots &= \frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \cos(\omega \tau) \frac{2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2a \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \cos(\omega \tau)}{\pi \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4 \pi r} \vec{e}_z \frac{2 a \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \cos(\omega \tau)}{\pi \sin^2 \theta}$$

d'où il est intéressant de faire disparaître a grâce à $\omega = \frac{\pi c}{a}$ pour éviter que n'apparaissent deux grandeurs liées par une relation où ne figurent que des constantes universelles, mathématiques ou physiques. Donc :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0 I_0 c \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \cos(\omega \tau)}{2 \pi \omega r \sin^2 \theta} \vec{e}_z$$

• Calcul du champ électromagnétique.

Dans la zone de rayonnement ($\lambda \ll r$), les résultats du paragraphe 4.b débutant p. 21 sont valables, soit :

$$\vec{B} = \frac{\dot{\vec{A}}}{c} \wedge \vec{e}_r = -\frac{\mu_0 I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \sin(\omega \tau)}{2 \pi r \sin \theta} \vec{e}_\varphi$$

car $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \sin \theta \vec{e}_\varphi$ et :

$$\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{e}_r = -\frac{\mu_0 I_0 c \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \sin(\omega \tau)}{2 \pi r \sin \theta} \vec{e}_\theta$$

car $\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = \sin \theta \vec{e}_\theta$

• Puissance rayonnée.

Le vecteur de POYNTING est :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0^2 c \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \sin^2(\omega \tau)}{4 \pi^2 r^2 \sin^2 \theta} \vec{e}_r$$

de valeur moyenne temporelle :

$$\langle \vec{H} \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{8 \pi^2 r^2 \sin^2 \theta} \vec{e}_r$$

On trouvera ci-dessous (figure 7 p. 36) le graphe de la fonction $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}$ superposé à celui de $\sin^2 \theta$ (en pointillé, fonction obtenue pour le dipôle oscillant au paragraphe 4.c débutant p. 23) : l'antenne demi-onde est à peine moins directive que le dipôle oscillant.

La puissance moyenne à travers une sphère de rayon r , d'élément de surface $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$ est :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \oint \langle \vec{H} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8 \pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{4 \pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta$$

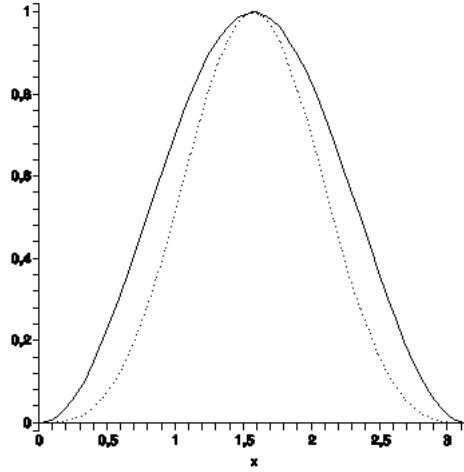


FIGURE 7 – Diagramme d'émission d'une antenne demi-onde.

où l'intégrale $J = \int_0^\pi \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} d\theta$ ne peut être calculée que par des voies numériques ; sa valeur approchée¹⁷ est $J = 1,219$.

• Résistance d'antenne.

Par analogie avec $\langle \mathcal{P} \rangle = R I_{eff}^2 = R I_0^2 / 2$, on peut définir une résistance de rayonnement ou d'antenne égale à

$$R = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta$$

Il est remarquable que le résultat soit une constante universelle ; le calcul donne pour valeur 73Ω .

Remarque : l'adaptation d'impédance (voir le chapitre C-V consacré à l'électrocinétique) impose donc que le générateur qui alimente l'antenne ait la même résistance interne.

• Gain de l'antenne.

On appelle gain d'une antenne le rapport, à r donné, de la valeur maximale $\Pi_{\max.}$ de $\langle \Pi \rangle$ vis-à-vis de la direction, obtenu ici (voir figure) pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ de valeur $\Pi_{\max.} = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2}$ à une valeur $\Pi_{\text{unif.}}$ qui donnerait la même puissance moyenne, soit ici $\Pi_{\text{unif.}} = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{4\pi r^2} =$

¹⁷. Désormais, les logiciels de calculs formels effectuent en une fraction de seconde ce qu'on me demandait d'effectuer à la main en une heure.

$\frac{\mu_0 I_0^2 c}{16 \pi^2 r^2} J$ où J est l'intégrale définie ci-dessus. Le gain est donc $G = \frac{2}{J} = 1,64$, c'est modeste et l'on améliore nettement ce gain en plaçant les antennes au foyer de paraboloïdes.

• Antennes réceptrices.

Si le mouvement d'électrons dans l'antenne provoque l'émission d'une onde sphérique divergente, en renversant formellement le sens du temps, une onde sphérique convergente provoque le mouvement rétrograde des électrons ; c'est le principe de l'antenne réceptrice.

5.d Rayonnements quadripolaire et magnéto-dipolaire.

On a vu dans le paragraphe 3.b débutant p. 16 que l'on pouvait donner l'expression approché suivant au potentiel vecteur :

$$\vec{A}(M, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c} \right)}{\|\vec{PM}\|} dV_P \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(P, \tau) dV_P = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}$$

où $\|\vec{PM}\| \approx r - \vec{u} \cdot \vec{OP}$ peut être remplacé par r dans l'hypothèse non-relativiste.

Que se passe-t-il si $\vec{p}$ est constamment nul ? Reprendre la philosophie de développer chaque facteur dépendant de P dans l'expression du potentiel vecteur retardé jusqu'à son premier terme non nul. Pour $\frac{1}{\|\vec{PM}\|}$, c'est toujours $\frac{1}{r}$ mais pour $\vec{j} \left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c} \right)$, c'est, puisque l'ordre zéro est désormais nul :

$$\begin{aligned} \vec{j} \left(P, t - \frac{\|\vec{PM}\|}{c} \right) &= \vec{j} \left(P, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c} \right) = \vec{j} \left(P, \tau + \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c} \right) = \dots \\ &\dots = \vec{j}(P, \tau) + \dot{\vec{j}}(P, \tau) \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c} + \dots = \dot{\vec{j}}(P, \tau) \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c} + \dots \end{aligned}$$

Au premier ordre non nul, on a donc :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathbb{R}^3} \dot{\vec{j}}(P, \tau) \frac{\vec{u} \cdot \vec{OP}}{c} dV_P = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{d}{dt} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(P, \tau) (\vec{u} \cdot \vec{OP}) dV_P \right)$$

Reste à donner du sens à l'intégrale $\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(P, \tau) (\vec{u} \cdot \vec{OP}) dV_P$. Les choses sont plus lisibles en réécrivant les choses dans un contexte de distribution discrète, quitte à chercher ensuite une justification directe via l'analyse vectorielle ; on a utilisé cette démarche dans le paragraphe 3.b débutant p. 16 mais ici la justification a posteriori est trop artificielle

pour être intéressante et nous nous permettrons d'en faire l'impasse. Nous traduisons donc $\iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(P, \tau) (\vec{u} \cdot \vec{OP}) dV_P$ en $\sum q_i \vec{v}_i (\vec{u} \cdot \vec{OP}_i) = \sum q_i \frac{d\vec{OP}_i}{dt} (\vec{u} \cdot \vec{OP}_i)$ où les $\vec{v}_i$ sont calculés en $\tau = t - \frac{r}{c}$

La suite n'est pas très naturelle, elle utilise deux formules différentes où apparaît la somme recherchée. La première est une dérivée :

$$\frac{d}{dt} \sum q_i (\vec{u} \cdot \vec{OP}_i) \vec{OP}_i = \sum q_i (\vec{u} \cdot \vec{v}_i) \vec{OP}_i + \sum q_i (\vec{u} \cdot \vec{OP}_i) \vec{v}_i$$

et la seconde un double produit vectoriel :

$$\sum q_i \vec{u} \wedge (\vec{OP}_i \wedge \vec{v}_i) = \sum q_i (\vec{u} \cdot \vec{v}_i) \vec{OP}_i - \sum q_i (\vec{u} \cdot \vec{OP}_i) \vec{v}_i$$

et la demi-somme conduit à :

$$\sum q_i (\vec{u} \cdot \vec{OP}_i) \vec{v}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum q_i (\vec{u} \cdot \vec{OP}_i) \vec{OP}_i - \frac{1}{2} \sum q_i \vec{u} \wedge (\vec{OP}_i \wedge \vec{v}_i)$$

soit encore, en profitant de l'antisymétrie du produit vectoriel :

$$\sum q_i \vec{v}_i (\vec{u} \cdot \vec{OP}_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum q_i (\vec{u} \cdot \vec{OP}_i) \vec{OP}_i + \left(\sum \frac{1}{2} q_i \vec{OP}_i \wedge \vec{v}_i \right) \wedge \vec{u}$$

Reste à identifier les deux grandeurs ainsi apparues que l'on peut ou non retranscrire en répartition volumique.

Le vecteur $\sum \frac{1}{2} q_i \vec{OP}_i \wedge \vec{v}_i = \sum \frac{1}{2} \vec{OP}_i \wedge (q_i \vec{v}_i)$ se traduit en :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \vec{OP} \wedge \vec{j}(P) dV_P$$

où l'on reconnaît la définition du moment dipolaire magnétique $\vec{m}$ (voir le chapitre C-IV consacré aux dipôles électriques et magnétiques).

Le vecteur $\sum q_k (\vec{u} \cdot \vec{OP}_k) \vec{OP}_k$ (on change l'indice « muet » en k pour réserver i et j à la matrice qui suit) est fonction linéaire de vecteur colonne $\vec{u}$ de matrice $(\tilde{Q})$, symétrique, de coefficients (avec $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$) $\tilde{Q}_{ij} = \sum q_k x_{ki} x_{kj}$ (x_{ki} est la i -ème coordonnée de la charge de numéro k) qui est manifestement cousine avec la matrice (Q) qui gère les propriétés quadripolaires électriques de la distribution de charges (voir le chapitre C-IV consacré aux dipôles électriques et magnétiques) où l'on avait $Q_{ij} = \frac{3}{2} \sum q_k x_{ki} x_{kj} - \frac{1}{2} (\sum q_k OP_k^2) \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est nul si $i \neq j$ et égal à l'unité si $i = j$). Il ne m'apparaît pas essentiel d'exprimer $(\tilde{Q})$ en fonction de (Q) , car la première peut être considérée comme une donnée liée à la répartition.

On peut donc écrire finalement :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\tilde{Q}) \vec{u} + \vec{m} \wedge \vec{u} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \left[\frac{1}{2} (\ddot{\tilde{Q}}) \vec{u} + \dot{\vec{m}} \wedge \vec{u} \right]$$

où, bien sûr, $(\ddot{Q})$ et $\dot{\vec{m}}$ sont calculés en $\tau = t - \frac{r}{c}$.

Dans la zone de rayonnement, le champ électromagnétique se calculera ensuite de façon classique par

$$\vec{B} = \dot{\vec{A}} \wedge \frac{\vec{e}_r}{c}$$

$$\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{e}_r$$

et il ne me paraît pas utile de développer.

Le champ lié à $\vec{m}$ s'appelle bien évidemment rayonnement magnéto-dipolaire et celui lié à $(\ddot{Q})$ rayonnement quadripolaire.

Remarque : en ordre de grandeur $\vec{p} = \sum q_i \vec{OP}_i$ est de l'ordre de Qa où a est la taille du système et Q est non $\sum q_i$, qui peut être nul, mais $\sum |q_i|$ et donc $\dot{\vec{p}}$ de l'ordre de $\frac{Qa}{T}$ où T est un temps caractéristique d'évolution de la distribution (cf supra). Par ailleurs, d'une part $\vec{m} = \sum \frac{1}{2} q_i \vec{OP}_i \wedge \vec{v}_i$ est de l'ordre de $Qa \frac{a}{T}$ et donc $\frac{1}{c} \dot{\vec{m}} \wedge \vec{u}$ de l'ordre de $\frac{Qa^2}{cT^2}$ et d'autre par les $\tilde{Q}_{ij} = \sum q_k x_{ki} x_{kj}$ sont de l'ordre de Aa^2 donc $\frac{1}{2c} (\ddot{Q}) \vec{u}$ de l'ordre de $\frac{Qa^2}{cT^2}$. Si $\vec{p}$ est non nul, on a $\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}$ en négligeant l'ordre suivant $\frac{\mu_0}{4\pi cr} \left[\frac{1}{2} (\ddot{Q}) \vec{u} + \dot{\vec{m}} \wedge \vec{u} \right]$; ce qui est licite si $\frac{Qa^2}{cT^2} \ll \frac{Qa}{T}$ soit $a \ll \lambda = cT$, soit notre hypothèse de travail. Dans l'hypothèse non-relativiste les rayonnements magnéto-dipolaire et quadripolaire sont masqués par le rayonnement dipolaire sauf si celui-ci est nul.

5.e Champ électromagnétique créé par une charge en mouvement.

• Introduction et rappels.

Le cas le plus délicat à traiter est celui du champ électromagnétique près de la distribution de charge, là où l'approximation $a \ll r$ n'est plus valable. Dans le cas d'une distribution volumique, il n'y a pas de remarque à portée universelle qui fasse avancer les choses¹⁸; par contre, dans le cas discret, il suffit de sommer les champs créés par chaque charge... à condition toutefois qu'il n'y ait que peu de charges.

Nous allons donc ici calculer explicitement le champ électromagnétique créé par une unique charge q situé en un point $P(t)$ mobile, de vitesse $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OP}(t)}{dt}$. Rappelons que nous avons établi, dans la paragraphe 2.b débutant p. 8, l'expression des potentiels créés

18. « schmilblick » eût paru moins sérieux.

en un point M et à l'instant t , appelés potentiels de LIÉNARD-WIECHERT :

$$\begin{cases} V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c}} \\ \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}(\tau)}{R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c}} \end{cases}$$

où τ , en fait $\tau(M, t)$, est la solution unique de $R(\tau) = \|\vec{R}(\tau)\| = \|\vec{P}(\tau)M\| = c(t - \tau)$.

• **Première étape.**

Il ne reste qu'à calculer le champ électromagnétique par les formules $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ et $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ avec la petite complication que τ n'est pas défini explicitement mais comme solution d'une équation. Commençons par débroussailler. On se convainc vite que :

$$-\vec{\text{grad}} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left[R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c}\right]^2} \vec{\text{grad}} \left[R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c} \right]$$

et que :

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \frac{\partial \vec{v}(\tau)}{\partial t}}{R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c}} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}(\tau)}{\left[R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c}\right]^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c} \right]$$

où $\frac{\partial \vec{v}(\tau)}{\partial t} = \dot{\vec{v}}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t}$ (formule classique de dérivation d'une fonction composée).

Enfin, grâce à la formule $\vec{\text{rot}}(a \vec{U}) = a \vec{\text{rot}} \vec{U} + \vec{\text{grad}} a \wedge \vec{U}$:

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{\text{rot}} \vec{v}(\tau)}{R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c}} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{\left[R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c}\right]^2} \vec{\text{grad}} \left[R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c} \right] \wedge \vec{v}(\tau)$$

où, en observant que, par exemple, $\frac{\partial v_z(\tau)}{\partial y} = \dot{v}_z(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial y}$ et expressions analogues, on déduit que $\vec{\text{rot}}[\vec{v}(\tau)] = \vec{\text{grad}} \tau \wedge \dot{\vec{v}}(\tau)$

Pour alléger l'écriture, nous noterons désormais, là où il est inutile d'en détailler la valeur, $R^* = R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c}$, d'où :

$$-\vec{\text{grad}} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^{*2}} \vec{\text{grad}} R^*$$

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{R^*} \frac{\dot{\vec{v}}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t}}{R^*} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{R^{*2}} \frac{\vec{v}(\tau) \frac{\partial R^*}{\partial t}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{R^*} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \tau \wedge \dot{\vec{v}}(\tau)}{R^*} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{R^{*2}} \overrightarrow{\text{grad}} R^* \wedge \vec{v}(\tau)$$

Il nous reste donc à calculer $\frac{\partial \tau}{\partial t}$, $\overrightarrow{\text{grad}} \tau$, $\frac{\partial R^*}{\partial t}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} R^*$

• **Deuxième étape.**

Commençons par les dérivées temporelles. On sait que $\tau(M, t)$ est solution de l'équation $R(\tau) = c(t - \tau)$, d'où en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{\partial R(\tau)}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)$$

Une relation pour deux inconnues $\frac{\partial R(\tau)}{\partial t}$ et $\frac{\partial \tau}{\partial t}$, ça ne suffit pas. On sait aussi que $R(\tau) = \|\vec{R}(\tau)\|$ ou mieux $R(\tau)^2 = \vec{R}(\tau)^2$, d'où en dérivant par rapport au temps, après simplification par 2 :

$$R(\tau) \frac{\partial R(\tau)}{\partial t} = \vec{R}(\tau) \cdot \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial t}$$

Deux relations pour trois inconnues $\frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial t}$, $\frac{\partial R(\tau)}{\partial t}$ et $\frac{\partial \tau}{\partial t}$, ça ne suffit toujours pas.

Le point-clef est que $\vec{R}(\tau) = \overrightarrow{P(\tau)M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP(\tau)}$ qui donne accès à $\frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial t}$ (plus précisément $\left. \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial t} \right|_M$ car on dérive à M fixé) :

$$\frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial t} = -\frac{\partial \overrightarrow{OP}(\tau)}{\partial t} = -\vec{v}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

où l'on retrouve une donnée du problème, la vitesse de la charge. On n'est pas tombé dans le piège de la dérivation de la fonction composée $\overrightarrow{OP}(\tau)$.

Il n'y a plus qu'à en tirer les conclusions ; on reporte ce dernier résultat dans l'avant-dernier, d'où :

$$\frac{\partial R(\tau)}{\partial t} = -\frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{R(\tau)} \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

que l'on reporte dans le premier, d'où successivement :

$$-\frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{R(\tau)} \frac{\partial \tau}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)$$

$$\begin{aligned}
\left[c - \frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{R(\tau)} \right] \frac{\partial \tau}{\partial t} &= c \\
\frac{c}{R(\tau)} \left[R(\tau) - \frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{R(\tau)} \right] \frac{\partial \tau}{\partial t} &= c \\
\frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{R(\tau)}{R(\tau) - \frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{R(\tau)}} = \frac{R(\tau)}{R^*}
\end{aligned}$$

d'où aussi :

$$\frac{\partial R(\tau)}{\partial t} = - \frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{R(\tau)} \frac{\partial \tau}{\partial t} = - \frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{R^*}$$

et

$$\frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial t} = - \vec{v}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} = - \frac{R(\tau) \vec{v}(\tau)}{R^*}$$

Est-ce tout ? Non, nous avons aussi besoin de :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R^*}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(R(\tau) - \frac{\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)}{c} \right) = \dots \\
&= \frac{\partial R(\tau)}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{v}(\tau)}{\partial t} \cdot \vec{R}(\tau) - \frac{1}{c} \vec{v}(\tau) \cdot \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial t} = \dots \\
&= \frac{\partial R(\tau)}{\partial t} - \frac{1}{c} \dot{\vec{v}}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{v}(\tau) \cdot \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial t} = \dots \\
&= - \frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{R^*} - \frac{1}{c} \dot{\vec{v}}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau) \frac{R(\tau)}{R^*} + \frac{1}{c} \vec{v}(\tau) \cdot \frac{R(\tau) \vec{v}(\tau)}{R^*} = \dots \\
&= - \frac{\vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)}{R^*} - \frac{R(\tau) [\vec{R}(\tau) \cdot \dot{\vec{v}}(\tau)]}{c R^*} + \frac{R(\tau) \vec{v}(\tau)^2}{c R^*}
\end{aligned}$$

• Première synthèse.

A ce stade nous pouvons déjà donner l'expression de $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; pour alléger du facteur $\frac{\mu_0 q}{4\pi}$ je noterai $\vec{A} = \frac{4\pi}{\mu_0 q} \vec{A}$ et donc, en cessant de noter l'argument τ :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= - \frac{\dot{\vec{v}} \frac{\partial \tau}{\partial t}}{R^*} + \frac{\vec{v}}{R^{*2}} \frac{\partial R^*}{\partial t} = \dots \\
&= - \frac{\dot{\vec{v}}}{R^*} \frac{R}{R^*} + \frac{\vec{v}}{R^{*2}} \left[- \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R^*} - \frac{R [\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}]}{c R^*} + \frac{R \vec{v}^2}{c R^*} \right] = \dots \\
&= - \frac{R \dot{\vec{v}}}{R^{*2}} - \frac{[\vec{R} \cdot \vec{v}] \vec{v}}{R^{*3}} - \frac{R [\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}] \vec{v}}{c R^{*3}} + \frac{R [\vec{v}^2] \vec{v}}{c R^{*3}}
\end{aligned}$$

• **Troisième étape.**

Passons aux gradients en commençant par les dérivations vis-à-vis de x dont on déduira celles vis-à-vis de y et z par analogie puis les gradients par synthèse vectorielle. On ne change pas une méthode qui gagne, reprenons celle utilisée pour les dérivations temporelles.

On dérive $R(\tau) = c(t - \tau)$, $R(\tau)^2 = \vec{R}(\tau)^2$ et $\vec{R}(\tau) = \overrightarrow{P(\tau)M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP(\tau)}$ par rapport à x , une des coordonnées du point M (on cherche en effet à calculer $\text{rot } \vec{A}(M, t)$ et $\text{grad } V(M, t)$ donc x est relatif à M , pas à P) qui figure explicitement dans $\overrightarrow{OM}$ et tacitement dans τ , on arrive, avec $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$, à :

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(\tau)}{\partial x} &= -c \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ R(\tau) \frac{\partial R(\tau)}{\partial x} &= \vec{R}(\tau) \cdot \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial x} &= \vec{e}_x - \frac{\partial \overrightarrow{OP}(\tau)}{\partial x} = \vec{e}_x - \vec{v}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x}\end{aligned}$$

On en tire :

$$-c \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial R(\tau)}{\partial x} = \frac{\vec{R}(\tau)}{R(\tau)} \cdot \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial x} = \frac{\vec{R}(\tau)}{R(\tau)} \cdot \left[\vec{e}_x - \vec{v}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} \right]$$

d'où successivement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial x} &= \frac{-\vec{R}(\tau) \cdot \vec{e}_x}{c R(\tau) - \vec{R}(\tau) \cdot \vec{v}(\tau)} = \frac{-R_x(\tau)}{c R^*} \\ \frac{\partial R(\tau)}{\partial x} &= \frac{R_x(\tau)}{R^*} \\ \frac{\partial \vec{R}(\tau)}{\partial x} &= \vec{e}_x + \frac{R_x(\tau) \vec{v}(\tau)}{c R^*}\end{aligned}$$

et encore :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} [\vec{v}(\tau) \cdot \vec{R}(\tau)] &= \frac{\partial}{\partial x} [\vec{v}(\tau)] \cdot \vec{R}(\tau) + \vec{v}(\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\vec{R}(\tau)] = \dots \\ &= \dot{\vec{v}}(\tau) \frac{\partial \tau}{\partial x} \cdot \vec{R}(\tau) + \vec{v}(\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\vec{R}(\tau)] = \dots \\ &= -\frac{R_x(\tau) [\vec{R}(\tau) \cdot \dot{\vec{v}}(\tau)]}{c R^*} + \vec{v}(\tau) \cdot \left[\vec{e}_x + \frac{R_x(\tau) \vec{v}(\tau)}{c R^*} \right] = \dots \\ &= -\frac{R_x(\tau) [\vec{R}(\tau) \cdot \dot{\vec{v}}(\tau)]}{c R^*} + v_x(\tau) + \frac{R_x(\tau) \vec{v}(\tau)^2}{c R^*}\end{aligned}$$

On imagine par analogie les expressions des dérivées par rapport à y et z et l'on regroupe vectoriellement, en cessant de noter l'argument τ , d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}} \tau &= -\frac{\vec{R}}{c R^*} \\ \overrightarrow{\text{grad}} R &= \frac{\vec{R}}{R^*} \\ \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{v} \cdot \vec{R}) &= -\frac{\vec{R} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}})}{c R^*} + \vec{v} + \frac{\vec{R} (\vec{v}^2)}{c R^*} \\ \overrightarrow{\text{grad}} R^* &= \overrightarrow{\text{grad}} \left(R - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right) = \frac{\vec{R}}{R^*} + \frac{\vec{R} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}})}{c^2 R^*} - \frac{\vec{v}}{c} - \frac{\vec{R} (\vec{v}^2)}{c^2 R^*}\end{aligned}$$

• **Seconde synthèse.**

Nous pouvons désormais donner l'expression de $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$, toujours allégée du facteur $\frac{\mu_0 q}{4\pi}$ en notant $\vec{A} = \frac{4\pi}{\mu_0 q} \vec{A}$ et $\vec{B} = \frac{4\pi}{\mu_0 q} \vec{B}$. On a donc, avec $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \tau \wedge \dot{\vec{v}}}{R^*} - \frac{1}{R^{*2}} \overrightarrow{\text{grad}} R^* \wedge \vec{v} = \dots \\ \dots &= -\frac{\vec{R}}{c R^*} \wedge \frac{\dot{\vec{v}}}{R^*} - \frac{1}{R^{*2}} \left(\frac{\vec{R}}{R^*} + \frac{\vec{R} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}})}{c^2 R^*} - \frac{\vec{v}}{c} - \frac{\vec{R} (\vec{v}^2)}{c^2 R^*} \right) \wedge \vec{v} = \dots \\ \dots &= -\frac{\vec{R} \wedge \dot{\vec{v}}(\tau)}{c R^{*2}} - \frac{\vec{R} \wedge \vec{v}}{R^{*3}} - \frac{(\vec{R} \wedge \vec{v}) (\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}})}{c^2 R^{*3}} + \frac{(\vec{R} \wedge \vec{v}) (\vec{v}^2)}{c^2 R^{*3}}\end{aligned}$$

On est loin de la simple transcription de la formule de BIOT et SAVART ($I d\vec{\ell}$ remplacé par $q \vec{v}$) qui ne donnerait pour $\vec{B}$ que le seul deuxième terme, à condition de remplacer R^* par R .

De même en remplaçant $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $\frac{\mu_0}{4\pi} c^2$ et en notant pour la cohérence $\tilde{V} = \frac{4\pi}{\mu_0 q} V$ puis $\vec{E} = \frac{4\pi}{\mu_0 q} \vec{E}$, on a :

$$\begin{aligned}-\overrightarrow{\text{grad}} \tilde{V} &= \frac{c^2}{R^{*2}} \overrightarrow{\text{grad}} R^* = \frac{c^2}{R^{*2}} \left(\frac{\vec{R}}{R^*} + \frac{\vec{R} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}})}{c^2 R^*} - \frac{\vec{v}}{c} - \frac{\vec{R} (\vec{v}^2)}{c^2 R^*} \right) = \dots \\ \dots &= \frac{c^2 \vec{R}}{R^{*3}} + \frac{\vec{R} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}})}{R^{*3}} - \frac{c \vec{v}}{R^{*2}} - \frac{\vec{R} (\vec{v}^2)}{R^{*3}}\end{aligned}$$

On est loin de la simple transcription de la formule de COULOMB qui ne donnerait pour $\vec{E}$ que le premier terme, à condition de remplacer R^* par R .

Et l'on obtient $\vec{E}$ par addition à ce résultat, celui de $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ rappelé ci-dessous :

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{R \dot{\vec{v}}}{R^{*2}} - \frac{[\vec{R} \cdot \dot{\vec{v}}] \vec{v}}{R^{*3}} - \frac{R[\vec{R} \cdot \ddot{\vec{v}}] \vec{v}}{c R^{*3}} + \frac{R[\ddot{\vec{v}}^2] \vec{v}}{c R^{*3}}$$

• **Conseil de prudence et conclusion.**

Je n'ai trouvé nulle part de calcul explicite et un seul endroit le résultat, obtenu après indication des pistes à suivre mais « en omettant les calculs intermédiaires » et sous une présentation variante qui ne semble pas compatible avec mon résultat. Je ne pense pas m'être trompé dans mes calculs mais je conseille au lecteur de ne pas me faire une confiance aveugle.

J'ai indiqué dans le chapitre C-VIII consacré aux équations de MAXWELL que celles-ci adaptent de facto un point de vue eulérien (on s'intéresse aux charges d'un volume élémentaire fixe même s'il en sort ou s'il en rentre) et non lagrangien (on suit les charges dans leur déplacement) ; au vu des résultats qui viennent d'être établis, on se rend compte que c'est une excellente idée.