Chapitre D-II

Ondes stationnaires et progressives.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On dégage dans ce chapitre les notions fondamentales sur les ondes qu'on retrouvera dans tous les domaines de la physique comme, entre autres, la mécanique des solides élastiques (ondes mécaniques), la mécanique des fluides (ondes sonores) et l'électromagnétisme (ondes électromagnétiques) y compris dans le domaine de l'optique (optique physique). C'est en dire toute l'importance.

L'étude est menée de façon formelle de façon à s'adapter à tous les contextes. On explore les notions d'ondes stationnaires ou progressives, d'impédance, de réflexion et de transmission, d'onde planes, sphériques, voire plus complexes, d'ondes longitudinales ou transversales et de polarisation de ces dernières, d'ondes dans des milieux uni-, bi- ou tri-dimensionnels, discrets ou continus.

On fait apparaître des outils mathématiques adaptés comme la décomposition en série de Fourier, la transformation de Fourier, les fonctions de Bessel, les harmoniques sphériques.

Table des matières

D-II	Or	ndes stationnaires et progressives.	1
	1	Préambule	5
	2	Ondes stationnaires dans un milieu unidirectionnel	5
		2.a Recherche de solutions factorisées	5
		2.b Solutions compatibles avec les conditions aux limites	6
		2.c Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier	8
		2.d Solution compatible avec une condition initiale. \ldots \ldots \ldots	9
		2.e Ondes stationnaires forcées.	12
		2.f Exercice de style	13
	3	Ondes progressives dans un milieu unidirectionnel	18
		3.a Contexte expérimental	18
		3.b Recherche de solutions par changement de variables	19
		3.c Interprétation des solutions	20
		3.d Ondes progressives sinusoïdales	21
		3.e Transformation de Fourier	21
	4	Lien entre ondes stationnaires et ondes progressives	22
		4.a Cas des ondes sinusoïdales	22
		4.b Exemple de généralisation	22
	5	Couplage entre grandeurs conjuguées	24
		5.a Présentation axiomatique de la situation	24
		5.b Passage à l'équation de propagation	25
		5.c Notion d'impédance	25

	5.d Aspects énergétiques	27
6	Réflexion et transmission. \ldots	29
	6.a Une problématique récurrente	29
	6.b Coefficients de réflexion et de transmission	30
	6.c Coefficients énergétiques de réflexion et de transmission	32
	6.d Réflexion sur une impédance	33
7	Ondes bi- ou tri-dimensionnelles	34
	7. a Ondes stationnaires dans un milieu dimensionnel. 	34
	7.b Structure des ondes planes progressives dans un milieu tridimen- sionnel.	38
	7.c Réflexion et transmission d'ondes planes progressives tridimen- sionnelles	41
	7.d Ondes sphériques	45
	7.e Autres types d'ondes	47
8	Ondes unidirectionnelles dans un milieu discret. \ldots . \ldots . \ldots .	52
	8.a Ondes progressives dans un cristal monoatomique	52
	8.b Passage au continu	53
	8.c Etude énergétique	54
	8. d Ondes progressives dans un cristal biatomique	55
	8.e Ligne à retard	56

1 Préambule.

On peut mettre en évidence des phénomènes ondulatoires dans tous les domaines de la physique avec de nombreuses variantes. L'objet de ce chapitre est d'en étudier les propriétés communes, indépendantes du contexte. Aussi la présentation sera-t-elle purement formelle : on recherchera les fonctions de l'espace et du temps, notées f(M, t) qui soient solutions de l'équation de propagation ou équation de d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \,\Delta f$$

où Δf est le laplacien de f et c une constante dont il est facile de vérifier qu'elle est homogène à une vitesse.

La fonction f peut être scalaire ou vectorielle, auquel cas, par projection, ses trois composantes sur les trois axes cartésiens vérifient l'équation de propagation scalaire à laquelle on se ramène donc.

On tiendra compte, le cas échéant, de conditions aux limites et/ou de conditions initiales.

Pour une onde de nature particulière dans une situation particulière et/ou étudiée d'un point de vue particulier, on devrait trouver, éparpillés dans ce chapitre, les éléments nécessaires à son étude.

En particulier, chaque fois que dans un autre chapitre de ce cours apparaîtront des ondes, on utilisera les acquis de celui-ci pour alléger celui-là.

Les situations où l'équation de propagation contient des termes supplémentaires, dissipatifs par exemple, seront évoquées dans le chapitre D-IV.

2 Ondes stationnaires dans un milieu unidirectionnel.

Nous nous plaçons ici dans une situation unidirectionnelle, par exemple celle d'une corde vibrante. La position sera repérée par une abscisse x et l'équation de propagation est alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

2.a Recherche de solutions factorisées.

Nous essayons ici de trouver des solutions qui soient de la forme f(x,t) = g(x) h(t); en reportant dans l'équation de propagation, on obtient :

$$g(x) h''(t) = c^2 g''(x) h(t)$$

En divisant ¹ par $c^2 g(x) h(t)$, on arrive à :

$$\frac{1}{c^2} \frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}$$

équation de la forme $\forall x \ \forall t \ \Phi(t) = \Psi(x)$, ce qui entraîne² que Φ et Ψ sont des fonctions constantes. On a donc :

$$\frac{1}{c^2} \frac{h''(t)}{h(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} = Cte$$

La suite dépend du signe de la constante et du domaine dans lequel l'équation est valable.

- Si elle est positive (on la note k^2) alors $g''(x) = k^2 g(x)$ et $h''(t) = c^2 k^2 h(t)$; les fonctions g et h sont combinaisons linéaires respectivement de $\exp(kx)$ et $\exp(-kx)$ pour g et de $\exp(k ct)$ et $\exp(-k ct)$ pour h. Selon que x et/ou t peuvent tendre vers ∞ et/ou $-\infty$, on peut exclure certaines des exponentielles (voire toutes et donc exclure ce cas), sous peine de divergence.
- Si la constante est nulle alors g''(x) = 0 et h''(t) = 0; les fonctions g et h sont des fonctions affines. Si x et/ou t peuvent tendre vers ∞ ou $-\infty$, la fonction affine correspondante devient constante, sous peine de divergence.
- Si elle est négative (on la note $-k^2$) alors $g''(x) = -k^2 g(x)$ et $h''(t) = -c^2 k^2 h(t)$; les fonctions g et h sont sinusoïdales respectivement en kx et kct. Que x et/ou tpuissent tendre vers ∞ et/ou $-\infty$ ne pose dans ce cas aucun problème de divergence.

2.b Solutions compatibles avec les conditions aux limites.

En pratique, la recherche de solutions factorisées s'avère particulièrement efficace lorsque l'équation de propagation porte sur un milieu limité entre deux abscisses, l'une choisie comme origine x = 0 et l'autre que nous nommerons $x = \ell$ (cf l'exemple classique de la corde vibrante). La conception technique (ou parfois naturelle) du système étudié impose certaines conditions à la fonction f à ces deux extrémités, appelées *conditions aux limites*.

Le cas le plus classique est $\forall t \ f(0,t) = f(\ell,t) = 0$ (cf corde vibrante fixée à ses deux extrémités). On en déduit immédiatement (la solution est factorisée) que $g(0) = g(\ell) = 0$.

Si g''(x) = 0, g est une fonction polynomiale du premier degré qui s'annule en deux points, donc identiquement nulle. Il en est de même alors pour f = gh. C'est certes une solution, mais sans intérêt; elle correspond en général à la position d'équilibre.

Si $g''(x) = k^2 g(x)$, la fonction g, sauf si elle est identiquement nulle, est combinaison linéaire d'exponentielles qui peut s'écrire, en passant en trigonométrie hyperbolique, soit sous la forme $A \operatorname{ch}(x - a)$ soit sous la forme $B \operatorname{sh}(x - a)$; or ni l'une ni l'autre de ces fonctions ne s'annule en deux points. g donc f est donc nulle et c'est sans intérêt (cf supra).

^{1.} La solution que l'on obtiendra montrera que les points où f = g h s'annule ne posent pas problème.

^{2.} On en déduit en effet $\forall t \, \Phi(t) = \Psi(0)$ qui prouve que Φ est constante, et donc Ψ aussi.

Enfin, si $g''(x) = -k^2 g(x)$, la fonction g est sinusoïdale, soit $g(x) = g_0 \sin(kx + \varphi)$ où g_0 et φ sont des constantes à déterminer. La condition g(0) = 0 entraîne sin $\varphi = 0$ soit modulo 2π , $\varphi = 0$ (ou $\varphi = \pi$ mais que l'on ramène à $\varphi = 0$ en changeant le signe de g_0). La condition $g(\ell) = 0$ entraîne sin $(k \ell) = 0$ soit $k \ell = p \pi$ où p est un entier positif (non nul si l'on veut g non identiquement nul, cf supra).

La fonction $g_p(x) = g_0 \sin(k_p x) = \sin\left(p \pi \frac{x}{\ell}\right)$ est une solution possible à laquelle on associe une fonction $h_p(t)$ solution de $h''(t) = c^2 k_p^2 h(t)$, d'où :

$$h(t) = h_0 \cos(k_p c t + \psi) = h_0 \cos\left(p \pi \frac{c t}{\ell} + \psi\right)$$

où h_0 et ψ sont des constantes dépendant des conditions initiales. Finalement, en posant ³ $f_0 = g_0 h_0$, la fonction f_p définie par :

$$f_p(x,t) = f_0 \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) \cos\left(p\pi \frac{ct}{\ell} + \psi\right)$$

où f_0 et ψ sont des constantes, est solution de l'équation de propagation avec ces conditions initiales. Toute somme de telles solutions est aussi solution.

La solution f_1 est appelée mode fondamental et la solution f_p (avec $p \ge 2$) est appelée mode harmonique de rang p ou plus simplement harmonique p.

Pour x donné, f(x,t) est une fonction sinusoïdale de t d'amplitude locale $f_0 | \sin (p \pi \frac{x}{\ell}) |$ qui est nulle (on parle de *nœud de vibration*) pour $x_q = q \ell/p$ avec q entier entre 0 et p et maximale (on parle de *ventre de vibration*) pour $x'_q = (q+1/2) \ell/p$ avec q entier entre 0 et p-1. On définira plus loin (paragraphe 3.d p. 21) une longueur d'onde par $\lambda_p = 2\pi/k_p$, on voit qu'ici $\lambda_p = 2\ell/p$ et que les nœuds sont distants de $\lambda_p/2$, et de même pour les ventres et $\lambda_p/4$ sépare un nœud d'un ventre. La période est $T_p = 2\pi/\omega_p$ et l'on voit que $\lambda_p = cT_p = c/f_p$ D'où l'astuce mnémotechnique : la fréquence fondamentale s'obtient à partir de $\ell = \lambda_1/2$ et $\lambda_1 = c/f_1$.



FIGURE 1 – Fondamental et deux premiers harmoniques.

^{3.} Seul le produit $g_0 h_0$ a un sens car on peut multiplier g_0 par une constante et diviser h_0 par la même constante sans changer la fonction f.

La figure 1 p. 7 montre l'aspect de la corde à différents instants pour le mode fondamental et les harmoniques 2 et 3.

Un autre cas le plus classique de conditions aux limites est $\forall t \ f(0,t) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\ell,t) = 0$. Le même type de raisonnement conduit alors au fondamental suivant :

$$f_1(x,t) = f_0 \sin\left(\pi \frac{x}{2\ell}\right) \cos\left(\pi \frac{ct}{2\ell} + \psi\right)$$

avec uniquement des harmoniques impairs :

$$f_{2p+1}(x,t) = f_0 \sin\left[(2p+1)\pi \frac{x}{2\ell}\right] \cos\left[(2p+1)\pi \frac{ct}{2\ell} + \psi\right]$$

Une corde vibrante produit un son qui est somme d'un fondamental et de ses harmoniques; toute la musique occidentale a été construite à partir de là; l'harmonique 2 d'un son est son octave, l'harmonique 3 sa douzième (soit l'octave plus une quinte), l'harmonique 4 la double octave et l'harmonique 5 la double octave plus une tierce majeure. Une ancienne monographie que j'ai consacrée à ce sujet est intégrée à ce cours de mécanique vibratoire (chapitre D-III).

2.c Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.

Les travaux de FOURIER ont conduit, en mathématiques, à la théorie de la décomposition d'une fonction périodique en série de FOURIER dont nous donnerons ici les résultats essentiels.

Une fonction f périodique de période 2ℓ est la somme⁴ de la série trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \left[a_p \cos\left(p \, \frac{\pi \, x}{\ell}\right) + b_p \sin\left(p \, \frac{\pi \, x}{\ell}\right) \right]$$

dont les coefficients sont :

$$a_p = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(p \frac{\pi x}{\ell}\right) dx$$

pour p entier positif ou nul et

$$b_p = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(p \frac{\pi x}{\ell}\right) dx$$

pour p strictement positif.

^{4.} On fait volontairement l'impasse sur les conditions pour avoir une convergence simple ou une convergence uniforme.

Il est utile de remarquer que pour une fonction paire les b_p sont nuls et pour une impaire, les a_p .

Pour une corde vibrante comprise entre x = 0 et $x = \ell$, on peut, si elle est immobile en ses deux extrémités, considérer la fonction f(x,t), à un instant t donné, comme la restriction d'une fonction impaire (il faut pour cela f(0,t) = -f(0,t) donc f(0,t) = 0 mais c'est le cas) et périodique de période 2ℓ (il faut pour cela $f(\ell,t) = f(\ell - 2\ell,t) = f(-\ell,t) = -f(\ell,t)$ donc $f(\ell,t) = 0$ mais c'est le cas), on retrouve les solutions développées plus haut puisqu'il n'y a que des termes en sinus dans la décomposition de FOURIER. On détaillera un peu plus loin.

On démontre 5 aussi le théorème de PARSEVAL :

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=\infty} (a_p^2 + b_p^2)$$

Pour le physicien, il s'agit d'un théorème énergétique; en effet l'énergie fait intervenir des carrés de fonctions. Le théorème affirme que l'énergie moyenne est somme des énergies moyennes du fondamental et des harmoniques (on rappelle que la moyenne du carré d'un sinus ou d'un cosinus est 1/2) s'ils étaient seuls. Cette additivité ne coule pas de source car *a priori* le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés; le théorème affirme donc que les doubles produits sont nuls en moyenne et leur somme aussi (ce n'est pas évident : il y a une infinité de termes).

2.d Solution compatible avec une condition initiale.

Prenons un exemple classique : soit une fonction f(x,t), solution de l'équation de propagation, définie entre les abscisses x = 0 et $x = \ell$; on lui impose comme conditions aux limites $\forall t \ f(0,t) = f(\ell,t) = 0$ et comme conditions initiales $f(x,0) = y(x) \ \forall x \in [0,\ell]$ (où y est une fonction connue telle que, bien sûr, $y(0) = y(\ell) = 0$) et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 \ \forall x \in [0,\ell]$. Physiquement, on lâche la corde sans vitesse à partir d'une forme initiale imposée. Il s'agit de déterminer f(x,t).

On peut considérer y(x), définie entre 0 et ℓ , comme restriction d'une fonction Y(x)impaire et périodique de période 2ℓ (cf supra). La décomposition en séries de Fourier ne comporte donc que des termes impairs en sinus, soit :

$$y(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} B_p \sin\left(p \,\pi \, \frac{x}{\ell}\right)$$

où les B_p sont calculés à partir de la fonction supposée connue y(x) prolongée en Y(x) par :

$$B_p = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} Y(x) \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} Y(x) \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} y(x) \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) \, \mathrm{d}x$$

^{5.} On fait volontairement l'impasse sur les conditions de validité qui sont très bienveillantes.

en faisant bien attention qu'on doit calculer par intégration sur une période donc avec Yentre $-\ell$ et ℓ et on se ramène à y, définie entre 0 et ℓ , en exploitant les parités. La fonction y est supposée connue, donc la série des B_p aussi.

Pour f(x,t), ce même raisonnement est valable à tout instant, à ceci près qu'il faut comprendre que, quand t varie, la fonction f, considérée comme fonction de x, change, donc sa décomposition aussi, donc les coefficients de cette décomposition. On peut donc écrire :

$$f(x,t) = \sum_{p=1}^{p=\infty} b_p(t) \sin\left(p \,\pi \, \frac{x}{\ell}\right)$$

f est solution de l'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. En y reportant l'expression précédente et en regroupant les termes (aux mathématiciens de justifier que ça reste valable avec la somme d'une infinité de termes) :

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \left(b_p''(t) + \frac{p^2 \pi^2 c^2}{\ell^2} b_p(t) \right) \sin\left(p \pi \frac{x}{\ell}\right) = 0$$

et, puisque la philosophie de la décomposition en série de Fourier est que les sin $\left(p \pi \frac{x}{\ell}\right)$ forment une famille libre, leurs coefficients sont tous nuls, soit :

$$\forall p \quad b_p''(t) + \frac{p^2 \pi^2 c^2}{\ell^2} b_p(t) = 0$$

Il en résulte que b_p est fonction sinusoïdale du temps de pulsation $p \pi c/\ell$, notons :

$$b_p(t) = \alpha_p \cos\left(p \pi \frac{c t}{\ell}\right) + \beta_p \sin\left(p \pi \frac{c t}{\ell}\right)$$

d'où

$$f(x,t) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left[\alpha_p \cos\left(p \,\pi \, \frac{c \,t}{\ell}\right) + \beta_p \sin\left(p \,\pi \, \frac{c \,t}{\ell}\right) \right] \,\sin\left(p \,\pi \, \frac{x}{\ell}\right)$$

 et

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{p \pi c}{\ell} \left[-\alpha_p \sin\left(p \pi \frac{c t}{\ell}\right) + \beta_p \cos\left(p \pi \frac{c t}{\ell}\right) \right] \sin\left(p \pi \frac{x}{\ell}\right)$$

Utilisons les deux dernières expressions à l'instant initial t = 0 pour les identifier aux conditions initiales mentionnées plus haut.

$$f(x,0) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \alpha_p \sin\left(p \,\pi \, \frac{x}{\ell}\right) = y(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} B_p \sin\left(p \,\pi \, \frac{x}{\ell}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{p \,\pi \,c}{\ell} \beta_p \,\sin\left(p \,\pi \, \frac{x}{\ell}\right) = 0$$

là encore, puisque les sin $\left(p \pi \frac{x}{\ell}\right)$ forment une famille libre, on en déduit, pour tout p que $\alpha_p = B_p$ (rappelons que les B_p sont connus) et de la même façon, $\beta_p = 0$ et donc :

$$f(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} B_p \cos\left(p \pi \frac{c t}{\ell}\right) \sin\left(p \pi \frac{x}{\ell}\right)$$

La solution est parfaitement définie comme limite d'une « série de fonctions » ; même si son aspect est rebutant, c'est la solution et l'on peut être heureux. On verra plus loin (paragraphe 4.b p. 22) une autre approche qui donnera une expression plus « lisible » de ce résultat.

Exemple d'application : On « attaque » une corde « pincée » (celle d'une guitare par exemple) en un point précis. La fonction y(x) a l'allure donnée à la figure 2 p. 11 :



FIGURE 2 – Attaque d'une corde pincée.

On en tire donc aisément l'expression de y(x), affine par morceaux :

$$y(x) = \begin{cases} h \frac{x}{a} & \text{si } 0 < x < a \\\\ h \frac{\ell - x}{\ell - a} & \text{si } 0 < x < a \end{cases}$$

d'où, en abrégeant

$$B_p = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell y(x) \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) = \frac{2h}{\ell a} \int_0^a x \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) \, \mathrm{d}x + \frac{2h}{\ell (\ell-a)} \int_a^\ell (\ell-x) \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) \, \mathrm{d}x$$

où

$$\begin{aligned} \int_0^a x \sin\left(p \,\pi \,\frac{x}{\ell}\right) \,\mathrm{d}x &= \int_0^a x \,\mathrm{d}\left(-\frac{\ell}{p \,\pi}\,\cos\left(p \,\pi \,\frac{x}{\ell}\right)\right) = \\ \left[-\frac{\ell}{p \,\pi}\,x\,\cos\left(p \,\pi \,\frac{x}{\ell}\right)\right]_0^a + \int_0^a \frac{\ell}{p \,\pi}\,\cos\left(p \,\pi \,\frac{x}{\ell}\right) \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ell}{p \,\pi}\,x\,\cos\left(p \,\pi \,\frac{x}{\ell}\right) + \frac{\ell^2}{p^2 \,\pi^2}\,\sin\left(p \,\pi \,\frac{x}{\ell}\right)\right]_0^a = \\ -\frac{\ell}{p \,\pi}\,a\,\cos\left(p \,\pi \,\frac{a}{\ell}\right) + \frac{\ell^2}{p^2 \,\pi^2}\,\sin\left(p \,\pi \,\frac{a}{\ell}\right) \end{aligned}$$

et dans la seconde intégrale, le changement de variable $x = \ell - \xi$ d'où d $x = -d\xi$ donne

$$\int_{a}^{\ell} (\ell - x) \sin\left(p\pi \frac{x}{\ell}\right) dx = -\int_{\ell-a}^{0} \xi \sin\left(p\pi - p\pi \frac{\xi}{\ell}\right) d\xi =$$

$$\int_{0}^{\ell-a} \xi \sin\left(p\pi - p\pi \frac{\xi}{\ell}\right) d\xi = (-1)^{p} \int_{0}^{\ell-a} \xi \sin\left(-p\pi \frac{\xi}{\ell}\right) d\xi = (-1)^{p+1} \int_{0}^{\ell-a} \xi \sin\left(p\pi \frac{\xi}{\ell}\right) d\xi =$$

$$(-1)^{p+1} \left(-\frac{\ell}{p\pi} (\ell - a) \cos\left(p\pi \frac{\ell - a}{\ell}\right) + \frac{\ell^{2}}{p^{2}\pi^{2}} \sin\left(p\pi \frac{\ell - a}{\ell}\right)\right) = \cdots$$

où la dernière égalité se déduit par analogie avec le calcul précédent en remplaçant a par $\ell - a$; poursuivons :

$$\cdots = (-1)^{p+1} \left(-\frac{\ell}{p \pi} (\ell - a) \cos\left(p \pi - p \pi \frac{a}{\ell}\right) + \frac{\ell^2}{p^2 \pi^2} \sin\left(p \pi - p \pi \frac{a}{\ell}\right) \right) = (-1)^{p+1} \left((-1)^{p+1} \frac{\ell}{p \pi} (\ell - a) \cos\left(-p \pi \frac{a}{\ell}\right) + (-1)^p \frac{\ell^2}{p^2 \pi^2} \sin\left(-p \pi \frac{a}{\ell}\right) \right) = (-1)^{p+1} \left((-1)^{p+1} \frac{\ell}{p \pi} (\ell - a) \cos\left(p \pi \frac{a}{\ell}\right) + (-1)^{p+1} \frac{\ell^2}{p^2 \pi^2} \sin\left(p \pi \frac{a}{\ell}\right) \right) = \frac{\ell}{p \pi} (\ell - a) \cos\left(p \pi \frac{a}{\ell}\right) + \frac{\ell^2}{p^2 \pi^2} \sin\left(p \pi \frac{a}{\ell}\right)$$

puis on reporte le résultat des deux intrégrations dans l'expression de B_p , les termes en cosinus se simplifient et il vient :

$$B_p = \frac{2h\ell}{p^2\pi^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\ell - a}\right) \sin\left(p\pi\frac{a}{\ell}\right)$$

Remarque 1 : on peut annuler B_p en « attaquant » la corde par exemple en $a = \ell/p$.

Remarque 2 : pour une corde pincée, abstraction faite du terme sinusoïdal, les termes en B_p sont en $\frac{1}{p^2}$ et énergétiquement (cf la relation de PARSEVAL), les termes en B_p^2 sont en $\frac{1}{p^4}$. Un corde pincée est donc énergétique pauvre en harmoniques et a un son plus sec qu'un instrument à corde frappée ou frottée.

2.e Ondes stationnaires forcées.

Dans la pratique, des phénomènes dissipatifs finissent par amortir toute vibration et il faut les entretenir pour pouvoir les observer durablement. Dans le cas d'une corde vibrante, on peut y parvenir en imposant un mouvement à l'une des extrémités. Formellement, la situation est la suivante : une fonction f(x,t) définie entre x = 0 et $x = \ell$, vérifie l'équation de propagation et a pour conditions aux limites x(0,t) = 0 et $x(\ell,t) = a \cos(\omega t)$, cette dernière fonction étant réputée connue. On suppose en outre qu'un frottement non formalisé a étouffé le régime transitoire (combinaison de modes propres amortis). On recherche donc une solution sinusoïdale du temps de pulsation ω , celle du mouvement imposé en $x = \ell$.

On recherche une solution factorisée $f(x,t) = g(x) \cos(\omega t)$; en reportant dans l'équation de propagation, on trouve une équation différentielle portant sur g(x) dont la solution, compte tenu de la condition en x = 0, est $g(x) = g_0 \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$. Enfin la condition en $x = \ell$ permet d'arriver aisément au résultat suivant :

$$f(x,t) = \frac{a}{\sin\left(\frac{\omega \ell}{c}\right)} \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) \cos(\omega t)$$

FIGURE 3 – Corde de Melde.

La quantité $g_0(\omega) = \frac{a}{\sin\left(\frac{\omega\ell}{c}\right)}$ fait office d'amplitude et le graphe de la figure 3 p. 13 est celui de $g_0(\omega)$ en fonction de ω ; on trouve, bien sûr, des résonances pour $\omega = \omega_p$ où les ω_p sont les pulsations propres, c'est-à-dire celles du fondamental et des harmoniques de la corde vibrante non excitée. En fait, l'existence, déjà évoquée, de frottements empêche l'amplitude de devenir infinie à la résonance.

Remarque : la situation de la corde excitée par la mise en mouvement d'une extrémité est connue sous le nom de *corde de MELDE*.

2.f Exercice de style.

Comme promis dans le chapitre D-I, revenons, pour en critiquer la résolution classique, sur le problème de l'oscillation d'une masse suspendue à un ressort et sur quelques résultats annexes.

• Allongement statique d'un ressort.

Commençons par quelques considérations préalables avant leur exploitation dans notre problème.

Un ressort vertical a une extrémité fixe O et une extrémité mobile à laquelle est accrochée une masse ponctuelle M qui exerce donc une force F = M g se déplaçant verticalement selon Oz. On note L la longueur à vide et $\mu = \frac{M}{L}$ la masse linéïque du ressort à vide. A l'équilibre, le poids de la masse M tend le ressort qui s'allonge de ΔL ; la raideur k est définie par $F = k \Delta L$.

Le piège serait de croire, dans notre problème, que le ressort se déforme de façon homothétique. Précisons les choses en considérant, en l'absence de pesanteur et indépendamment de notre problème, un premier ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k qui, sous l'action d'une force de module F, s'allonge de $\Delta \ell = F/k$.

Plaçons bout à bout deux ressorts identiques et exerçons à l'extrémité du second une force de module F. Puisque que le second est à l'équilibre, la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle et donc le premier exerce sur le second une force opposée à celle de l'opérateur; il est donc dans la situation précédente et son allongement est le même. L'allongement total des deux ressorts bout à bout est alors $\Delta \ell_{total} = 2\Delta \ell = 2F/k$. Si l'on définit une raideur équivalente par $\Delta \ell_{total} = F/k_{eq}$, on en déduit $k_{eq} = k/2$ et comme par ailleurs la longueur à vide est devenue $2\ell_0$, on remarque que le produit de la longueur à vide par la raideur est la même pour un ressort et pour deux. Ce résultat se généralise aisément à un nombre quelconque de ressorts et permet d'affirmer que $k \ell_0 = Cte$ notée Ket d'écrire pour un ressort $F = K \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$.

Sous l'action de la force F, notons $z + \zeta_E(z)$ la position de la spire qui, à vide (toujours en l'absence hypothétique de pesanteur), serait à la cote z et appliquons le résultat à une tranche de ressort qui, à vide, serait entre les cotes z et z + dz et dont la longueur à vide serait $\ell_0 = dz$. A l'équilibre les cotes des extrémités seraient $z + dz + \zeta_E(z + dz)$ et $z + \zeta_E(z)$, la longueur serait donc la différence et en soustrayant la longueur à vide l'allongement serait, à un développement de Taylor près :

$$\Delta \ell = \left[(z + \mathrm{d}z + \zeta_E(z + \mathrm{d}z)) - (z + \zeta_E(z)) \right] - \mathrm{d}z = \zeta_E(z + \mathrm{d}z) - \zeta_E(z) = \frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z} \,\mathrm{d}z$$

d'où $F = K \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = K \frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z}$ que l'on appelle loi de HOOKE.

Revenons enfin au ressort auquel on a accroché une masse M de poids F = M g et étudions la tranche de ressort dont les cotes à vide seraient, comme ci-dessus, z et z + dz. Appelons F(z) la tension du ressort au niveau de la spire de cote à vide z, donnée par la loi ci-dessus, à savoir $F(z) = K \frac{d\zeta_E}{dz}$.

La tranche en question est soumise

- à la tension $F(z + dz) = K \left. \frac{d\zeta_E}{dz} \right|_{z+dz}$ vers le bas au niveau de l'extrémité inférieure - à la tension $F(z) = K \left. \frac{d\zeta_E}{dz} \right|_z$ vers le haut au niveau de l'extrémité supérieure - au poids $dm \, q = \mu \, g \, dz$ vers le bas

On a donc, à l'équilibre, successivement (avec un développement de Taylor puis une intégration) :

$$0 = K \left. \frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z} \right|_{z+\mathrm{d}z} - K \left. \frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z} \right|_z + \mathrm{d}m \, g = K \frac{\mathrm{d}^2 \zeta_E}{\mathrm{d}z^2} \, \mathrm{d}z + \mu \, g \, \mathrm{d}z$$
$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 \zeta_E}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mu \, g}{K}$$

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mu\,g}{K}\,z + Cte$$

Pour l'extrémité inférieure du ressort, correspondant à z = L, la tension du ressort s'oppose au poids de la masse M donc F(L) = Mg et $\frac{d\zeta_E}{dz}\Big|_L = \frac{Mg}{K}$ ce qui permet de déterminer la constante d'intégration, d'où successivement (avec $\zeta_E(0) = 0$):

$$\frac{\mathrm{d}\zeta_E}{\mathrm{d}z} = \frac{M\,g}{K} + \frac{\mu\,g}{K}\,(L-z)$$
$$\zeta_E(z) = \frac{M\,g}{K}\,z - \frac{\mu\,g}{2\,K}\,(L-z)^2$$

L'allongement du ressort est $\Delta L = \zeta_E(L) = \frac{MgL}{K} = \frac{Mg}{k}$ qui est le résultat classique car la raideur du ressort est $k = \frac{K}{L}$. Nous en sommes heureux mais l'explication est moins simple qu'il n'y paraît car le déplacement de spires n'est pas proportionnel à leur abscisse initiale.

• Oscillations du système masse-ressort.

L'étude classique donne un mouvement sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$, soit encore avec $k = \frac{K}{L}$ et $M = \mu L$, $\omega = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{K}{\mu}}$... et c'est faux. Nous avions promis une explication dans le chapitre D-I, la voici. Elle résulte de la possibilité d'ondes de compression-dilatation dans le ressort.

On reprend le raisonnement précédant sur une spire de longueur à vide dz, à ceci près que le bilan n'est pas nul mais est égal au produit de la masse par l'accélération, d'où successivement :

$$\mu \,\mathrm{d}z \,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = K \left. \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|_{z+\mathrm{d}z} - K \left. \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right|_z + \mu \,g \,\mathrm{d}z = K \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \,\mathrm{d}z + \mu \,g \,\mathrm{d}z$$
$$\frac{\mu}{K} \frac{\mathrm{d}^2 \zeta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\mu \,g}{K}$$

qui n'est pas une équation de d'Alembert à cause de la présence d'un terme constant. Mais si on lui retranche⁶ l'équation obtenue plus haut dans le cadre de l'allongement statique, en notant $f(z,t) = \zeta(z,t) - \zeta_E(z)$, on tire aisément :

$$\frac{\mu}{K} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

qui en est une.

^{6.} Notons au passage la démarche classique qui consiste à retrancher la solution du problème à l'équilibre à celle du problème en mouvement, car on ne répétera jamais assez qu'une astuce utilisée plusieurs fois devient une méthode.

La célérité des ondes dans le ressort est donc $c = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$ pour faire apparaître la forme canonique de l'équation :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Cherchons une solution factorisée en $f(z,t) = \Phi(z) \cos(\omega t)$; par la méthode désormais habituelle (report dans l'équation de propagation) et avec l'immobilité au point O(z = 0), on arrive successivement à :

$$\Phi(z) = A \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right)$$
$$f(z,t) = A \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right) \cos(\omega t)$$
$$\zeta(z,t) = f(z,t) + \zeta_E(z) = \frac{Mg}{K} z - \frac{\mu g}{2K} (L-z)^2 + A \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right) \cos(\omega t)$$

Quelle est la condition imposée à la fonction ζ en z = L?

La cote de la masse M et son accélération sont

$$z_M(t) = \zeta(L, t) = \frac{M g L}{K} + A \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos(\omega t)$$
$$\ddot{z}_M(t) = -\omega^2 A \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos(\omega t)$$

Cette masse est soumise à son poids de module M g dirigé vers le bas et à la tension du ressort, dirigée vers le haut et de module $F = K \frac{\partial \zeta}{\partial z}(L,t)$. Or

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{M g}{K} + \frac{\mu g}{K} \left(L - z\right) + A \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right) \cos(\omega t)$$

d'où

$$F = M g + K A \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos(\omega t)$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique $(M \ddot{z}_M = M g - F)$ à la masse M, donne successivement :

$$-M\omega^2 A \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos(\omega t) = -KA\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos(\omega t)$$
$$M\omega \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{K}{c}\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)$$
$$\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{K}{M\omega c}$$

dont les solutions donnent les pulsations possibles. L'équation non algébrique se résout graphiquement en posant $u = \omega L/c$ et $a = M c^2/K L = Cte$. L'équation s'écrit

$$\cot(u) = a u$$

que l'on résout en superposant les graphes des deux membres en fonction de u. Remarquons que $c^2 = K/\mu$ donc $a = M/\mu L$ soit le rapport de la masse M et de la masse du ressort. Le graphe 4 p. 17, avec a = 20 qui correspond à une situation fort plausible.



FIGURE 4 – Système masse-ressort.

Ce graphe montre que les valeurs de u solutions de l'équation sont proches, hormis la première, notée u_0 , des valeurs qui rendent infinie la cotangente, soit $u_p \approx \omega_p L/c = p \pi$ d'où $\omega_p \approx p \pi c/L$, $f_p \approx p c/2L$, $\lambda_p \approx 2L/p$, valeurs classiques des modes propres.

Affinons en posant $u_p = p \pi + \varepsilon_p$. Dans l'équation $1/\tan(u) = a u$, on utilise l'approximation $\tan(u_p) = \tan(\varepsilon_p) \approx \varepsilon_p$ et dans le second membre $u_p \approx p \pi$ d'où

$$\frac{1}{\varepsilon_p} = p \pi a$$
 soit $\varepsilon_p = u_p - p \pi = \frac{1}{p \pi a}$

Après multiplication par c/L

$$\omega_p - p \pi c/L \approx \frac{c}{p \pi a L}$$
$$\omega_p = p \pi \frac{c}{L} \left(1 + \frac{1}{p^2 \pi^2 a} \right)$$

Avec $\pi^2 \approx 10$, a = 20, le décalage est de 0,5 % pour le fondamental (p = 1), d'un peu plus de 0,1 % pour l'harmonique 2 (p = 2), de 0,05 % pour l'harmonique 3, etc.

Pour u_0 et ω_0 , on peut utiliser le développement asymptotique $\cot(u) = 1/u - u/3$ car le graphe montre que u_0 est suffisamment petit pour valider le développement proposé d'où

$$\frac{1}{u_0} - \frac{u_0}{3} = a \, u_0$$
$$\frac{1}{u_0} = \left(a + \frac{1}{3}\right) \, u_0$$
$$u_0^2 = \frac{1}{\left(a + \frac{1}{3}\right)}$$
$$\omega_0^2 = \frac{c^2}{\left(a + \frac{1}{3}\right) \, L^2}$$

Reportons-
y $c^2=K/\mu$ et $a=M/\mu\,L$ puis la raideur k=K/L et la mass
e $m=\mu\,L$ du ressort, alors

$$\omega_0^2 = \frac{K}{\left(\frac{M}{\mu L} + \frac{1}{3}\right) \mu L^2}$$
$$\omega_0^2 = \frac{K}{\left(M + \frac{\mu L}{3}\right) L}$$
$$\omega_0^2 = \frac{k}{\left(M + \frac{m}{3}\right)}$$

Conclusion la formule classique $\omega_0^2 = k/M$ suppose un ressort idéal avec raideur mais sans masse, ce qui est bien sûr impossible! La conclusion sur la valeur de ω_0 décoiffe, non?

3 Ondes progressives dans un milieu unidirectionnel.

On considère cette fois une fonction f(x,t) définie de $x = -\infty$ à $x = \infty$ et solution de l'équation de propagation.

3.a Contexte expérimental.

Un milieu n'est jamais infini. L'énoncé précédent idéalise donc une situation où la fonction est définie entre une valeur fortement négative et une fortement positive, l'origine étant au niveau de l'observateur. En pratique, cela suppose, d'un côté un générateur, disons ici en $x = -x_0$, qui impose à f une variation connue en fonction du temps,, c'est-à-dire qui impose l'expression de $f_0(t) = f(-x_0, t)$ et de l'autre côté, à l'extrémité physique et finie, disons en $x = x_1$ quelque chose à préciser qui pourra être soit un dispositif anti-reflet

(voir paragraphe 6.d p. 33), soit un terme dissipatif non formalisé ici, assorti une distance de parcours x_1 assez longue pour que ce qui arrive en x_1 et formellement au delà soit parfaitement négligeable, soit encore le générateur en $x = -x_0$ allumé seulement depuis un temps T suffisamment court pour que les perturbations en $x = x_1$ n'existent pas encore ou à la limite n'aient pas eu le temps de générer des perturbations en retour au niveau de l'observateur, ce qui sera possible de chiffrer dès que l'on aura montré que c est une vitesse de propagation.

3.b Recherche de solutions par changement de variables.

Effectuons le changement de variables défini par $u(x,t) = t - \frac{x}{c}$ et $v(x,t) = t + \frac{x}{c}$ d'où $t(u,v) = \frac{v+u}{2}$ et $x(u,v) = c \frac{v-u}{2}$ qui permet de définir une fonction $\tilde{f}(u,v) = f[x(u,v), t(u,v)]$ avec bien sûr $f(x,t) = \tilde{f}[u(x,t), v(x,t)]$.

Formellement, le théorème de SCHWARTZ qui permet⁷ la permutation de l'ordre des dérivations partielles successives permet d'utiliser une identité remarquable dans l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} f - c^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f = 0$$
$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left(c \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] f = 0$$
$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) + \left(c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) - \left(c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] f = 0$$

Or si l'on dérive par rapport à u la relation f(u, v) = f[x(u, v), t(u, v)], on tire (dérivation de fonctions composées de plusieurs variables) :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{c}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(c\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]f$$

Le résultat précédent peut donc se réécrire :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(c\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

puis par un raisonnement analogues et après simplification :

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = 0$$

^{7.} Sauf exception, les fonctions utilisées en physique vérifient les conditions d'application du théorème, à savoir que les dérivées secondes soient continues.

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v \partial u} = 0$$

Ce qui précède n'est pas vraiment une démonstration mais la genèse de l'idée ; il suffirait maintenant de calculer à rebrousse-poil $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v \partial u}$ dans le cadre du changement de variables pour que c'en devienne une.

De $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial v \partial u} = 0$ lu comme $\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = 0$, on déduit, par intégration vis-à-vis de v, que $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}$ est une constante vis-à vis de v, c'est-à-dire une fonction arbitraire de u; une seconde intégration vis-à-vis de u cette fois montre que \tilde{f} est une primitive de cette fonction (en pratique une autre fonction arbitraire de u) à une constante vis-à-vis de u près c'est-à-dire à une fonction arbitraire de v près.

En reportant les expressions de u et v en fonction de x et t, on peut donc affirmer que toute solution de l'équation de propagation peut être écrite sous la forme :

$$f(x,t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où F et G sont des fonctions arbitraires. Attention à bien comprendre que F et G sont des fonctions d'une seule variable à laquelle on substitue respectivement $t - \frac{x}{c}$ et $t + \frac{x}{c}$.

Remarque 1 : La linéarité permet de présenter ce résultat comme superposition d'une solution de type $F\left(t-\frac{x}{c}\right)$ et d'une solution de type $G\left(t+\frac{x}{c}\right)$.

Remarque 2 : Si l'on avait travaillé avec U = x - ct et V = x + ct, on aurait changé de point de vue et présenté la solution comme superposition d'une solution en F(x - ct)et d'une en G(x + ct). C'est juste une question de présentation.

3.c Interprétation des solutions.

Pour une solution du type y = F(x-ct), en remarquant que $x-ct_2 = [x-c(t_2-t_1)]-ct_1$ d'où $F(x,t_2) = F(x-c(t_2-t_1),t_1)$, on voit qu'à l'instant t_2 , on retrouve en tout point le phénomène qui existait en t_1 à une distance $c(t_2-t_1)$ en arrière, donc que la « carte » du phénomène s'est déplacée en bloc de $c(t_2-t_1)$ entre t_2 et t_1 donc à une vitesse c. Ceci est illustré par la figure 5 p. 21.

Ce type de solutions est donc logiquement appelée onde progressive. Il importe de bien comprendre que la vitesse de propagation de l'onde n'a strictement rien à voir avec la vitesse de la matière, de même la direction de propagation (celle des x) n'est pas, a priori, celle du mouvement de la matière (penser à une corde de guitare, voire une ola dans un stade). On appelle souvent *célérité* cette vitesse d'une onde (on devrait systématiquement faire la distinction entre célérité d'une onde et vitesse de la matière).

Remarque : bien sûr, F(t + x/c) représente une onde se déplaçant à la vitesse c dans le sens des x décroissants.



FIGURE 5 – Onde propagative.

3.d Ondes progressives sinusoïdales.

On dit aussi, à la place de sinusoïdales, harmoniques ou, dans le cas de la lumière, monochromatiques.

Il s'agit du cas particulier où F est sinusoïdale. Rien de particulier sauf une terminologie à maîtriser. On note de façon brute $F(t-x/c) = F_m \cos[\omega (t-x/c)+\varphi]$ avec F_m l'amplitude (on ajoute souvent réelle, cf *infra*), ω , la pulsation, $\omega (t-x/c) + \varphi$, la phase et φ la phase à l'origine (mieux, aux origines). Par la suite, on choisit l'origine du temps ou de l'espace de sorte que φ soit nul.

On symétrise le rôle de x et de t en écrivant : $F_m \cos(\omega t - kx)$ avec $k = \omega/c$ appelé vecteur d'onde (on est ici à une dimension et le vecteur s'identifie à un scalaire).

On privilégie les fréquences temporelle (fréquence tout court) et spatiale (nombre d'onde) en écrivant : $F_m \cos[2\pi(ft - \sigma x)]$ où $f = \omega/(2\pi)$, $\sigma = k/(2\pi)$ et $\sigma = f/c$.

On privilégie les périodes temporelle (période tout court) et spatiale (longueur d'onde) en écrivant : $F_m \cos[2\pi(t/T - x/\lambda)]$ où $T = 1/f = 2\pi/\omega$, $\lambda = 1/\sigma = 2\pi/k$ et $\lambda = cT$ (relation évoquée au paragraphe 2.b p. 6).

On note souvent ⁸ $F = Re(\underline{F})$ avec $\underline{F} = F_m \exp(i(\omega t - kx) + \varphi))$ ou plus efficacement $\underline{F_m} \exp(i(\omega t - kx))$ avec $\underline{F_m} = F_m \exp(i\varphi)$ appelée amplitude complexe; on remarquera que l'amplitude réelle et la phase à l'origine sont le module et l'argument de l'amplitude complexe. Formellement, en amplitude complexe, $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$ peuvent être remplacés par $i\omega$ et -ik (attention, uniquement pour une onde progressive sinusoïdale).

3.e Transformation de Fourier.

Pour un physicien, c'est une façon de considérer que toute fonction, quelle qu'elle soit, est somme de sinusoïdes, en gros, que l'ensemble des fonctions sinusoïdales est une base de l'ensemble des fonctions, même si cette façon de dire les choses ferait hurler un mathématicien. Ceci qui justifie le grand cas que l'on fait des fonctions sinusoïdales en physique. En

^{8.} Pour une présentation correcte des notations complexes, voir le chapitre D-Isur les oscillateurs.

notation complexe f(t) est somme de sinusoïdes de pulsations ω et d'amplitudes complexes $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(\omega)$; ω variant continûment, on note :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \, \exp(i \, \omega \, t) \, \mathrm{d}\omega$$

et l'on montre que $\tilde{f}(\omega)$ se calcule par :

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\,\omega\,t) \,\mathrm{dt}$$

où la valeur de la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ a été choisie pour avoir des formules symétriques.

Le théorème de PARSEVAL et son interprétation énergétique se généralise en :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega$$

 $|\tilde{f}(\omega)|^2$ est appelée densité spectrale d'énergie. Le mathématicien appelle $\tilde{f}(\omega)$ transformée de FOURIER de f(t) et le physicien spectre de f(t). Bien sûr, on peut remplacer t par $t \pm x/c$.

Remarque 1 : pour être précis la composante sinusoïdale de f de pulsation ω est la somme des exponentielles en $\tilde{f}(\omega) \exp(i\omega t)$ et en $\tilde{f}(-\omega) \exp(-i\omega t)$.

Remarque 2 : il n'est pas utile ici de développer les propriétés de le transformation de FOURIER.

4 Lien entre ondes stationnaires et ondes progressives.

4.a Cas des ondes sinusoïdales.

La formule de trigonométrie

$$\cos(\omega t) \, \cos(k x) = \frac{1}{2} \, \cos(\omega t - k x) + \frac{1}{2} \, \cos(\omega t + k x)$$

prouve le lien entre onde stationnaire et onde progressive : la première est somme de deux progressives de sens contraires et de même amplitude.

Physiquement dans un milieu limité, une onde progressive se réfléchit aux deux extrémités, ce qui donne naissance aux deux sens de propagation.

4.b Exemple de généralisation.

Revenons comme convenu à la recherche d'une solution stationnaire avec condition initiale et conditions aux limites (paragraphe 2.d p. 9) en reprenant le même exemple : une fonction f(x,t), solution de l'équation de propagation, définie entre les abscisses x = 0 et $x = \ell$; avec, pour conditions aux limites, $\forall t \ f(0,t) = f(\ell,t) = 0$ et avec, pour conditions initiales, $f(x,0) = y(x) \ \forall x \in [0,\ell]$ (où y est une fonction connue telle que, bien sûr, $y(0) = y(\ell) = 0$) et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 \ \forall x \in [0,\ell]$. Il s'agit de déterminer f(x,t).

On cherche donc une solution en

$$y(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

qui est automatiquement solution de l'équation de d'Alembert. Ne reste qu'à vérifier les conditions aux limites et les conditions initiales.

On connaît f(x,0) entre x = 0 et $x = \ell$, on doit donc avoir F(x) + G(x) = f(x,0) soit F(x) + G(x) = y(x).

Comme $\frac{\partial f}{\partial t} = -c F'(x-ct) + c G'(x+ct)$ et que $\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0$ entre x = 0 et $x = \ell$, on doit donc avoir F'(x) - G'(x) = 0 ce qui entraîne que, entre x = 0 et $x = \ell$, G(x) - F(x) est une constante qu'on note provisoirement K; on arrive donc à donc à

$$F(x) = \frac{1}{2}y(x) - \frac{K}{2} \qquad G(x) = \frac{1}{2}y(x) + \frac{K}{2}$$

La détermination de K est un faux problème car nous cherchons l'expression de f(x,t), somme de F(x-ct) et de G(x+ct), somme dans laquelle K disparaît; la valeur de K est donc arbitraire et le plus simple est donc de la prendre nulle. A ce stade $F(x) = G(x) = \frac{y(x)}{2}$ **pour** x compris entre 0 et ℓ . Il est raisonnable d'imposer qu'en dehors de cet intervalle, on ait toujours F(x) = G(x) et donc que f(x,t) = F(x-ct) + F(x+ct) où F a été déterminée mais uniquement entre 0 et ℓ .

Passons aux conditions au limites. On veut f(0,t) = 0, il en résulte donc que l'on a F(-ct) + F(ct) = 0 pour tout t (donc toute valeur de ct) donc que F est impaire; on connaissait F entre 0 et ℓ , on le connaît donc par parité entre $-\ell$ et ℓ .

On veut $f(\ell, t) = 0$ donc $F(\ell - ct) + F(\ell + ct) = 0$, soit encore en utilisant la parité $F(-\ell + ct) = F(\ell + ct)$ pour tout t (donc toute valeur de ct) donc F est 2ℓ -périodique, ce qui la définit totalement puisqu'on connaît déjà F sur un intervalle de largeur égale à la période.

Graphiquement, on dessine f(x) entre 0 et ℓ , on complète par symétrie et périodicité, on décale d'une part de ct, d'autre part de -ct et on effectue la demi-somme des courbes obtenues pour aboutir au graphe de f(x,t) sur la figure 6 p. 24 (y(x,0) pour y(x) et f(x)pour F(x)) où la condition initiale est une fonction triangle comme plus haut.

Le résultat est bien plus lisible que la somme de la série de FOURIER trouvée au paragraphe 2.d p. 9.



FIGURE 6 – Onde stationnaire somme de deux propagatives.

5 Couplage entre grandeurs conjuguées.

5.a Présentation axiomatique de la situation.

Prenons l'exemple d'une onde acoustique plane (voir chapitre B-XV). Si la composante selon x de la vitesse (notée v) dépend de l'abscisse x, alors une tranche de gaz initialement entre les abscisses x et x + dx a un volume qui varie, donc une pression p qui varie; on peut donc lier $\frac{\partial p}{\partial t}$ à $\frac{\partial v}{\partial x}$. De même, si la pression dépend de x, la même tranche sera soumise à un bilan non nul des forces de pression et sera donc accélérée ou décélérée; on peut donc lier $\frac{\partial v}{\partial t}$ à $\frac{\partial p}{\partial x}$.

Généralisons ainsi : on suppose l'existence de deux fonctions f(x,t) et g(x,t) liées par deux *relations de couplage* linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} + a \, \frac{\partial f}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial f}{\partial t} + b \, \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

où a et b sont des caractéristiques du milieu.

Dans le même exemple, la pression p est une force surfacique donc son produit par la vitesse v est une puissance volumique.

Quitte à multiplier f ou g par une constante, on arrive quasiment toujours à présenter le produit f(x,t) g(x,t) comme une puissance ou une puissance surfacique exercée à l'instant t par ce qui est avant l'abscisse x sur ce qui est après. Nous noterons donc ici :

$$\mathcal{P}(x,t) = f(x,t) g(x,t)$$

5.b Passage à l'équation de propagation.

Dérivons les équations de couplage, la première par rapport à x, la seconde par rapport à t, de façon à faire apparaître les dérivées secondes $\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t}$ qui sont égales par le théorème de SCHWARTZ; on arrive à :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0\\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} = 0 \end{cases}$$

Si l'on soustrait la seconde relation à la première préalablement multipliée par b, on aboutit à une équation où seule figure la fonction f:

$$a \, b \, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

qui est de la forme d'une équation de propagation $(c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2})$ avec $c = \sqrt{ab}$. On pourra donc trouver pour f(x,t) des solutions stationnaires ou progressives. On laisse au lecteur le soin de se convaincre ⁹ qu'un calcul symétrique conduit à :

$$a \, b \, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

5.c Notion d'impédance.

Le piège dans ce qui précède (f et g vérifient chacune l'équation de propagation) est que l'on perd de vue que ces deux fonctions sont reliées par des équations de couplage.

• Cas des ondes progressives.

Plaçons-nous dans le cas où f(x,t) est une onde progressive dans le sens direct, soit $f(x,t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right)$; la première des relations de couplage, nous apprend que :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -a \frac{\partial f}{\partial x} = -a F'\left(t - \frac{x}{c}\right) \frac{\partial (t - \frac{x}{c})}{\partial x} = -a F'\left(t - \frac{x}{c}\right) \left(-\frac{1}{c}\right) = \cdots$$
$$\cdots = \frac{a}{c} F'\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{a}{\sqrt{ab}} F'\left(t - \frac{x}{c}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}} F'\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Une simple intégration par rapport au temps (la prétendue constante d'intégration est alors une fonction de x notée h(x)) donne alors :

$$g(x,t) = \sqrt{\frac{a}{b}} F\left(t - \frac{x}{c}\right) + h(x) = \sqrt{\frac{a}{b}} f(x,t) + h(x)$$

^{9.} On ne triche pas : papier et crayon.

Le h(x) pose évidemment problème. Si l'on reporte cette expression de g(x,t) (et celle de f(x,t)) dans l'autre équation de couplage, le même type de calcul aboutit à h'(x) = 0donc c'est une constante. Sauf cas exceptionnel, de simples considérations physiques (l'onde est une perturbation par rapport à l'équilibre) et une définition correcte de f et g (définis comme écarts à l'équilibre) donnent une valeur nulle à cette constante, d'où :

$$g(x,t) = \sqrt{\frac{a}{b}} f(x,t)$$

Donc pour une onde progressive directe, les fonctions f et g sont proportionnelles et l'on appelle *impédance*, traditionnellement notée Z le rapport de proportionnalité. Ici, l'on a donc $Z = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Remarque 1 : il importera de bien fixer la convention définissant l'impédance (rapport $\frac{g}{f}$ ou $\frac{f}{a}$).

Remarque 2 : pour une onde progressive dans le sens indirect, les mêmes calculs aboutissent, à cause du changement de signe du coefficient de x, à :

$$g(x,t) = -\sqrt{\frac{a}{b}} f(x,t) = -Z f(x,t)$$

ce qui est piégeant, il faut donc mémoriser cette particularité.

Remarque 3 : plutôt que donner les caractéristiques premières du milieu, à savoir a et b, il est souvent plus commode de donner ses caractéristiques secondaires que sont $c = \sqrt{ab}$ et $Z = \sqrt{\frac{a}{b}}$. On remarquera du reste que l'on « remonte » à a et b par a = cZ et $b = \frac{c}{Z}$.

• Cas des ondes stationnaires.

Rien de tel pour une onde stationnaire; en effet on a vu que celle-ci est somme d'une onde progressive directe pour laquelle g = Z f et d'une onde progressive indirecte pour laquelle g = -Z f et ce changement de signe empêche toute conclusion simple.

On a vu plus haut qu'en pratique une onde stationnaire est produit de deux sinusoïdes. Supposons qu'avec un bon choix des origines du temps et de l'espace, on ait (cf supra) $f(x,t) = A \sin(kx) \sin(kct)$. Partons d'une quelconque des deux équations de couplage et menons le calcul de la même façon que pour l'onde progressive, par exemple :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -a \frac{\partial f}{\partial x} = -a k A \cos(k x) \sin(k c t)$$

D'où par intégration (on se débarrasse de la fonction de x qui apparaît comme précédemment) :

$$g(x,t) = \frac{a}{c} A \cos(kx) \cos(kct) = Z A \cos(kx) \cos(kct)$$

où l'on peut faire apparaître l'impédance Z qui n'est plus une constante de proportionnalité entre g et f, puisque ces fonctions sont en quadrature à la fois comme fonctions de x à t donné et comme fonction de t à x donné.

En particulier en terme de nœuds et de ventres (cf paragraphe 2.b p. 6), les nœuds de f sont des ventres de g et vice-versa.

5.d Aspects énergétiques.

• Bilan sur un élément de longueur.

Dans le modèle choisi, le produit $\mathcal{P}(x,t) = f(x,t) g(x,t)$ est la puissance instantanée transférée de gauche à droite ¹⁰ à l'abscisse x. Il en résulte qu'un élément du système entre x et x + dx reçoit en x la puissance $\mathcal{P}(x,t)$ et fournit en x + dx la puissance $\mathcal{P}(x + dx,t)$. Le bilan est qu'il reçoit algébriquement :

$$\delta \mathcal{P} = -\mathcal{P}(x + \mathrm{d}x, t) + \mathcal{P}(x, t) = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}x}$$

après un développement de TAYLOR au premier ordre. Il apparaît donc une puissance linéique reçue dont on développe ainsi l'expression :

$$\mathcal{P}_l = \frac{\delta \mathcal{P}}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}(f g)}{\mathrm{d}x} = -f \frac{\partial g}{\partial x} - g \frac{\partial f}{\partial x}$$

On poursuit à l'aide des équations de couplage :

$$\mathcal{P}_{l} = \frac{1}{b} f \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{a} g \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f^{2}}{2b} + \frac{g^{2}}{2a} \right)$$

qui montre que la quantité $\frac{f^2}{2b} + \frac{g^2}{2a}$ doit être interprétée comme une énergie linéïque. Le détail est à traiter au cas par cas selon le type d'onde considéré; il n'est pas rare que l'un des termes soit une énergie cinétique et l'autre une énergie potentielle (par unité de longueur ou de volume) mais ce n'est pas toujours le cas (voir ondes électromagnétiques).

• Exemple d'une onde progressive sinusoïdale.

Supposons que l'on ait (cf supra) :

$$\begin{cases} f(x,t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ g(x,t) = Z A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \end{cases}$$

^{10.} Pour rendre l'exposé lisible, le sens des x croissants est réputé aller de gauche à droite.

Alors $\mathcal{P}(x,t) = Z A^2 \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$; en général, la moyenne temporelle est plus pertinente que la valeur instantanée :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} Z A^2$$

où l'on remarque que cette moyenne temporelle qui pourrait donc a priori dépendre de x est en fait uniforme.

De la même façon les deux termes de densité linéïque d'énergie sont, en utilisant la relation $Z = \sqrt{\frac{a}{b}}$:

$$\begin{cases} \langle \frac{f^2}{2b} \rangle = \frac{A^2}{4b} \\ \langle \frac{g^2}{2a} \rangle = \frac{Z^2 A^2}{4a} = \frac{A^2}{4b} \end{cases}$$

où l'on remarque que les deux termes énergétiques sont égaux. L'énergie totale est donc, en moyenne temporelle, $\frac{A^2}{2b}$, stationnaire par essence, ce qui explique pourquoi la puissance transportée est uniforme en moyenne(toujours grâce au bilan sur une tranche).

• Exemple d'une onde stationnaire sinusoïdale.

Supposons que l'on ait (cf supra) :

$$\begin{cases} f(x,t) = A \sin(k x) \sin(k c t) \\ g(x,t) = Z A \cos(k x) \cos(k c t) \end{cases}$$

Alors $\mathcal{P}(x,t) = Z A^2 \cos(k x) \sin(k x) \cos(k c t) \sin(k c t)$ de moyenne temporelle nulle; une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie en moyenne, ce qui n'est guère surprenant!

On a $\frac{f^2}{2b} = \frac{A^2}{2b} \sin^2(k x) \sin^2(k c t)$ d'où en moyenne temporelle :

$$\left\langle \frac{f^2}{2b} \right\rangle = \frac{A^2}{4b} \sin^2(kx)$$

et l'on trouverait aussi aisément (en reportant la valeur de Z)

$$\left\langle \frac{g^2}{2b} \right\rangle = \frac{A^2}{4b} \cos^2(kx)$$

Cette fois les deux termes pris individuellement ne sont plus uniformes; toutefois leur somme $\frac{A^2}{4b}$ l'est. Remarquons qu'aux ventres de f, confondus (cf supra) avec les nœuds de g le premier est maximal et le second nul et c'est l'inverse aux nœuds de f, confondus avec les ventres de g, ce qui est fort satisfaisant.

6 Réflexion et transmission.

6.a Une problématique récurrente.

Supposons qu'une abscisse particulière, prise comme origine (x = 0) pour simplifier la suite des calculs, marque la séparation entre deux milieux permettant le passage d'un même type d'ondes couplées (cf supra) de caractéristiques a_1 et b_1 d'où aussi (cf supra) une célérité c_1 et une impédance Z_1 côté x < 0 et de caractéristiques a_2 et b_2 , d'où c_2 et Z_2 côté x > 0. Supposons aussi qu'arrive en x = 0 en provenance du côté x < 0 (milieu 1) une onde progressive dans le sens des x croissantes, appelée *onde incidente* (indice « i ») suposée connue et définie par (cf supra) :

$$\begin{cases} f_i(x,t) = A_i \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right] \\ g_i(x,t) = Z_1 A_i \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right] \end{cases}$$

où l'on a choisi l'origine des temps pour que la phase aux origines soit nulle.

On peut raisonnablement penser qu'au delà de x = 0, une onde progressive dans le même sens se propage au delà (x > 0 soit le milieu 2) que l'on appellera *onde transmise* (indice « t ») et qui sera définie par :

$$\begin{cases} f_t(x,t) = A_t \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{c_2}\right) + \varphi\right] \\ g_t(x,t) = Z_2 A_t \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{c_2}\right) + \varphi\right] \end{cases}$$

dont il ne reste qu'à trouver l'amplitude A_t et la phase aux origines φ . Pour trouver ces deux inconnues, il nous faut nous appuyer sur deux lois physiques ; en général, il s'agit des continuités en x = 0 valables à tout instant t de deux grandeurs physiques et dans le plus simple des cas, il s'agit justement des fonctions f et g (pour d'autres cas voir la remarque à la fi du paragraphe suivant). On doit donc avoir, pour tout t:

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^{-}} A_i \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \right] = \lim_{x \to 0^{+}} A_t \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_2} \right) + \varphi \right] \\ \lim_{x \to 0^{-}} Z_1 A_i \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \right] = \lim_{x \to 0^{+}} Z_2 A_t \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_2} \right) + \varphi \right] \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} A_i \cos(\omega t) = A_t \cos(\omega t + \varphi) \\ Z_1 A_i \cos(\omega t) = Z_2 A_t \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

ce qui suppose $\varphi = 0$ et simultanément $A_t = A_i$ et $Z_2 A_t = Z_1 A_i$ ce qui est impossible, sauf dans le cas invraisemblable où $Z_1 = Z_2$.

Comment se sortir de ce mauvais pas ? Vous le saurez après une brève page de publicité.

6.b Coefficients de réflexion et de transmission.

En fait, l'onde incidente perturbe de façon sinusoïdale l'interface en x = 0 entre les deux milieux et cet interface perturbée perturbe de part et d'autre son voisinage qui perturbe le voisinage du voisinage, ce qui génère l'onde transmise introduite ci-dessus mais aussi une onde réfléchie (indice « r ») dans le sens rétrograde et dans le milieu 1; on l'appelle onde réfléchie et sa structure est :

$$\begin{cases} f_r(x,t) = A_r \cos\left[\omega \left(t + \frac{x}{c_1}\right) + \psi\right] \\ g_r(x,t) = -Z_1 A_r \cos\left[\omega \left(t + \frac{x}{c_1}\right) + \psi\right] \end{cases}$$

en n'oubliant pas le changement de signe devant l'impédance (cf supra) pour l'onde rétrograde, fonction de $t + \frac{x}{c_1}$.

On va reprendre le calcul précédent qui identifie les limites à droite (onde transmise) et à gauche (onde incidente et réfléchie) pour les fonctions continues f et g. Comprenons, puisque les équations de propagation sont linéaires, que le phénomène observé à gauche est la superposition, c'est-à-dire la somme, de l'onde incidente et de l'onde réfléchie et qu'expérimentalement, une mesure ne donnera que cette somme sans que rien permette d'en isoler l'un ou l'autre des termes; la présentation en onde incidente et réfléchie est donc purement conceptuelle et c'est son efficacité prédictive qui la rend pertinente.

Pour gérer simplement les déphasages éventuels, nous passerons aux amplitudes complexes ; on a donc :

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^{-}} \left[A_i^* \exp i \,\omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) + A_r^* \exp i \,\omega \left(t + \frac{x}{c_1} \right) \right] = \lim_{x \to 0^{+}} A_t^* \exp i \,\omega \left(t - \frac{x}{c_2} \right) \\ \lim_{x \to 0^{-}} \left[Z_1 \, A_i^* \exp i \,\omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) - Z_1 \, A_r^* \exp i \,\omega \left(t + \frac{x}{c_1} \right) \right] = \lim_{x \to 0^{+}} Z_2 \, A_t^* \exp i \,\omega \left(t - \frac{x}{c_2} \right) \end{cases}$$

où $A_i^* = A_i, A_t^* = A_t \exp(i \varphi)$ et $A_r^* = A_r \exp(i \psi)$. Poursuivons, on arrive à :

$$\begin{cases} A_i^* \exp i\,\omega\,t + A_r^* \exp i\,\omega\,t = A_t^* \,\exp i\,\omega\,t \\ Z_1\,A_i^* \,\exp i\,\omega\,t - Z_1\,A_r^* \,\exp i\,\omega\,t = Z_2\,A_t^* \,\exp i\,\omega\,t \end{cases}$$

soit après simplification par l'exponentielle :

$$\begin{cases} A_i^* + A_r^* = A_t^* \\ Z_1 A_i^* - Z_1 A_r^* = Z_2 A_t^* \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément les inconnues A^{\ast}_r et A^{\ast}_t en fonction de la données $A^{\ast}_i,$ soit :

$$\begin{cases} A_r^* = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} A_i^* \\ A_t^* = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} A_i^* \end{cases}$$

La proportionnalité entre les inconnues et la donnée, due à la linéarité, permet d'introduire un coefficient de réflexion, noté r_f et un coefficient de transmission, noté t_f (avec un indice « f » car ils sont définis à partir de amplitudes des différentes fonctions f. On a donc $A_r^* = r_f A_i^*$ et $A_t^* = t_f A_i^*$ avec :

$$r_f = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad t_f = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Ces coefficients s'avèrent réels : les déphasages φ et ψ sont donc nuls.

Si l'on était parti des amplitudes complexes des fonctions g, à savoir $B_i^* = Z_1 A_i^*$, $B_r^* = -Z_1 A_r^*$ et $B_t^* = Z_2 A_t^*$, on aurait obtenus des coefficients $r_g = \frac{B_r^*}{B_i^*} = \frac{-Z_1 A_r^*}{Z_1 A_i^*}$ et $t_g = \frac{B_t^*}{B_i^*} = \frac{Z_2 A_t^*}{Z_1 A_i^*}$, soit :

$$\boxed{r_g = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}} \qquad \boxed{t_g = \frac{2 \, Z_2}{Z_2 + Z_1}}$$

dont l'allure est très proche des précédents coefficients ; c'est piégeant et empêche toute mémorisation sûre.

Remarque 1 : les coefficients de réflexion ont toujours une valeur absolue inférieure à l'unité ; par contre sur les deux coefficients de transmission, l'un est systématiquement plus grand que l'unité ; on y reviendra dans l'étude des coefficients énergétiques.

Remarque 2 : L'onde incidente suppose un générateur côté négatif, disons en x = -L. En fait, il impose en x = -L la valeur d'une des fonctions f ou g, disons f pour fixer les idées d'où $f(-L,t) = f_{gén.}^* \exp i \omega t$; comprenons par là qu'il impose la valeur de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, soit

$$f(-L,t) = f_{\text{gén.}}^* \exp(i\,\omega\,t) = \left[A_i^* \exp i\,\omega \left(t + \frac{L}{c_1}\right) + A_r^* \exp i\,\omega \left(t - \frac{L}{c_1}\right)\right]$$

soit encore, en introduisant r_f et en simplifiant par $\exp i \,\omega t$:

$$f_{\text{gén.}}^* = A_i^* \left[\exp\left(-i\omega \frac{L}{c_1}\right) + r_f \exp\left(i\omega \frac{L}{c_1}\right) \right]$$

ce qui détermine la valeur de A_i^* . La présentation classique où l'onde incidente est supposée connue masque, par sa pertinence opérationnelle, cette réalité expérimentale. C'est pardonnable... à condition de faire cette remarque.

Remarque 3 : il est supposé que, dans le milieu 2 (x > 0), ne se propage pas d'onde rétrograde, c'est à dire non seulement qu'il n'y a pas de second générateur, mais aussi, puisqu'en pratique le milieu est fini, qu'il y a soit un dispositif anti-reflet (voir paragraphe 6.d p. 33) en bout de système, soit que le milieu soit assez long pour que le frottement négligé finisse sur un aller-retour par rendre négligeable l'écho de l'onde transmise sur l'extrémité du système (cf paragraphe 3.a p. 18).

Remarque 4 : il est fréquent lorsque l'on aborde cette problématique de réflexiontransmission pour la première fois qu'obnubilé par la logique de causalité, l'on considère qu'il y a continuité entre la cause (l'onde incidente) et les conséquences (la somme de l'onde réfléchie et de l'onde transmise. Pourquoi pas a priori, mais dans tous les cas connus, on peut monter par utilisation de lois physiques qu'il y a continuité au sens mathématique classique entre limite à gauche (ondes incidente et réfléchie superposées) et à droite (onde transmise).

Remarque 5 : Au lieu des continuités de f et g, l'on doit parfois gérer des continuités entre fonctions $\tilde{f} = \lambda f$ et $\tilde{g} = \mu g$ où λ et μ ont des valeurs différentes des deux côtés. Pour l'onde incidente, prise comme exemple, on a :

$$\tilde{g}_i = \mu_1 g_i = \mu_1 Z_1 f_i = \frac{\mu_1 Z_1}{\lambda_1} \tilde{f}_i$$

ce qui montre qu'il suffit de remplacer dans les formules ci-dessus Z_1 par $\tilde{Z}_1 = \frac{\mu_1 Z_1}{\lambda_1}$ et, bien sûr, Z_2 par $\tilde{Z}_2 = \frac{\mu_2 Z_2}{\lambda_2}$. Les complications ne viendront que pour les coefficients énergétiques (paragraphe suivant).

6.c Coefficients énergétiques de réflexion et de transmission.

Dans le contexte de ce chapitre, Z_1 et Z_2 sont réels donc sont aussi réels les différents coefficients de transmission et réfléxion introduits plus haut. L'onde incidente, si elle était seule, serait caractérisée en x = 0, interface entre les deux milieux, par les fonctions $f_i(0,t) = A_i \cos(\omega t)$ et $g_i(0,t) = Z_1 A_1 \cos(\omega t)$ (on repasse aux notations réelles car on se prépare à un produit) et véhicule donc une puissance instantanée $\mathcal{P}_i(0,t) = f_i g_i = Z_1 A_1^2 \cos^2(\omega t)$ de moyenne temporelle $\langle \mathcal{P}_i(0,t) \rangle = \frac{1}{2} Z_1 A_1^2$.

De la même façon, on a pour l'onde transmise, en introduisant t_f et t_g (cf supra), $f_t(0,t) = t_f A_i \cos(\omega t), g_t(0,t) = t_g Z_1 A_1 \cos(\omega t), \mathcal{P}_t(0,t) = t_f t_g Z_1 A_1^2 \cos^2(\omega t)$ et $\langle \mathcal{P}_t(0,t) \rangle = \frac{1}{2} t_f t_g Z_1 A_1^2.$

Et enfin, on a pour l'onde transmise, en introduisant r_f et r_g , $f_r(0,t) = r_f A_i \cos(\omega t)$, $g_r(0,t) = r_g Z_1 A_1 \cos(\omega t)$, $\mathcal{P}_r(0,t) = r_f r_g Z_1 A_1^2 \cos^2(\omega t)$ et $\langle \mathcal{P}_r(0,t) \rangle = \frac{1}{2} r_f r_g Z_1 A_1^2$. les expressions de r_f et r_g montrent que ce dernier résultat est négatif, tout simplement parce que l'onde est rétrograde.

Il est intéressant de définir des coefficients de réflexion et transmission en énergie, traditionnellement notés R et T (en majuscules) par $T = \frac{\langle \mathcal{P}_t(0,t) \rangle}{\langle \mathcal{P}_i(0,t) \rangle}$ et, pour avoir un résultat positif, $R = \frac{-\langle \mathcal{P}_r(0,t) \rangle}{\langle \mathcal{P}_i(0,t) \rangle}$, soit :

$$R = -r_f r_g = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \qquad T = t_f t_g = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

On remarque qu'il y a conservation de l'énergie car R+T = 1 (c'est pourquoi, il n'était pas paradoxal que t_f ou t_g ne soit pas inférieur à l'unité (cf supra); ce qui compte c'est que T le soit).

Dans le cas (cf supra) où ce ne sont pas les fonctions f et g qui sont continues, il n'est pas possible de faire une étude énergétique indépendante du contexte particulier. On gérera cela au coup par coup.

Remarque : dans le chapitre D-IV où l'on introduira des phénomènes dissipatifs, les impédances et les coefficients de transmission et réflexion seront complexes et il nous faudra revenir sur l'aspect énergétique en tenant compte des déphasages.

6.d Réflexion sur une impédance.

Une autre problématique classique est celle ci : au delà de x = 0, il n'y a plus de milieu pouvant transporter l'onde, donc plus d'onde transmise mais un dispositif imposant une relation linéaire entre g(0,t) et f(0,t) écrite sous la forme :

$$g(0,t) = Z_u f(0,t)$$

où, par analogie, Z_u est appelée *impédance d'utilisation* ou *impédance terminale*; par exemple si f et g sont respectivement une intensité et un tension électrique Z_u sera une résistance. On supposera dans ce chapitre Z_u réel.

Les fonction f et g sont la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. On arrive donc, en x = 0 et après simplification par $\exp(i \omega t)$, en adaptant les calculs du cas précédent :

$$Z_1 A_i - Z_1 A_r = Z_u \left(A_i + A_r \right)$$

d'où l'on tire aisément :

$$r = \frac{Ar}{A_i} = \frac{Z_1 - Z_u}{Z_1 + Z_u}$$

Il y a trois cas particuliers intéressants :

- $Z_u = 0$ qui impose g(0,t) = 0 d'où $Z_1 A_i Z_1 A_r = 0$ et r = 1 compatible avec la formule obtenue. On aura une onde stationnaire avec en x = 0 un nœud de g donc (cf paragraphe 3.a p. 18) un ventre de f
- $Z_u = \infty$ qui impose $f(0,t) = \frac{g(0,t)}{Z_u} = 0$, d'où $A_i + A_r = 0$ et r = -1 compatible avec la formule obtenue. On aura une onde stationnaire avec en x = 0 un nœud de f donc un ventre de g
- $-Z_u = Z_1$ qui entraîne r = 0 et réalise donc un dispositif anti-reflet essentiel pour l'étude expérimentale dans un milieu fini d'une situation en x = b de réflexion et transmission entre deux milieux : il suffira de placer en début de « montage », en x = a < b un générateur (cf supra) et en fin de montage en x = c > b un dispositif

anti-reflet ; du reste c'est aussi ainsi que l'on pourra, dans un milieu fini, observer une onde propagative directe non superposée à une indirecte.

7 Ondes bi- ou tri-dimensionnelles.

On se contente ici d'évoquer les aspects dont on a le plus fréquemment besoin.

7.a Ondes stationnaires dans un milieu dimensionnel.

L'équation dimensionnelle de propagation est $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \, \Delta f$ soit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

que nous nous proposons de résoudre dans un domaine fini à la frontière duquel f s'annule en tout point et à tout instant. Il peut s'agir d'une membrane tendue sur un support fermé qui est la frontière du domaine de validité.

• Ondes stationnaires dans carré.

Le domaine de validité est un carré défini avec un bon choix des axes par 0 < x < a et 0 < y < a. La condition aux limites est que f(x, y, t) est nulle quels que soient y et t pour x égal à 0 ou a et quels que soient x et t pour y égal à 0 ou a.

On ne change pas une équipe qui gagne et l'on adapte la méthode du cas unidirectionnel en recherchant une solution factorisée en f(x, y, t) = F(x) G(y) H(t). On reporte dans l'équation de propagation puis on divise par F G H, soit successivement :

$$F(x) G(y) H''(t) = c^{2} [F''(x) G(y) H(t) + F(x) G''(y) H(t)]$$
$$\frac{H''(t)}{H(t)} = c^{2} \left[\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} \right]$$

On en déduit (comme dans le cas unidirectionnel) que $\frac{F''(x)}{F(x)}$ est une constante; or pour respecter les conditions aux limites, F doit s'annuler en x = 0 et x = a. Comme plus haut, en la considérant comme restriction d'une fonction impaire 2a-périodique, elle est somme de fonctions élémentaires en sin $(p\pi \frac{x}{a})$ où p est un entier non nul. La logique linéaire permet de considérer chacune de ces fonctions une à la fois.

De la même façon, G(y) est somme de fonctions, considérées une à la fois, en sin $\left(q \pi \frac{y}{a}\right)$ où q est un entier non nul. Il n'y a aucune raison que p et q soient identiques.

Pour p et q donnés (on parle du mode p-q), on a donc :

$$\frac{H''(t)}{H(t)} = \frac{\pi^2 c^2}{a^2} \left(p^2 + q^2\right)$$

qui conduit à des fonctions $f_{p,q}(x, y, t)$ définies à une amplitude A arbitraire près et à une phase près (qu'on annule avec un bon choix de l'origine des temps) :

$$f_{p,q}(x, y, t) = A \sin\left(p\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(q\pi \frac{y}{a}\right) \sin(\omega_{p,q} t)$$

où l'on a :

$$\omega_{p,q} = \sqrt{p^2 + q^2} \, \frac{\pi \, c}{a}$$

à comparer dans le contexte unidirectionnel à

$$\omega_p = p \, \frac{\pi \, c}{a}$$

La différence fondamentale réside dans le rapport entre une pulsation quelconque et la plus basse des pulsations (mode 1 en unidirectionnel et mode 1-1 en bidirectionnel) qui est entier (p) en unidirectionnel et souvent irrationnel $(\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}})$ en bidirectionnel. Dans les applications musicales, une telle membrane émet un son perçu par une oreille habituée aux harmoniques entiers comme quelque chose d'inharmonieux, un bruit plutôt qu'un son.

Remarques : avec un rectangle défini par 0 < x < a et 0 < y < b, on aurait de même $\omega_{p,q} = \sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \pi c$ et avec un cube de côté a (on parle alors plutôt de *cavité résonante*), $\omega_{p,q,r} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \frac{\pi c}{a}$; dois-je vraiment parler du parallélépipède?

• Ondes stationnaires dans un disque.

On reprend le même problème mais avec un domaine de validité en forme de disque de rayon a, la fonction étant nulle en périphérie. On cherche alors une solution factorisée en coordonnées polaires, soit $f(r, \theta, t) = F(r) G(\theta) H(t)$; en utilisant un formulaire ¹¹ donnant le laplacien en polaires, on en déduit successivement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \,\Delta f = c^2 \,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)$$
$$F(r) \,G(\theta) \,H''(t) = c^2 \,\left(F''(r) \,G(\theta) \,H(t) + \frac{1}{r} \,F'(r) \,G(\theta) \,H(t) + \frac{1}{r^2} \,F(r) \,G''(\theta) \,H(t)\right)$$

soit en divisant par FGH :

$$\frac{H''(t)}{H(t)} = c^2 \left[\frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r} \frac{F'(r)}{F(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{G''(\theta)}{G(\theta)} \right]$$

Toujours pour les mêmes raisons, les deux fonctions $\frac{H''(t)}{H(t)}$ et $\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}$ sont constantes mais pas $\frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r} \frac{F'(r)}{F(r)}$ à cause du $\frac{1}{r^2}$ qui traîne ailleurs. On justifie cela comme plus haut avec une adaptation sans difficulté.

^{11.} Par exemple dans le chapitre A-IX sur l'analyse vectorielle.

Pour G, la contrainte que $G(\theta) = G(\theta + 2\pi)$, car ces deux valeurs définissent à r donné le même point, impose à G d'être 2π -périodique donc somme de fonctions sinusoïdales (séries de FOURIER) en $\cos(p\theta)$ (p entier positif ou nul) et $\sin(p\theta)$ (p strictement positif) pour lesquelles $\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = -p^2$.

Pour H(t) en excluant les solutions exponentielles divergentes (énergétiquement impossibles) ou convergeant vers 0 (impossible dans un contexte non dissipatif), il reste les solutions sinusoïdales en $\cos(\omega t)$ à une phase près pour lesquelles $\frac{H''(t)}{H(t)} = -\omega^2$.

On doit donc résoudre, en reportant ces valeurs :

$$\frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r} \frac{F'(r)}{F(r)} - \frac{p^2}{r^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

soit encore

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) - \frac{p^2}{r^2}F(r) = -\frac{\omega^2}{c^2}F(r)$$

Le changement de variable $X(r) = \frac{\omega r}{c}$ (d'où $\frac{1}{r} = \frac{\omega}{cX}$) permet de définir une fonction \tilde{F} telle que $\tilde{F}[X(r)] = F(r)$, d'où par dérivation $F'(r) = \tilde{F}'[X(r)] X'(r) = \frac{\omega}{c} \tilde{F}'[X(r)]$ puis de même $F'' = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{F}''$; on arrive ainsi aisément à montrer que \tilde{F} est solution de l'équation avec comme seul paramètre l'entier p:

$$\tilde{F}''(X) + \frac{1}{X}\tilde{F}'(X) - \frac{p^2}{X^2}\tilde{F}(X) = -\tilde{F}(X)$$

qui à p donné admet une seule solution (à une constante multiplicative près) qui ne diverge pas en X = 0 (donc en r = 0) ce qui est exclu par le dispositif expérimental. Cette solution est une fonction de BESSEL d'ordre p, notée $J_p(X)$.

Pour les curieux, nous donnons ici les grandes lignes de l'approche mathématique.

On cherche une solution sous forme d'une série entière $\tilde{F}(X) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n X^n$; en reportant dans l'équation on arrive à :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (n^2 - p^2) a_n X^{n-2} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n X^n$$

La présence des termes en X^{-2} et X^{-1} au premier membre entraîne que $a_0 = 0$ et que $a_1 = 0$. En égalant les coefficients termes à termes des deux membres, on arrive à la relation qui lie par récurrence les termes de même parité : $(n^2 - p^2) a_n = -a_{n-2}$. La nullité de a_0 et a_1 semble donc entraîner celle de tous les autres coefficients; en y regardant de plus près, pour n = p, la relation devient $0 \cdot a_p = -a_{p-2}$ qui permet à a_p d'être non nul bien que a_{p-2} le soit; on en déduit, au delà de p, les valeurs des coefficients de même parité que p. On arrive ensuite aisément à :

$$\tilde{F}(X) = a_p \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{(-1)^q \, p! \, X^{p+2\,q}}{q! \, (p+q)!}$$

La tradition définit la fonction d'ordre p de Bessel, notée J_p par $a_p = \frac{1}{2^p p!}$; on peut donc écrire toute solution factorisée de notre problème par :

$$f(r, \theta, t) = Cte J_p\left(\frac{\omega r}{c}\right) \cos[p(\theta - \theta_0)] \cos(\omega t + \varphi)$$

Reste à gérer la condition aux limites, à savoir que f s'annule pour r = a quels que soient θ et t; pour cela il faut et il suffit que $J_p\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0$, c'est-à-dire que $\frac{\omega a}{c}$ soit l'un des zéros de la fonction J_p . La figure 7 p. 37 donne les graphe des trois premières fonctions de BESSEL et suggère que chacune a une infinité dénombrable de zéros.



FIGURE 7 – Fonctions de Bessel.

Si l'on appelle $X_{p,r}$ le *r*-ième zéro de J_p , le seules pulsations possibles sont donc $\omega_{p,r} = \frac{cX_{p,r}}{a}$. A pulsation minimale égale (ici $\omega_{0,1}$), le spectre des pulsations possibles est totalement différent de celui d'une membrane carrée. S'il y a génération de phénomène sonores, avec un peu d'entraînement, on distinguer ¹² à l'oreille une membrane carré d'une membrane circulaire.

Il serait intéressant de donner la forme d'une membrane circulaire dans un mode différent du fondamental mais c'est mieux si l'image est animée; comme je ne suis pas Harry Potter, je ne puis pas le faire et invite le lecteur à se tourner sur Internet où il trouvera son bonheur.

^{12.} Le mathématicien M. Kac (prononcer Kats) a posé en 1966 le problème de savoir si deux membranes de formes différentes pouvaient avoir le même spectre. La réponse est oui ; le contre-exemple trouvé en 1996 est exotique (voir la revue du CNRS « Images de la Physique », numéro de 1998, p. 86 à 93, consultable gratuitement en ligne).

7.b Structure des ondes planes progressives dans un milieu tridimensionnel.

• Ondes planes.

Si une fonction f(M,t) = f(x, y, z, t) vérifie l'équation de propagation tridimensionnelle $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$, on peut trouver en notation complexe et par extension du cas unidirectionnel des solutions de la forme $A \exp i \left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right)$ avec $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ qu'il est plus judicieux ¹³ d'écrire sous la forme $A \exp i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}\right)$ où \vec{k} a pour composantes k_x , k_y et k_z et tel que $\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. Le vecteur \vec{k} est appelé vecteur d'onde et une telle solution onde plane progressive sinusoïdale, plane car, dans un plan perpendiculaire au vecteur d'onde, f est uniforme.

• Exemple de couplages.

La situation se complique avec beaucoup de variantes car f et, dans le cas d'onde par couplage (cf supra), sa complice g peuvent être vectorielles (une seule ou les deux). Quelle est alors le pendant, à trois dimensions, d'une équation de couplage qui, à une, était de la forme $\frac{\partial g}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0$?

En surmontant les vecteurs d'une flèche, on peut trouver

$$\frac{\partial g}{\partial t} + a \operatorname{div} \overrightarrow{f} = 0$$
$$\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t} + a \operatorname{grad} f = \overrightarrow{0}$$
$$\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t} + a \operatorname{rot} \overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$$

Il faudra dans chaque situation montrer que les deux fonctions vérifient bien l'équation de propagation, trouver la célérité et revisiter la notion d'impédance; dans ce cours, on verra cela, au cas par cas, dans les chapitres concernés.

• Ondes transversales et longitudinales.

Une autre source de variété est le lien entre la direction de propagation, donnée par le vecteur \vec{k} et celle des fonctions couplées si elle sont vectorielles. Il y a deux cas simples. Le premier est que la fonction vectorielle (disons \vec{f}) est parallèle au vecteur d'onde et il n'y a rien de plus à en dire, il s'agit d'une *onde longitudinale*. Le second est que la fonction vectorielle est perpendiculaire au vecteur d'onde (il s'agit d'une *onde transversale*) et là, il y a beaucoup de choses à dire car l'orthogonalité ne prouve absolument pas que \vec{f} ait

^{13.} car cela ne nécessite pas d'expliciter le repère choisi.

une direction fixe. La direction, éventuellement variable de \overrightarrow{f} dans le plan orthogonal à \overrightarrow{k} s'appelle la *polarisation* de l'onde.

Il y a bien sûr des cas où \overrightarrow{f} a une composante longitudinale et une composante transversale. A priori, il y a bien sûr aussi des cas d'ondes couplées où \overrightarrow{f} est transversal et \overrightarrow{g} longitudinal (pas d'exemple simple toutefois).

• Polarisation des ondes transversales.

Revenons aux notations réelles et choisissons un repère de sorte que \vec{k} soit parallèle à Ox et de même sens, la fonction vectorielle transversale \vec{f} est alors de la forme :

0

$$E_2 \cos(\omega t - k x + \varphi_2)$$

 $E_3 \cos(\omega t - k x + \varphi_3)$

Plaçons nous en une abscisse x donnée; en changeant l'origine des temps, on arrive aisément à quelque chose du type :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ E_2 \cos(\omega t) \\ E_3 \cos(\omega t + \varphi) \end{vmatrix}$$



FIGURE 8 – Polarisation elliptique.

Si nous traçons sur un schéma (figure 8 p. 39 avec $\varphi = \pi/3$) l'ensemble des extrémités du champ électrique (à partir d'une origine commune), on obtient une ellipse. Inutile de faire de longs calculs puisqu'on retrouve le résultat classique d'un oscilloscope avec deux signaux déphasés sur les deux voies et placé en mode X-Y. On dit que l'onde est polarisée elliptiquement, ce qui du reste n'est pas un renseignement, puisqu'il s'agit du cas le plus général. Si, au cours du temps, l'ellipse est parcourue dans le sens positif, c'est-à-dire de Oy vers Oz, on dit qu'on a affaire à une onde elliptique directe (naguère, on disait gauche) sinon il s'agit d'une polarisation elliptique indirecte (ou droite). Pour savoir dans quel sens on tourne on peut comparer ce qui se passe à t = 0 où :

$$\overrightarrow{f} = \begin{vmatrix} 0\\ E_2\\ E_3\cos(\varphi) \end{vmatrix}$$

et à $t = T/4 = \pi/(2\omega)$ où :

$$\vec{f} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ E_3 \cos(\pi/2 + \varphi) & = \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ -E_3 \sin(\varphi) \end{vmatrix}$$

On tourne donc dans le sens indirect si sin φ est positif (cf schéma).

Etudions maintenant quelques cas particuliers.

• Polarisations rectilignes.

Un premier cas particulier est celui où $\varphi = 0$ ou π et donc où l'ellipse se réduit à un segment. Bien sûr dans ce cas, on choisit Oy ou Oz parallèle à ce segment. On dit évidemment qu'on a affaire à une polarisation rectiligne. On a par exemple :

$$\vec{f} = \begin{vmatrix} 0\\ E_2 \cos(\omega t - kx)\\ 0 \end{vmatrix}$$

Il est important de remarquer qu'une onde de polarisation elliptique peut être considérée comme (donc se décomposer en) une somme de deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions orthogonales; en effet :

$$\begin{vmatrix} 0\\ E_2\cos(\omega t - kx)\\ E_3\cos(\omega t - kx + \varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\\ E_2\cos(\omega t - kx) + \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0\\ E_3\cos(\omega t - kx + \varphi)\\ E_3\cos(\omega t - kx + \varphi) \end{vmatrix}$$

• Polarisations circulaires.

Un autre cas particulier est celui où $\varphi = \pm \pi/2$ et $a_2 = a_3$ (on note *a* sans indice) et où donc l'ellipse se réduit à un cercle. On dit qu'on a affaire selon le sens de rotation (cf supra) à une polarisation circulaire directe (on dit encore gauche) ou bien indirecte (on dit encore droite). On a alors :

$$\vec{f} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - k x) \\ \pm E_0 \sin(\omega t - k x) \end{vmatrix}$$

Là aussi, il est important de remarquer qu'une onde polarisée rectilignement est somme de deux ondes polarisées circulairement et tournant en sens inverse; en effet :

$$\begin{vmatrix} 0\\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0\\ 1/2 E_0 \cos(\omega t - kx) \\ 1/2 E_0 \sin(\omega t - kx) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0\\ 1/2 E_0 \cos(\omega t - kx) \\ -1/2 E_0 \sin(\omega t - kx) \end{vmatrix}$$

On en déduit aisément que toute onde polarisée elliptiquement se décompose en deux circulaires.

• Modification de la polarisation d'une onde.

Il existe des dispositifs permettant de modifier la polarisation d'une onde; ceux-ci dépendant de la nature de l'onde et sont donc des cas d'espèces; le cas plus intéressant est celui des ondes lumineuses et sera étudié en optique au chapitre D-X.

7.c Réflexion et transmission d'ondes planes progressives tridimensionnelles.

• Loi de Snell-Descartes.

Considérons une surface plane d'équation x = 0 séparant deux milieux homogènes différents. Dans la pratique, la surface pourra être courbe pourvu que ses rayons de courbure soient grands devant la longueur d'onde des phénomènes ondulatoires étudiés.

Considérons une onde plane progressive sinusoïdale en $\exp j(\omega_i t - \overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{OM})$ de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_i} = k_{i1} \overrightarrow{e_x} + k_{i2} \overrightarrow{e_y} + k_{i3} \overrightarrow{e_z}$ se propageant dans le milieu situé côté x < 0 qu'on appelera milieu 1 et se dirigeant vers la surface de séparation (cf figure 9 p. 41). Cette onde sera appelée onde *incidente*. En pratique, l'onde peut ne pas être plane pourvu que le rayon de courbure des surfaces d'onde soit grand devant la longueur d'onde.



FIGURE 9 – Réflexion et transmission oblique.

Elle donne naissance à une onde réfléchie en $\exp j(\omega_r t - \overrightarrow{k_r}.\overrightarrow{OM})$ de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_r} = k_{r1} \overrightarrow{e_x} + k_{r2} \overrightarrow{e_y} + k_{r3} \overrightarrow{e_z}$ qui repart dans l'autre sens dans le milieu 1 et une onde transmise en $\exp j(\omega_t t - \overrightarrow{k_t}.\overrightarrow{OM})$ de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_t} = k_{t1} \overrightarrow{e_x} + k_{t2} \overrightarrow{e_y} + k_{t3} \overrightarrow{e_z}$ qui se

propage dans le milieu 2, côté x > 0.

Les lois de la physique entraînent la continuité de certaines fonctions scalaires ou de certaines composantes de fonctions vectorielles, continuité qui est vérifiée à la traversée de la surface de séparation en chacun de ses points et à chaque instant. Il importe peu ici de savoir la nature de ces fonctions, l'important c'est qu'il y en ait. On notera A l'une de ces grandeurs, $A_i(M,t)$, $A_r(M,t)$, $A_t(M,t)$ les fonctions sinusoïdales associées aux trois ondes et respectivement $\underline{A}_{i0} \exp j(\omega_i t - \vec{k}_i . \overrightarrow{OM})$, $\underline{A}_{r0} \exp j(\omega_r t - \vec{k}_r . \overrightarrow{OM})$ et $\underline{A}_{t0} \exp j(\omega_t t - \vec{k}_t . \overrightarrow{OM})$ les fonctions complexes associées.

Les fonctions qui se raccordent sont, côté x < 0, la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, c'est-à-dire leur somme puisqu'on est dans un contexte de linéarité et, côté x > 0, l'onde transmise. On a donc, puisque la continuité est vérifiée à tout instant et en tout point de la surface :

$$\forall y \ \forall z \ \forall t \ \lim_{x \to 0^-} \underline{A}_{i0} \exp \jmath(\omega_i t - \overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{OM}) + \underline{A}_{r0} \exp \jmath(\omega_r t - \overrightarrow{k_r}.\overrightarrow{OM}) = \cdots$$
$$\cdots = \lim_{x \to 0^+} \underline{A}_{t0} \exp \jmath(\omega_t t - \overrightarrow{k_t}.\overrightarrow{OM})$$

soit en développant les produits scalaires et en faisant tendre x vers 0:

$$\forall y \ \forall z \ \forall t \ \underline{A}_{i0} \exp j(\omega_i t - k_{i2} y - k_{i3} z) + \underline{A}_{r0} \exp j(\omega_r t - k_{r2} y - k_{r3} z) = \cdots$$
$$\cdots = \underline{A}_{t0} \exp j(\omega_t t - k_{t2} y - k_{t3} z)$$

comme c'est vrai pour tout y et pour tout z, c'est vrai, à tout instant pour y = 0 et z = 0, donc :

$$\forall t \underline{A}_{i0} \exp j(\omega_i t) + \underline{A}_{r0} \exp j(\omega_r t) = \underline{A}_{t0} \exp j(\omega_t t)$$

Or la somme de deux fonctions sinusoïdales n'est sinusoïdale que si les pulsations sont égales (sinon, on aurait des battements, tout physicien le sait bien) et alors la somme est une sinusoïde de même pulsation. On est donc amené à la conclusion que les trois pulsations sont égales, ce qui est physiquement naturel; donc $\omega_i = \omega_r = \omega_t$.

On remarquera enfin que $\lim_{x\to 0^-} (A_i + A_r) = \lim_{x\to 0^+} A_t$ conduit simplement à $\underline{A}_{i0} + \underline{A}_{r0} = \underline{A}_{t0}$, ce qui permettra plus loin d'abréger les calculs.

Il y a bien plus important que l'égalité des pulsations. On démontrerait de la même façon les égalités suivantes :

$$k_{i2} = k_{r2} = k_{t2}$$

 $k_{i3} = k_{r3} = k_{t3}$

(mais rien concernant k_{i1} , k_{r1} ni k_{t1}). On peut résumer la chose en disant que :

Les projections des trois vecteurs d'onde sur la surface de séparation sont égales.



FIGURE 10 – Lois de Snell-Descartes.

On peut toujours choisir les axes de sorte que $k_{i3} = 0$ et $k_{i2} > 0$; on en déduit la figure 10 p. 43 où l'on utilise le fait qu'alors $k_{r2} = k_{t2} = 0$ et $k_{r3} = k_{t3} > 0$, ce qu'on traduit traditionnellement par ces formules concernant trois rayons (droites parallèles au différents vecteurs d'onde) arrivant ou partant du même point O où le plan d'incidence désigne le plan contenant la normale à la surface de séparation et le rayon incident. Une première constatation :

Le rayon réfléchi (ou transmis) est dans le plan d'incidence.

Le rayon réfléchi (ou transmis) et le rayon incident sont de part et d'autre de la normale.

Allons encore plus loin. Appelons V_1 et V_2 les vitesses de propagation des ondes étudiées dans chacun des deux milieux. On se souvient que $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = \omega_i/V_1$ (ondes se propageant dans le milieu 1) et $\|\vec{k}_t\| = \omega_i/V_2$ (dans le milieu 2). Définissons un *indice de réfraction* par $V = V_{réf}/n$, donc $V_1 = V_{réf}/n_1$ et $V_2 = V_{réf}/n_2$ où $V_{réf}$ est une vitesse de référence, a priori arbitraire (dans le cas des ondes électromagnétiques, on choisit c, vitesse de la lumière dans le vide qui est une constante universelle). On a donc $\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = n_1 \omega_i/V_{réf}$ et $\|\vec{k}_t\| = n_2 \omega_i/V_{réf}$. Appelons (voir figure précédente) θ_i , θ_r et θ_t les angles que font les rayons incident, réfléchi et transmis avec la normale, appelés angles d'incidence, de réflexion et de réfraction; on a donc :

$$k_{i2} = \|\overrightarrow{k}_i\| \sin \theta_i = n_1 \omega \sin \theta_i / V_{r\acute{e}f}$$
$$k_{r2} = \|\overrightarrow{k}_r\| \sin \theta_r = n_1 \omega \sin \theta_r / V_{r\acute{e}f}$$
$$k_{t2} = \|\overrightarrow{k}_t\| \sin \theta_t = n_2 \omega \sin \theta_t / V_{r\acute{e}f}$$

Ces trois grandeurs sont égales, on en tire

– d'une part $\sin \theta_r = \sin \theta_t$ d'où $\theta_r = \theta_t$ (on notera θ_1 leur valeur commune)

L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence

- d'autre part $n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i$ (on notera θ_2 au lieu de θ_t)

L'angle de réfraction et l'angle d'incidence vérifient la loi de Snell-Descartes

Insistons sur le fait que cette démonstration n'a pas nécessité de préciser ni la nature des ondes, ni la nature des grandeurs continues; ses conclusions sont donc valables pour tous les types d'onde (lumière, son, houle, etc.)

• Exemple de calcul des coefficients de réflexion et transmission.

La façon dont on mène les calculs est tributaire de la structure de l'onde; les fonctions f et g peuvent être scalaires ou vectorielles et dans ce dernier cas, longitudinales ou transversales. Quant aux continuités pour une fonction vectorielle, elle portent en général soit sur la composante orthogonale (dite aussi composante normale) au plan de séparation entre milieux, soit sur la composante parallèle (dite aussi composante tangentielle); c'est dire qu'il y a une grande variété. Contentons-nous d'un exemple arbitraire (en fait une onde sonore) pour dégager les méthodes de réflexion.

L'onde choisie comme exemple sera caractérisée par une fonction scalaire f, continue à la surface de séparation et d'une fonction vectorielle longitudinale \vec{g} de composante normale continue à la surface de séparation. Les deux fonctions, pour l'une quelconque des trois ondes sont proportionnelles sous la forme $\vec{g} = Z f \vec{u}$ où \vec{u} est le vecteur unitaire de la direction de propagation. Bien sûr Z a une valeur différente dans le milieu 1 et dans le milieu 2.

La remarque de paragraphe précédent $(\underline{A}_{i0} + \underline{A}_{r0} = \underline{A}_{t0})$ s'adapte aisément en :

$$\underline{f}_{i0} + \underline{f}_{r0} = \underline{f}_{t0}$$

pour la fonction scalaire f et en :

$$Z_1 \underline{f}_{i0} \cos \theta_1 - Z_1 \underline{f}_{r0} \cos \theta_1 = Z_2 \underline{f}_{t0} \cos \theta_2$$

pour la composante normale de la fonction vectorielle longitudinale \overrightarrow{g} .

On en déduit aisément que :

$$\frac{\underline{f}_{r0}}{\underline{f}_{i0}} = r = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} \qquad \frac{\underline{f}_{t0}}{\underline{f}_{i0}} = t = \frac{2 Z_1 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission, à milieux donnés, dépendent de l'angle d'incidence θ_1 (mais pas de l'angle de réfraction θ_2 car celui-ci est en fait lui aussi fonction de l'angle d'incidence par la loi de SNELL-DESCARTES; c'est pour la symétrie du résultat qu'on le laisse tel tel dans la formule).

Energétiquement, pour « coller » aux situations concrètes possibles, nous supposerons que la puissance reçue par une surface d'aire S de la surface de séparation (de vecteur normal \overrightarrow{n}) est $\mathcal{P} = f \overrightarrow{g} \cdot S \overrightarrow{n}$ d'où une puissance surfacique moyenne $\mathcal{P}_S = f \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{n}$. En reprenant les calculs comme plus haut (retour aux fonctions réelles sinusoïdales et moyenne temporelle introduisant un facteur $\frac{1}{2}$), en notant $f_{i0} = |\underline{f}_{i0}|$ (et analogues) et avec des $\cos \theta$ introduits par le produit scalaire, l'onde incidente apporte à la surface de séparation une puissance surfacique $\mathcal{P}_{Si} = \frac{1}{2} Z_1 f_{i0}^2 \cos \theta_1$, l'onde réfléchie emporte en valeur absolue (comme plus haut le signe négatif qui apparaît est lié au sens de propagation et n'est pas pertinent dans ce contexte) une puissance surfacique $|\mathcal{P}_{Sr}| = \frac{1}{2} Z_1 f_{r0}^2 \cos \theta_1$ et l'onde transmise $\mathcal{P}_{St} = \frac{1}{2} Z_2 f_{i0}^2 \cos \theta_2$. Les coefficients énergétiques de réflexion et transmission sont donc :

$$R = \frac{|\mathcal{P}_{Sr}|}{|\mathcal{P}_{Si}|} = r^2 = \frac{(Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2)^2}{(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)^2}$$
$$T = \frac{\mathcal{P}_{St}}{|\mathcal{P}_{Si}|} = \frac{Z_2 \cos \theta_2}{|Z_1 \cos \theta_1|} t^2 = \frac{4 Z_1 \cos \theta_1 Z_2 \cos \theta_2}{(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)^2}$$

qui vérifient la conservation de l'énergie (R + T = 1).

Rappelons qu'il s'agit d'un exemple arbitraire choisi dans la variété des possibles, mais que la méthode est aisément adaptable aux autres cas.

7.d Ondes sphériques.

Une onde est dite sphérique si les phénomènes associés ne dépendent que du temps et de la distance r à un point fixe O. On passe alors naturellement en coordonnées sphériques et l'équation de propagation est alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \,\Delta f = c^2 \,\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \,\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

puisque f ne dépend pas de la direction donc des deux autres coordonnées sphériques. La résolution est simplifiée si l'on connaît la variante suivante pour le laplacien sphérique :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \,\Delta f = c^2 \,\frac{1}{r} \,\frac{\mathrm{d}^2(r \,f)}{\mathrm{d}r^2}$$

car alors on a :

$$c^{2} \frac{\mathrm{d}^{2}(rf)}{\mathrm{d}r^{2}} = r \frac{\partial^{2}f}{\partial t^{2}} = \frac{\mathrm{d}^{2}(rf)}{\mathrm{d}t^{2}}$$

car une dérivation partielle par rapport à t se fait en supposant r constant. Formellement, la fonction r f vérifie donc l'équation unidirectionnelle où r remplace x.

• Ondes progressives.

On peut donc avoir des solutions progressives en $r f = F\left[\omega(t \pm \frac{r}{c})\right]$, somme de solutions progressives sinusoïdales en $r f(r,t) = A \cos\left[\omega(t \pm \frac{r}{c})\right]$ soit :

$$f(r,t) = \frac{A}{r} \cos\left[\omega\left(t \pm \frac{r}{c}\right)\right]$$

où, selon que le propagation se fait dans le sens des r croissants ou décroissants, l'onde est dite divergente ou convergente.

A part cela, que dire? Que l'amplitude en $a(r) = \frac{A}{r}$ est énergétiquement prévisible en effet les puissances surfaciques font toujours un intervenir un carré d'amplitude en $a(r)^2$ et la puissance qui traverse une sphère de rayon r et de surface $S(r) = 4\pi r^2$ doit être constante si le milieu n'absorbe pas d'énergie (ce qui est notre hypothèse : pas de dissipation); on conclut aisément.

Tout est donc finalement simple. En bien non, pas dans le cas d'ondes par couplage. Nous avons en effet tacitement admis que la première fonction f était scalaire et la seconde fonction \overrightarrow{g} sera forcément, ou presque, vectorielle, avec :

$$\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t} + a \ \overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{0}$$

ce qui, dans le cas d'une onde divergente en $f(r,t) = \frac{A}{r} \cos \left[\omega(t-\frac{r}{c})\right]$ et en notant $\overrightarrow{e_r}$ le vecteur unitaire radial, conduit successivement à :

$$\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t} = -a \overrightarrow{\text{grad}} f = -a \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{e_r} = \frac{aA}{r^2} \cos\left[\omega(t - \frac{r}{c})\right] \overrightarrow{e_r} - \frac{a\omega A}{cr} \sin\left[\omega(t - \frac{r}{c})\right] \overrightarrow{e_r}$$
$$\overrightarrow{g}(r,t) = \frac{aA}{\omega r^2} \sin\left[\omega(t - \frac{r}{c})\right] \overrightarrow{e_r} + \frac{aA}{cr} \cos\left[\omega(t - \frac{r}{c})\right] \overrightarrow{e_r}$$

Les deux termes ont même amplitude si $\frac{aA}{\omega r^2} = \frac{aA}{cr}$ soit, en introduisant la longueur d'onde, $r = \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$. Ce n'est donc que si r est grand devant la longueur d'onde λ que l'on retrouve le lien simple entre f et \overrightarrow{g} puisqu'alors, et alors seulement, en retrouvant l'impédance $Z = \frac{a}{c}$:

$$\overrightarrow{g}(r,t) \approx \frac{aA}{cr} \cos\left[\omega(t-\frac{r}{c})\right] \overrightarrow{e_r} = Z f(r,t) \overrightarrow{e_r}$$

• Ondes stationnaires.

Si l'on cherche une solution stationnaire avec comme conditions aux limites que fdonc rf s'annule à tout instant en r = a et r = b, on pourra utiliser à plein l'analogie unidirectionnelle pourvu de penser à décaler l'origine en posant r = a + (r - a) et en remplaçant dans le raisonnement classique ℓ pr b - a. Le mode d'ordre p sera avec une bonne origine de temps et à une amplitude arbitraire A près :

$$f_p(r,t) = \frac{A}{r} \sin\left(p\pi \frac{r-a}{b-a}\right) \sin\left(p\pi \frac{ct}{b-a}\right)$$

Par contre, la situation devient nettement plus complexe dans le cas d'ondes par couplage et avec des conditions aux limites mixtes comme f s'annule en r = a et \overrightarrow{g} en r = b. La première condition en r = a et l'équation de propagation vérifiée par r f suggère, avec un bon choix de l'origine des temps, une solution en :

$$f(r,t) = \frac{A}{r} \sin\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \sin(\omega t)$$

On en déduit \overrightarrow{g} comme plus haut :

$$\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t} = -a \overrightarrow{\text{grad}} f = -a \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{e_r} = \frac{aA}{r^2} \sin\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \sin(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{a\omega A}{cr} \cos\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{a\omega A}{cr} \sin\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{a\omega A}{cr} \cos\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{a\omega A}{cr} \cos\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{a\omega A}{cr} \sin\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{a\omega A}{cr} \cos\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{a\omega A}{cr} \sin\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{a\omega A}{cr} \sin\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{\omega}{cr} \cos\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{\omega}{cr} - \frac{\omega}{cr} \cos\left[\frac{\omega}{c} (r-a)\right] \cos(\omega t) \overrightarrow{e_r} - \frac{\omega}{cr} - \frac{\omega}{cr$$

Après simplifications, la condition de nullité en tout instant de \overrightarrow{g} en r = b s'exprime successivement ainsi :

$$\frac{1}{\omega b} \sin\left[\frac{\omega}{c} (b-a)\right] = \frac{1}{c} \cos\left[\frac{\omega}{c} (b-a)\right]$$
$$\tan\left[\frac{\omega}{c} (b-a)\right] = \frac{\omega b}{c} = \frac{b}{b-a} \left[\frac{\omega}{c} (b-a)\right]$$

qui est une équation de la forme $\tan X = KX$ avec $X = \frac{\omega}{c}(b-a)$ et $K = \frac{b}{b-a}$ que l'on résout d'abord graphiquement¹⁴ puis par des moyens numériques. Si K est assez grand devant l'unité, les solutions sont proches et légèrement inférieures à $(2q+1)\frac{\pi}{2}$ donc les pulsations possibles proches de $\omega_{2q+1} = (2q+1)\frac{\pi}{2}\frac{c}{b-a}$ qui sont les solutions trouvées dans le cadre unidirectionnel dans une situation similaire. Les pulsations ne sont plus rigoureusement les multiples impairs de la plus petite. Un instrument à vent de *perce conique* à anche (qui impose une vitesse acoustique nulle), comme le hautbois, est donc théoriquement un peu faux, mais en musique, les choses sont toujours un peu plus compliquées que prévu.

7.e Autres types d'ondes.

• Ondes sphérico-gaussiennes.

Considérons, en notation complexe, une onde sphérique scalaire en $\frac{A}{r} e^{i\omega(t-\frac{x}{c})}$ ou encore, avec $k = \frac{\omega}{c}$ en $\frac{A}{r} e^{ik(ct-x)}$.

^{14.} je n'ai pas cru utile de faire une figure ; si elle vous manque, adaptez celle du problème masse-ressort évoqué plus haut.

Plaçons-nous dans le voisinage de l'axe Oz c'est-à-dire en des points tels que |x| et |y| soient négligeable devant |z|. On peut alors remplacer $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ par un développement limité à l'ordre 1 soit (on fait grâce des calculs au lecteur) $r = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$ (on se place pour alléger dans le cas où z est positif) et même à l'ordre 0 soit r = z dans le terme en $\frac{1}{r}$, ce qui n'est pas possible dans l'exponentielle qui est périodique et remplace z par son reste dans la division par la longueur d'onde et remplace donc l'ordre 0 par quelque chose qui n'est pas forcément grand devant le terme d'ordre 1. On arrive donc à une onde en :

$$\frac{A}{z} e^{-\frac{ikr^2}{2z}} e^{ik(ct-z)}$$

où $r^2 = x^2 + y^2$.

On peut introduire, à un facteur 2 près, la courbure $\gamma(z) = \frac{1}{z}$ et noter

$$A \gamma(z) e^{-\frac{1}{2} i k r^2 \gamma(z)} e^{i k (c t - z)}$$

Cherchons maintenant à quelle condition une telle expression peut être solution approchée de l'équation de propagation quand $\gamma(z)$ n'est plus $\frac{1}{z}$ mais simplement une fonction lentement variable de z.

Procédons par étapes. Pour une fonction en $f(r, z, t) = a(r, z) e^{i k (ct-z)}$ solution de l'équation de propagation, on a

$$0 = \Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Un calcul de routine aboutit, après simplification par l'exponentielle à :

$$0 = \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial a}{\partial z} - k^2a + \frac{1}{c^2}k^2c^2a = \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial a}{\partial z}$$

Dans l'hypothèse où a(r, z) ainsi que $\frac{da}{dz}$ varient lentement avec z en précisant ainsi les choses : sur une variation de z de l'ordre de la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}, \frac{\partial a}{\partial z}$ n'a pas varié de façon significative, soit quelque chose comme :

$$\left|\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}(z)\right| \gg \left|\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}\left(z+\frac{1}{k}\right) - \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}(z)\right| \approx \frac{1}{k} \left|\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}z^2}(z)\right|$$

ce qui permet de négliger dans la dernière relation obtenue le terme en $\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$ devant celui en $k \frac{\partial a}{\partial z}$ pour aboutir à :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} = 2 \, i \, k \, \frac{\partial a}{\partial z}$$

Maintenant que l'on y voit plus clair et seulement maintenant, explicitons la fonction a(r, z) en $A \gamma(z) e^{-\frac{1}{2}i k r^2 \gamma(z)}$. On a d'une part (on passe les calculs de routine) :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} = A \gamma(z)^2 \left(-2 i k - k^2 r^2 \gamma(z)\right) e^{-\frac{1}{2} i k r^2 \gamma(z)}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} = -2 \, i \, k \, A \, \gamma(z)^2 \, \left(1 - \frac{1}{2} \, i \, k \, r^2 \, \gamma(z)\right) \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \, i \, k \, r^2 \, \gamma(z)}$$

qu'on aurait pu aussi obtenir par $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}$ en remplaçant r^2 par $x^2 + y^2$. On a d'autre part (on passe les calculs de routine) :

$$\frac{\partial a}{\partial z} = A\left(\gamma'(z) - \frac{1}{2}i\,k\,r^2\,\gamma'(z)\,\gamma(z)\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}i\,k\,r^2\,\gamma(z)}$$
$$\frac{\partial a}{\partial z} = A\,\gamma'(z)\,\left(1 - \frac{1}{2}i\,k\,r^2\,\gamma(z)\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}i\,k\,r^2\,\gamma(z)}$$

En reportant les deux résultats partiels dans $\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} = 2 i k \frac{\partial a}{\partial z}$, après simplification par A, 2 i k et par l'exponentielle on arrive à :

$$-\gamma(z)^2 \,\left(1 - \frac{1}{2}\,i\,k\,r^2\,\gamma(z)\right) = \gamma'(z)\,\left(1 - \frac{1}{2}\,i\,k\,r^2\,\gamma(z)\right)$$

et la simplification miraculeuse qui apparaît est due au fait que nous sommes partis d'une solution approchée connue. On arrive donc à $-\gamma^2 = \frac{d\gamma}{dz}$, soit après séparation des variables $-\frac{d\gamma}{\gamma^2} = dz$; on retrouve après intégration la solution connue $\gamma(z) = \frac{1}{z}$ mais aussi $\gamma(z) = \frac{1}{z-z_0}$ qui semble n'être qu'un simple changement d'origine. Mais vous pensez bien que je n'ai pas exposé tous ces calculs sans arrière-pensée. Puisque nous sommes en notation complexe, il y a aussi des solutions en $\gamma(z) = \frac{1}{z+iz_0} = \frac{z-iz_0}{z^2+z_0^2}$ que nous allons interpréter, pour simplifier dans le cas où z est assez grand devant le paramètre z_0 pour avoir $\gamma(z) \approx \frac{z-iz_0}{z^2}$ (par contre au numérateur on laisse les deux termes car z va se retrouver seul dans une fonction périodique, cf supra). En reportant dans l'expression de l'onde, on arrive à :

$$f(r, z, t) = A \frac{z - i z_0}{z^2} e^{-\frac{1}{2} i k r^2 \frac{z - i z_0}{z^2}} e^{i k (c t - z)}$$

Dans l'amplitude $\gamma(z) = \frac{1}{z+iz_0}$, en revenant à la forme initiale, a pour module $\frac{1}{z^2+z_0^2} \approx \frac{1}{z}$ et pour argument $-\varphi(z) = -\arctan \frac{z_0}{z}$; on l'écrira $\frac{1}{z} e^{-i\varphi}$. En développant l'exponentielle, on arrive donc à :

$$f(r, z, t) = \frac{A}{z} e^{-\frac{k r^2 z_0}{2 z^2}} e^{-i \frac{k r^2}{2 z}} e^{i [k (c t - z) - \varphi(z)]}$$

On retrouve, au déphasage φ près, une onde sphérique, dans l'approximation qui nous a servi de point de départ, modulée radialement par la fonction gaussienne $e^{-\frac{k r^2 z_0}{2 z^2}}$ de largeur caractéristique $\sigma(z)$, dans sa définition standard d'une gaussienne en $e^{-\frac{r^2}{2 \sigma^2}}$ vérifiant $\sigma(z) = \frac{z}{\sqrt{k z_0}}$. Le fait que $\sigma(z)$ soit proportionnel à z montre que l'essentiel de l'énergie se trouve confinée dans un cône de demi-angle au sommet de tangente liée à $\frac{1}{\sqrt{k z_0}}$. Cette solution est connue tantôt sous le nom d'*onde sphérico-gaussienne*, tantôt sous celui de faisceau gaussien; on en trouve souvent l'expression mais rarement les justifications¹⁵. C'est une bonne modélisation classique du faisceau d'un laser mais aussi une modélisation médiocre mais acceptable du faisceau émergent d'une lentillle.

Dans ce dernier cas, en dehors d'une longueur d'une dizaine de fois z_0 entre environ $-5 z_0$ et environ $+5 z_0$, le facteur $\gamma(z) = \frac{1}{z+i z_0}$ reste pratiquement égal à $\frac{1}{z}$, négatif pour z < 0 et positif pour z > 0 et $\varphi(z)$ négligeable, ce qui traduit donc un changement de signe au passage d'une onde convergente en un foyer au delà duquel elle diverge. On verra dans le chapitre D-XI sur les interférences que la célèbre expérience de MESLIN met en évidence ce phénomène.

Remarque : la condition $\left|\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right| \ll k \left|\frac{\partial a}{\partial z}\right|$ va surtout se traduire par $\left|\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2}\right| \ll k \left|\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right|$ soit tout calculs faits par $\sqrt{z^2 + z_0^2} \gg \lambda$ si l'on veut que ce soit vrai même au passage par le « foyer », il suffit que z_0 soit grand devant λ .

• Harmoniques sphériques.

Dans un problème de vibration d'une goutte d'eau en apesanteur ou de l'analyse des vibrations de la surface du soleil (mission CoRoT du CNES), l'on doit résoudre l'équation de propagation en coordonnées sphériques (avec les notations standards) en recherchant toutes les solutions factorisées possibles.

C'est un problème un peu lourd mathématiquement et on le retrouve en mécanique quantique (orbitales atomiques) où se dote d'outils performants. Contentons-nous ici de donner les pistes d'une approche possible.

L'équation est :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Cherchons f sous forme semi-factorisée soit $f(r, \theta, \varphi, t) = P(r) g(\theta, \varphi) F(t)$; en reportant dans l'équation de propagation puis en divisant par f = P q F on arrive à :

$$\frac{1}{c^2 F} \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{P} \left(\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \right) + \frac{1}{r^2 g} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial g}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} \right)$$

Ce qui suppose (cf supra) que

- $-\frac{1}{c^2 F} \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2}$ soit une constante, ce qui, si l'on veut des solutions non divergentes et non évanescentes, conduit à des solutions sinusoïdales de pulsation ω , pour lesquelles la constante est $-\frac{\omega^2}{c^2}$
- $-\frac{1}{g}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\right) \text{ soit une constante notée provisoirement } -K$ la fonction P(r) est donc solution de $\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \frac{K}{r^2}P = -\frac{\omega^2}{c^2}P$

^{15.} Comprenez bien sûr que mon cours est irremplaçable!

Après le changement de variable (cf supra) en $\rho = \frac{\omega r}{c}$, si l'on recherche pour $P(\rho)$ des fonctions sous forme de séries entières en $\sum a_n \rho^n$ (on ne refait pas les calculs, car ils sont de même nature que ceux effectués plus haut pour une membrane circulaire), on trouve que a_0 et a_1 sont nuls et qu'il y a une relation de récurrence entre termes de même parité :

$$[n(n-1) - K] a_n = -\frac{\omega^2}{c^2} a_{n-2}$$

et si l'on veut que les a_n ne soit pas tous nuls, il faut et il suffit (cf supra) que l'un des coefficients de a_n soit nul donc qu'il existe un entier n tel que K = n(n-1); l'usage est de décaler d'un cran et de noter K = l(l+1) et de noter P_l le polynôme obtenu (à une contante multiplicative près, cf supra).

On doit désormais résoudre :

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial g}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = l \left(l+1 \right) g$$

où l'on chercher une fonction factorisée en $g(\theta, \varphi) = y(\theta) G(\varphi)$ où (cf membrane circulaire) G et forcement sinusoïdal en $\cos(m \varphi)$ avec m entier positif ou nul; on arrive ainsi à :

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \right) - \frac{m^2 y}{\sin^2\theta} = l \left(l+1 \right) y$$

Le changement de variable $X = \cos \theta$ conduisant à poser $y(\theta) = Y_{l,m}(\cos \theta)$ d'où l'on tire $\frac{dy}{d\theta} = -Y'_{l,m}(\cos \theta) \sin \theta$ (etc.) en abusant de $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ conduit à :

$$(1 - X^2) Y''(X) - 2XY'(X) - \frac{m^2 Y(X)}{1 - X^2} = l(l+1)Y(X)$$

forme adaptée à une recherche de solutions polynomiales, ou en séries entières; c'est en fait un peu moins simple mais aisé pour un mathématicien. Nous arrêtons ici, car des méthodes plus efficaces seront exposées en mécanique quantique (chapitre B-XIX). Sachons¹⁶ seulement que les solutions n'existent que pour m compris entre -l et +l.

L'idée c'est que l'on arrive à des solutions en $P_l\left(\frac{\omega r}{c}\right) Y_{l,m}(\cos \theta) \cos(m \varphi) \cos(\omega t)$ où les P_l et les $Y_{l,m}$ sont des fonctions connues appelées harmoniques sphériques et les éventuelles conditions aux limites fixent les valeurs de ω possibles.

• Cas général.

On a recherché jusqu'ici des solutions à l'équation de propagation qui aient une grande symétrie. Une autre approche consiste à établir quelques propriétés intéressantes de la solution la plus générale. Cette étude sera menée dans le chapitre D-VI d'optique qui en

^{16.} ce qui avec le l(l+1) ressemble furieusement aux règles de quantification des orbitales hydrogénoïdes.

déduira les lois à partir des équations de MAXWELL. On se contentera ici d'un peu de vocabulaire.

La transformation de FOURIER permet de considérer tout phénomène dépendant du temps comme somme de fonctions sinusoïdales. La fonction sinusoïdale de pulsation ω la plus générale peut s'écrire :

$$f(M,t) = a(M) \sin[\omega t - \varphi(M)]$$

Pour une telle onde, on appellera surface d'onde les surfaces d'équation $\varphi(M) = Cte$, c'est-à-dire les surfaces équiphases et l'on appellera rayons les courbes orthogonales en tout point aux surfaces d'onde donc tangentes en tout point au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$. Nous n'irons pas plus loin dans ce chapitre.

8 Ondes unidirectionnelles dans un milieu discret.

8.a Ondes progressives dans un cristal monoatomique.

Considérons une chaîne d'atomes identiques modélisés par des masses ponctuelles m, alignés sur un axe Ox et séparés par des ressorts identiques de raideur k et de longueur à vide a qui modélisent classiquement les forces de liaison au voisinage de l'équilibre. Chaque atome, indicé par n, donc d'abscisse au repos x = n a, se déplace parallèlement à Ox de $\xi_n(t)$. Tout ceci est résumé par la figure 11 p. 52.



FIGURE 11 – Chaîne de ressorts.

Un bilan de forces sur la masse d'indice n et l'étude des allongements des deux ressorts qui l'encadrent conduit aisément à :

$$m \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = k \left[(\xi_{n+1} - \xi_n) - (\xi_n - \xi_{n-1}) \right]$$

La recherche de solutions sinusoïdales en $\xi_n(t) = a_n \exp(i \omega t)$ (en notation complexe et avec donc a_n complexe) et en posant classiquement $k = m \omega_0^2$ conduit à :

$$-\omega^2 a_n = \omega_0^2 \left[(a_{n+1} - a_n) - (a_n - a_{n-1}) \right]$$

Ce type de récurrence conduit à des solutions en série géométrique et, puisque l'on se doute de l'existence d'onde, de raison complexe. On cherche donc a_n sous la forme $a_n = a_0 [\exp(-i\varphi)]^n = a_0 \exp(-in\varphi)$. En reportant dans la relation précédente et après division par $a_n = a_0 \exp(-in\varphi)$ et changement de signe général, on arrive à :

$$\omega^{2} = \omega_{0}^{2} \left[2 - \exp(-i\varphi) - \exp(i\varphi) \right] = 2 \omega_{0}^{2} \left(1 - \cos\varphi \right)$$

Première constatation, puisque $\cos \varphi$ est compris entre -1 et 1, ce type de solution n'existe que si $\omega < 2 \omega_0$, cette limite prenant le nom de *pulsation de coupure*. Au delà on trouverait des solutions en $a_n = a_0 r^n$ avec r réel où r a deux valeurs possibles l'une de valeur absolue plus grande que l'unité, acceptable dans un milieu semi-infini côté négatif et l'une de valeur absolue plus petite que l'unité, acceptable dans un milieu semi-infini côté positif, correspondant toutes deux à des phénomènes amortis.

En revenant au cas $\omega < 2 \omega_0$, pour une valeur de ω , on a une valeur de $\cos \varphi$, donc deux déphasages possibles opposés, correspondant aux deux sens de propagation.

En ne reportant pas l'expression de φ en fonction de ω , l'on a donc des solutions en :

$$\xi_n(t) = a_0 \exp i \left(\omega t - n \varphi\right)$$

ce qui est formellement identique à $f(x,t) = a_0 \exp i (\omega t - kx)$ où n joue le rôle de x(paramètre de position) et φ celui de k. On peut accentuer la ressemblance en introduisant la position au repos de l'atome de rang n soit x = na; alors $n\varphi$ devient $\frac{x}{a}\varphi = kx$ en posant $k = \frac{\varphi}{a}$. On peut donc dans ces conditions écrire aussi :

$$\xi(x,t) = a_0 \exp i \left(\omega t - k x\right)$$

à condition de ne pas perdre de vue que x ne peut prendre que les valeurs discrètes na.

Une conséquence de cette présentation est celle-ci : remplacer φ par $\varphi + 2p\pi$ (avec p entier) ne change pas la solution donc remplacer k par $k + \frac{2p\pi}{a}$ non plus; on doit donc considérer que les k tels que $|k| < \frac{\pi}{a}$ suffisent pour décrire toutes les ondes possibles et tels que $0 < k < \frac{\pi}{a}$ toutes les ondes directes possibles. Cet intervalle restreint de valeurs significative de k s'appelle zone de BRILLOUIN.

8.b Passage au continu.

Si, à t donné, ξ_n varie lentement avec x sur une longueur caractéristique L_c , les points sur un graphe sont si serrés qu'on a l'illusion d'une courbe continue : on « voit » une fonction $\tilde{\xi}(x,t)$ telle que $\tilde{\xi}(n\,a,t) = \xi_n(t)$ (voir figure 12 p. 54 où l'on suppose vérifiée la condition $a \ll L_c$). C'est l'approximation des milieux continus. Désormais, on cesse d'écrire le tilde.

L'équation précédente devient :

$$m \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = k \left[\xi(x+a,t) + \xi(x-a,t) - 2 \xi(x,t) \right]$$



FIGURE 12 – Chaîne de ressorts.

Un développement de TAYLOR à l'ordre 2 conduit alors à :

$$m \,\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = k \,a^2 \,\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x^2}$$

On retrouve l'équation de d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{k a^2}{m}} = a \,\omega_0$$

La condition de validité est, en prenant la longueur d'onde comme longueur caractéristique :

$$a \ll \lambda = c \, \frac{2 \, \pi}{\omega} = 2 \, \pi \, a \, \frac{\omega_0}{\omega}$$

se ramène, en faisant fi du facteur π à ce que la pulsation ω soit petite devant la pulsation de coupure $2 \omega_0$.

Aux basses fréquences, l'aspect discret disparaît au profit d'une approche continue qui nous ramène dans le cadre traditionnel de l'équation de propagation.

Nous allons toutefois explorer ci-dessous quelques aspects particuliers des ondes dans les milieux discrets.

8.c Etude énergétique.

Les termes énergétiques sont quadratiques et exigent un retour aux notations réelles. Soit donc une onde progressive en :

$$\xi_n(t) = a_0 \cos(\omega t - n \varphi)$$

où ω et φ sont liés (cf supra) par $\omega^2 = 2 \omega_0^2 (1 - \cos \varphi)$.

Pour ω donné, l'on peut toujours trouver un entier N tel que $\frac{N\varphi}{2\pi}$ soit un entier avec un écart aussi petit que l'on veut ¹⁷.

^{17.} Pour ceux qui n'ont pas rompu tous les ponts avec les mathématiques, voir la théorie des fractions continuées.

Pour une suite de N atomes de n = 0 à n = N - 1, l'énergie cinétique totale est alors :

$$E_{c} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} m \frac{\mathrm{d}\xi_{n}}{\mathrm{d}t}^{2} = \frac{1}{2} m a_{0}^{2} \omega^{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sin^{2}(\omega t - n \varphi) = \frac{1}{4} m a_{0}^{2} \omega^{2} \sum_{n=0}^{N-1} [1 - \cos(2\omega t - 2n\varphi)]$$

Où la somme des $\sin(2\omega t - 2n\varphi)$ est nulle, c'est comme d'habitude, lié au fait que la somme de racines complexes N-ièmes de l'unité est nulle; d'où :

$$E_c = \frac{1}{4} N m \ a_0^2 \,\omega^2$$

L'énergie potentielle du ressort entre les atomes de rang n et n + 1 est :

$$e_{Pn} = \frac{1}{2} k \left[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\right]^2 = \frac{1}{2} k a_0^2 \left[\cos(\omega t - n\varphi - \varphi) - \cos(\omega t - n\varphi)\right]^2 = \cdots$$
$$\cdots = 2 k a_0^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin^2\left[\omega t - (n + \frac{1}{2})\varphi\right] = k a_0^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[1 - \cos\left(2\omega t - (2n + 1)\varphi\right)\right]$$

qui donne par sommation sur N ressorts consécutifs entre les atomes de rang n = 0 et n = N et avec un décalage près la même somme de cosinus nulle pour la même raison :

$$E_P = N k \ a_0^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Il ne faut pas oublier de remarquer que

$$\omega^2 = 2\,\omega_0^2\,(1 - \cos\varphi) = 4\,\frac{k}{m}\,\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

entraı̂ne que $E_c = E_p$; c'est suffisamment classique pour que l'on fasse cet effort de mémoire.

Il serait intéressant de poursuivre sur la notion de phonon, malheureusement elle repose sur une quantification de l'énergie donc ressortit de la mécanique quantique. Toute tentative hors de ce cadre serait malhonnêtement artificielle.

8.d Ondes progressives dans un cristal biatomique.

Reprenons le problème de la chaîne d'atomes mais en supposant cette fois que les atomes de rang impair ont une masse m_1 et les atomes de rang pair une masse m_2 avec $m_2 > m_1$; on modélise ainsi un cristal biatomique unidirectionnel. En posant $\omega_1^2 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ et $\omega_2^2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ (on a donc $\omega_1^2 > \omega_2^2$) les équations du mouvement sont alors (on ne reprend pas la démonstration identique à la précédente) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = \omega_1^2 \left(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2 \, \xi_n \right) & \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = \omega_2^2 \left(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2 \, \xi_n \right) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Si l'on cherche des solutions en $a \exp(\omega t - n \varphi)$ pour *n* impair et en $b \exp(\omega t - n \varphi)$ pour *n* pair, ces équations conduisent à :

$$\begin{cases} 0 = (\omega^2 - 2\,\omega_1^2)\,a + 2\,\omega_1^2\,b\,\cos\varphi & \text{si }n\text{ impair}\\ 0 = 2\,\omega_2^2\,a\,\cos\varphi + (\omega^2 - 2\,\omega_2^2)\,b & \text{si }n\text{ pair} \end{cases}$$

Si on lit ce système comme deux équations linéaires homogènes (« sans second membre ») à deux inconnues ; il y a la solution évidente a = b = 0 sans intérêt ; on en veut d'autres, le système ne doit pas avoir une solution unique et son déterminant est donc nul. On en déduit la relation entre ω et φ , plus complexe, évidemment, que dans le cas monoatomique :

$$(\omega^2 - 2\omega_1^2) (\omega^2 - 2\omega_2^2) - 4\omega_1^2 \omega_2^2 \cos^2 \varphi = 0$$

$$\omega^4 - 2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega^2 + 4\omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 \varphi = 0$$

de discriminant réduit $\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4 \omega_1^2 \omega_2^2 \sin^2 \varphi$ et dont les racines en ω^2 sont $\omega_+^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{\Delta}$ et $\omega_-^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{\Delta}$

Pour l'une ou l'autre de ces solutions, il y a une infinité de solutions mais pour les quelles le rapport $\frac{b}{a}$ est constant et lié à ω par l'une ou l'autre de ces expressions équivalent es dès que le déterminant est nul :

$$\frac{b}{a} = \frac{2\,\omega_1^2 - \omega^2}{2\,\omega_1^2\,\cos\varphi} = \frac{2\,\omega_2^2\,\cos\varphi}{2\,\omega_2^2 - \omega^2}$$

 $2\,\varphi,$ déphasage entre deux atomes de même parité successifs, est défini, sans changement, à $2\,p\,\pi$ près, on peut donc se limiter (cf supra) à $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ pour les ondes directes. Pour φ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le discriminant réduit Δ varie de $(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2$ à $(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2$, la solution ω_+^2 de $2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2)$ à $2\,\omega_1^2$ et la solution ω_-^2 de 0 à $2\,\omega_2^2$.

Deux types d'ondes peuvent donc se propager, des ondes à basse pulsation, il s'agit de la bande acoustique et des ondes à haute pulsation, il s'agit de la bande optique; ces noms provenant de la façon possible d'exciter ces ondes. Entre les deux, puisque $\omega_1^2 > \omega_2^2$ (cf supra), il existe une bande de pulsations interdites et le sommet de la bande optique est là encore une pulsation de coupure.

Les comportements limites pour le rapport $\frac{b}{a}$ sont à $\varphi = 0$, $\frac{b}{a} = -\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = -\frac{m_1}{m_2}$ pour ω_+ et $\frac{b}{a} = 1$ pour ω_- et à $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (il faut choisir la bonne expression parmi les deux), $\frac{b}{a} = 0$ soit b = 0 pour ω_+ et $\frac{b}{a} = \infty$ soit a = 0 pour ω_-

Le tracé des courbes donnant les valeurs de ω_+ et ω_- et les valeurs associées du rapport <u>b</u> en fonction de φ s'obtient aisément avec des logiciels adaptés mais ce qui m'importe ici, c'est la méthode et non le résultat.

8.e Ligne à retard.

Considérons la « ligne » à retard formée d'une succession de « cellules » identiques à celle de la figure 13 p. 57 où L est l'inductance d'une bobine et C la capacité d'un

condensateur; la tension et l'intensité à l'entrée de la cellule de rang n sont notées $U_{n-1}(t)$ et $I_{n-1}(t)$ et à sa sortie $U_n(t)$ et $I_n(t)$.



FIGURE 13 – Ligne à retard.

Ecrivons la relation entre différence de potentiel et intensité puis la loi des nœuds à l'extrémité du condensateur; nous arrivons au système :

$$\begin{cases} U_{n-1}(t) - U_n(t) = L \frac{\mathrm{d}I_{n-1}}{\mathrm{d}t} \\ I_{n-1}(t) - I_n(t) = \frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}t} = C \frac{\mathrm{d}U_n}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

qui est la forme discrète pour des relations de couplage entre deux grandeurs.

On découple les équations en dérivant la seconde par rapport au temps, en la multipliant par L et en exploitant la première, soit :

$$LC \frac{\mathrm{d}^2 U_n}{\mathrm{d}t^2} = L \frac{\mathrm{d}I_{n-1}}{\mathrm{d}t} - L \frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}t} = [U_{n-1}(t) - U_n(t)] - [U_n(t) - U_{n+1}(t)]$$

où l'on retrouve le même type d'équation que pour la chaîne de ressorts avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

A partir de là, on peut évidemment refaire le même type de calculs, passage au continu compris, avec les mêmes conclusions. La seule chose intéressante qui reste à faire est démontrer que, même dans le cas discret, la notion d'impédance reste pertinente. Soit donc une solution progressive en :

$$\begin{cases} U_n(t) = U_0 \exp i \left(\omega t - n \varphi\right) \\ I_n(t) = I_0 \exp i \left(\omega t - n \varphi\right) \end{cases}$$

où l'on retrouver
a $\omega^2=2\,\omega_0^2\,(1-\cos\varphi)$ soit ici $L\,C\,\omega^2=2\,(1-\cos\varphi).$

En reportant ces expressions dans l'une ou l'autre des deux équations de couplage, disons la seconde, on trouve par exemple et après simplification par l'exponentielle :

$$i C \omega U_0 = I_0 \left[\exp(i\varphi) - 1 \right]$$
$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{i \left[1 - \exp(i\varphi) \right]}{C \omega}$$

L'autre relation aurait conduit à :

$$Z = \frac{-i \, L \, \omega}{\left[\exp(-i\varphi) - 1\right]}$$

Les deux expressions, bien que formellement différentes sont bien sûr identiques grâce à la relation entre ω et $\varphi.$

La remarque importante est ici que l'impédance est complexe donc indique un déphasage entre les fonctions couplées et fonction de la pulsation, ce qui rendra impossible la réalisation d'un dispositif anti-reflet (cf paragraphe 6.d p. 33) valable pour toutes les pulsations.