

Chapitre D-V

Lois de l'optique géométrique.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

Dans ce chapitre, les lois de l'optique sont déduites du principe de Fermat sans aucune référence à l'aspect ondulatoire de la lumière. Les premières conséquences en sont la propagation rectiligne dans un milieu homogène et les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction. On mentionne le phénomène de dispersion comme un fait expérimental.

On approfondit en citant deux applications du phénomène de réflexion totale (réfractomètre et fibre optique à saut d'indice) et deux situations de dispersion de la lumière (prisme, arc-en-ciel). On décrit l'expérience de réflexion totale frustrée qui met en évidence l'onde évanescente.

Les conditions de formation des images est formalisée par le concept de stigmatisme rigoureux et l'on recherche systématiquement les situations où il est possible. On prolonge cette étude par la notion d'aplanétisme.

On termine en étudiant modestement des situations de propagation dans un milieu inhomogène (mirage, fibre optique à gradient d'indice, réfraction atmosphérique).

Table des matières

D-V Lois de l'optique géométrique.	1
1 Axiomatique de l'optique physique.	5
1.a Rayon lumineux, indice de réfraction, chemin optique.	5
1.b Principe de Fermat.	5
1.c Propagation rectiligne.	6
1.d Différentielle d'un chemin optique. Lois de Snell-Descartes.	6
1.e Dispersion.	10
2 Quelques conséquences directes.	10
2.a Réflexion totale, réfractométrie, fibre optique à saut d'indice, réflexion totale frustrée.	10
2.b Spectres lumineux, le prisme, l'arc-en-ciel.	14
3 Formation des images.	20
3.a Image d'un point. Stigmatisme rigoureux.	20
3.b Objets, images, rayons réels ou virtuels.	21
3.c Exemples simples de stigmatisme rigoureux.	22
3.d Propriété fondamentale du stigmatisme rigoureux.	22
3.e Stigmatisme rigoureux par réflexion.	23
3.f Stigmatisme rigoureux par réfraction. Points de Weierstrass.	23
3.g Conclusion pratique.	26
3.h Notion d'aplanétisme.	26
4 Propagation dans des milieux inhomogènes par couches.	29
4.a Modèle en couches planes. Mirages.	29
4.b Modèle en couches cylindriques. Fibre optique à gradient d'optique.	31

4.c	Modèle en couches sphériques. Réfraction atmosphérique.	32
-----	---	----

1 Axiomatique de l'optique physique.

Les lois de l'optique géométrique ont été établies bien avant que ne fût comprise la nature électromagnétique de la lumière, avant même que l'on eût tranché sur sa vraie nature, ondulatoire ou corpusculaire et, du reste, quand on a cru découverte cette nature, la mécanique quantique l'a vite remise en question. Il est tentant dans ce cours de montrer comment fut construite une axiomatique provisoire dont furent déduits tous les résultats utiles de l'optique géométrique avant qu'ils pussent l'être des lois de l'électromagnétisme, comme ils le seront dans le chapitre D-VI.

1.a Rayon lumineux, indice de réfraction, chemin optique.

L'émission de lumière par une *source lumineuse* est l'émission d'entités, dont l'essence importe peu, qui suivent des trajets précis appelés *rayons lumineux*.

On peut visualiser ces rayons en occultant le *faisceau* émis par la source par un écran opaque percé de petits trous¹ par lesquels sortent des rayons (ou presque à cause de leur épaisseur non nulle) que l'on peut visualiser dans une atmosphère enfumée².

Pour rendre compte du comportement de la lumière lors de la traversée d'une surface appelée *dioptre* qui sépare deux milieux de nature différentes, on affecte à tout milieu homogène un scalaire réel supérieur à l'unité appelé *indice de réfraction*, noté traditionnellement n , dépendant éventuellement de paramètres physiques comme la température et la pression.

Dans un milieu homogène, on appelle *chemin optique* entre deux points A et B d'un même rayon le produit de la longueur de l'arc AB de la courbe qu'est le rayon par l'indice de réfraction du milieu où il se propage. On le note L_{AB} ou $[AB]$ et l'on a donc $L_{AB} = n \widehat{AB}$ où $\widehat{AB}$ est la longueur de l'arc AB .

Si un rayon traverse un ou plusieurs dioptries, le chemin optique s'obtient par sommation des chemins partiels dans chacun des milieux. Par exemple, si un rayon entre A et B effectue une partie AI dans un milieu d'indice n_1 et une partie IB dans un milieu d'indice n_2 , le chemin optique entre A et B sera $L_{AB} = n_1 \widehat{AI} + n_2 \widehat{IB}$.

1.b Principe de Fermat.

Soit un rayon passant par les points A et B ; si l'on compare le chemin optique entre A et B le long de ce rayon à tous les chemins optiques entre ces mêmes points le long de tous les autres chemins possibles autour du rayon tout en restant infiniment proches, chemins que n'a pas pris la lumière, le *principe de FERMAT* affirme que le chemin effectivement suivi

1. De nos jours, un faisceau laser est une bonne approximation de rayon.

2. Fumer nuit gravement à la santé, la vôtre et celle de votre entourage.

par la lumière entre A et B est extrémal par rapport aux chemins infiniment proches entre ces mêmes points.

Remarque 1 : on a initialement cru que le chemin optique était minimal ; on verra plus loin un contre-exemple non artificiel où il est maximal.

Remarque 2 : le principe de FERMAT est un principe d'optimisation, à savoir que la lumière suit le chemin optimal. Cela fleure bon la téléonomie, c'est-à-dire que les lois de la nature poursuivraient un but et ce n'est guère raisonnable en physique de doter la nature d'une volonté.

Remarque 3 : si dans un certain contexte expérimental, un rayon va de A à B et vérifie le principe de FERMAT, dans un autre contexte le chemin optique allant à rebrousse-poil de B à A le vérifiera aussi et sera donc *le* rayon allant de B à A . C'est le principe du *retour inverse de la lumière* que l'on peut formuler de façon parlante en « tu me vois, je te vois » (ou plutôt « tu vois mes yeux, je vois tes yeux »).

1.c Propagation rectiligne.

Dans un milieu homogène, le chemin optique est proportionnel à la longueur et si celui-là est optimal celle-ci aussi. Or, puisque nous vivons dans un espace euclidien, le chemin (géométrique) le plus court pour aller d'un point à un autre est la ligne droite. La conclusion est simple : dans un milieu homogène la lumière se propage en ligne droite et l'on parle de *propagation rectiligne*.

1.d Différentielle d'un chemin optique. Lois de Snell-Descartes.

La suite est logique : que se passe-t-il lorsque l'on passe d'un milieu homogène à un autre ? Il faut d'abord se doter d'un outil.

• Différentielle d'un chemin optique.

On travaille désormais, propagation rectiligne oblige, avec des segments de droite. Soit, dans un milieu d'indice n , un segment AB et un segment infiniment proche $A'B'$ avec A' infiniment proche de A et B' de B . On peut écrire :

$$\begin{aligned} L_{A'B'}^2 &= n^2 \|\vec{A'B'}\|^2 = n^2 \|\vec{AB'}\|^2 = n^2 (\vec{AB} + \vec{BB'} - \vec{AA'})^2 = \dots \\ &\dots = n^2 \left[\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'}) + (\vec{BB'} - \vec{AA'})^2 \right] = \dots \\ &\dots = n^2 \left[\|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'}) + (\vec{BB'} - \vec{AA'})^2 \right] = \dots \\ &\dots = n^2 \|\vec{AB}\|^2 \left[1 + 2 \frac{\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})}{\|\vec{AB}\|^2} + \frac{(\vec{BB'} - \vec{AA'})^2}{\|\vec{AB}\|^2} \right] \end{aligned}$$

d'où, en en prenant la racine et en effectuant un développement limité à l'ordre 1 :

$$L_{A'B'} = n \|\vec{AB}\| \left[1 + 2 \frac{\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})}{\|\vec{AB}\|^2} + \dots \right]^{\frac{1}{2}} = \dots$$

$$\dots = n \|\vec{AB}\| \left[1 + \frac{\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})}{\|\vec{AB}\|^2} + \dots \right] = n \|\vec{AB}\| + n \frac{\vec{AB} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})}{\|\vec{AB}\|} + \dots$$

Pour obtenir la différentielle, on soustrait $L_{AB} = n \|\vec{AB}\|$ et l'on tronque à l'ordre 1 :

$$dL_{AB} = L_{A'B'} - L_{AB} = n \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} \cdot (\vec{BB'} - \vec{AA'})$$

Nous conviendrons d'appeler $\vec{u}$ le vecteur unitaire du rayon AB soit $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ et conviendrons de noter $\vec{dA}$ et $\vec{dB}$ les déplacements vectoriels élémentaires des points A et B , c'est-à-dire $\vec{dA} = \vec{AA'}$ et $\vec{dB} = \vec{BB'}$; on peut donc affirmer :

$$\boxed{dL_{AB} = n \vec{u} \cdot (\vec{dB} - \vec{dA})}$$

• Lois de la réflexion.

Soit un rayon issu du point A qui se réfléchit en un point I d'une surface Σ réfléchissante et repart vers un point B . Pour appliquer le principe de FERMAT en tenant compte de la propagation rectiligne, imaginons un autre rayon fictif issu du même point A se réfléchissant en I' sur la surface, infiniment proche de I de sorte que l'on puisse confondre la surface avec son plan tangent Π et repassant par le même point B . Tout ceci est résumé par la figure 1 p. 8.

Puisque le chemin optique L_{AIB} est optimal, sa différentielle est nulle. En scindant ce chemin en deux parties, en utilisant la formule précédemment établie, compte tenu que A est commun aux deux rayons et fait office de point A' , d'où $\vec{dA} = \vec{0}$ et de même $\vec{dB} = \vec{0}$, en notant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs unitaires de AI et IB et n l'indice du milieu, on en déduit :

$$0 = dL_{AIB} = dL_{AI} + dL_{IB} = n \vec{u} \cdot (\vec{dI} - \vec{dA}) + n \vec{v} \cdot (\vec{dB} - \vec{dI}) = n (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{dI}$$

Cette relation est vraie quelque soit $\vec{dI}$ appartenant à Π donc $n (\vec{u} - \vec{v})$ et aussi $(\vec{u} - \vec{v})$ sont orthogonaux à ce plan et parallèle à son vecteur normal $\vec{N}$ (non représenté sur la figure). On peut noter $\vec{u} - \vec{v} = \lambda \vec{N}$ où λ est un scalaire qu'il importe peu de connaître.

On en déduit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{N}$ sont coplanaires et donc aussi AI , IB et la normale; le plan contenant AI dit *rayon incident* et la normale, appelé *plan d'incidence* d'une part,

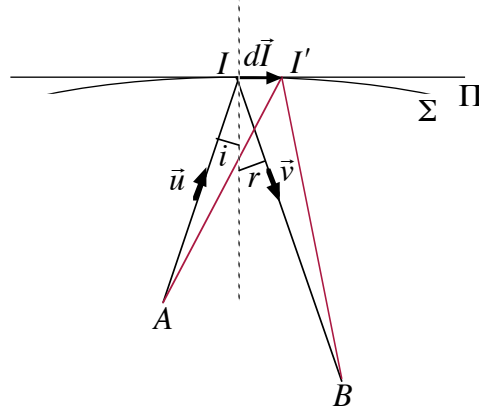


FIGURE 1 – Réflexion.

le plan contenant IB dit *rayon réfléchi* et la normale, appelé *plan de réflexion* d'une part sont donc confondus.

On en déduit ensuite que les projections de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sur Π sont égales, ce qui suppose dans un premier temps qu'elles soient de même sens donc que AI et IB soient de part et d'autre de la normale et dans un second qu'elles aient même module soit, en appelant i l'*angle d'incidence* entre AI et la normale et de même r l'*angle de réflexion* entre IB et la normale, $\sin i = \sin r$ d'où $i = r$.

Résumons les lois de la réflexion, appelés lois de SNELL-DESCARTES pour la réflexion :

- les plans d'incidence et de réflexion sont confondus,
- le rayon incident et le rayon réfléchi sont situés de part et d'autre de la normale à la surface réfléchissante,
- l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.

Remarque : c'est une bonne occasion pour se pencher sur la possibilité offerte par le principe de FERMAT qu'un rayon suive un chemin maximal et non minimal. Cela semble assez bizarre ; nous allons montrer qu'il ne s'agit que d'une question de point de vue et que finalement, ça n'a aucun intérêt. Soit une surface de révolution coupant son axe en A et prenons sur cet axe une origine O ; par symétrie le plan tangent en A est orthogonal à OA et un rayon issu de O se réfléchissant en A et revenant en O est un rayon que suit la lumière. En coordonnées polaires l'équation de la surface est, dans un plan méridien, $OM = r(\theta)$, paire par symétrie. Un rayon infiniment voisin de OAO (de longueur optique $2nr(0)$ avec n indice du milieu) est OMO de longueur optique $2nr(\theta)$. Selon que $r(0)$ est un maximum et un minimum, le chemin optique OAO est maximal ou minimal. Si l'on change d'origine sur l'axe, la conclusion peut être inversée ; on peut conjecturer puis vérifier que selon que O est d'un côté ou de l'autre par rapport au centre de courbure de la surface en A , le principe conduit à un maximum ou un minimum pour finalement le même rayon en laissant les points de départ et d'arrivée à l'appréciation. Tout cela est donc très relatif.

• **Lois de la réfraction.**

Soit un rayon issu du point A qui se *réfracte*, c'est à dire traverse en changeant de direction, en un point I d'un *dioptre* Σ , c'est-à-dire d'une surface de séparation entre deux milieux réfléchissants, et part vers un point B . Ici encore, imaginons un autre rayon fictif issu du même point A de réfractant en I' sur la surface, infiniment proche de I de la surface confondue avec son plan tangent et arrivant au même point B . Tout ceci est résumé par la figure 2 p. 9.

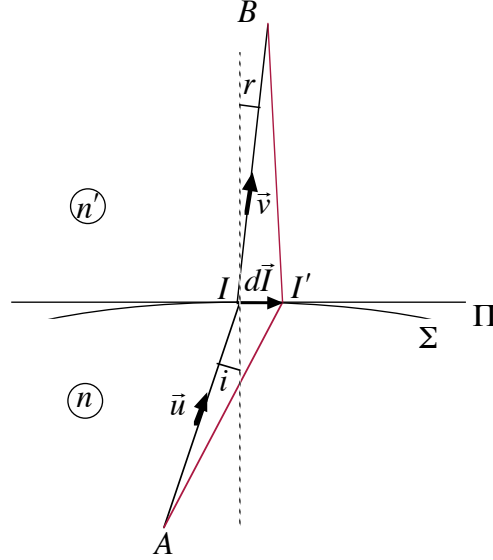


FIGURE 2 – Réfraction.

On reprend le calcul de la différentielle nulle du chemin optique L_{AIB} . On a encore $\vec{dA} = \vec{0}$ et $\vec{dB} = \vec{0}$ et l'on note n l'indice du milieu côté AI et n' côté IB , on en déduit :

$$0 = dL_{AIB} = dL_{AI} + dL_{IB} = n \vec{u} \cdot (\vec{dI} - \vec{dA}) + n' \vec{v} \cdot (\vec{dB} - \vec{dI}) = (n \vec{u} - n' \vec{v}) \cdot \vec{dI}$$

On en déduit comme pour la réflexion que $(n \vec{u} - n' \vec{v})$ est orthogonal au plan tangent et donc que le plan d'incidence et le plan contenant IB dit *rayon réfracté* et la normale, appelé *plan de réfraction*, sont confondus, que les projections de $n \vec{u}$ et $n' \vec{v}$ sur Π sont égales, que AI et IB sont de part et d'autre de la normale et qu'en appelant i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction entre IB et la normale, $n \sin i = n' \sin r$.

Résumons les lois de la réfraction, appelés lois de SNELL-DESCARTES pour la réflexion :

- les plans d'incidence et de réfraction sont confondus,
- le rayon incident et le rayon réfracté sont situés de part et d'autre de la normale au dioptre,
- l'angle de réflexion et l'angle d'incidence vérifient $n \sin i = n' \sin r$

1.e Dispersion.

Les phénomènes observés lorsque la lumière traverse un prisme de verre, ou les gouttes d'eau d'un nuage en donnant un arc-en-ciel prouvent que la lumière solaire est somme de lumières de différentes couleurs et que l'indice de réfraction d'un milieu dépend de la couleur de la lumière. En effet, on observe que les différentes couleurs ne suivent pas le même chemin et forment un *spectre lumineux* et l'on dit qu'il y a *dispersion* de la lumière et que le milieu de propagation (verre ou eau) est *dispersif*.

2 Quelques conséquences directes.

2.a Réflexion totale, réfractométrie, fibre optique à saut d'indice, réflexion totale frustrée.

Lorsqu'un rayon arrive sur un dioptré cela donne naissance à un rayon réfléchi et a priori un rayon réfracté qui suivent tous deux les lois de SNELL-DESCARTES. L'optique géométrique est impuissante à prédire dans quelles proportions l'énergie se répartit entre rayon réfléchi et rayon réfracté et il faudra pour cela considérer la lumière comme une onde électromagnétique (voir chapitre E-VI). Dans le cadre strict de l'optique géométrique, le seul phénomène qui mérite d'être signalé est celui connu sous le nom de *réflexion totale*.

• Le phénomène.

Partons de $n \sin i = n' \sin r$ et considérons des rayons arrivant sur le dioptré avec toutes les incidences i possibles.

Si $n' > n$ (on dit que le second milieu est *plus réfringent* que le premier), quand i varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, alors r varie de 0 à $r_L = \arcsin\left(\frac{n}{n'}\right)$ mais inversement si $n' < n$ (second milieu *moins réfringent* que le premier), r n'existe que pour i variant alors de 0 à $i_L = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right)$ et varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ mais n'existe pas pour i supérieur à l'*angle limite* i_L .

Pour $n' < n$ et $i > i_L$, il n'y a pas de réfracté mais seulement un réfléchi d'où le nom de réflexion totale.

Voyons-en deux applications et signalons un phénomène un peu mystérieux.

• Réfractomètre d'Abbe.

Il s'agit d'un dispositif destiné à mesurer l'indice de réfraction de liquides. Il est constitué de deux prismes fabriqués dans un verre de très fort indice de réfraction N (environ 1,75), montés tête-bêche et entre lesquels on écrase une goutte de produit à tester de sorte que s'en forme une mince couche à faces parallèles, d'épaisseur exagérée pour la lisibilité sur la figure 3 p. 11 (qui n'est qu'un schéma de principe).

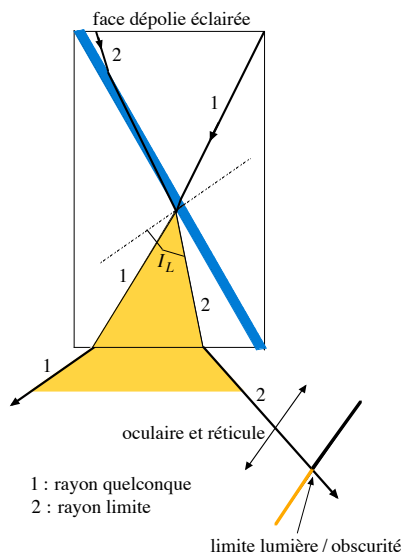


FIGURE 3 – Réfractomètre d'Abbe.

La face supérieure dépolie, est éclairée fortement et envoie vers la lame de liquide des rayons dans toutes les directions. L'appareil ne fonctionne que pour les liquides d'indice n inférieur à celui du verre. Les seuls rayons qui pénètrent dans le liquide le font avec une incidence inférieure à l'angle limité i_L puis ressortent (on applique les lois à l'envers) avec un angle maximum i_L , fonction de $\frac{n}{N}$, avec la normale. Un peu de géométrie (les angles du prisme sont, bien sûr, connus) et les lois de la réfraction verre-air permet de connaître comment le rayon limite arrive et ressort de la face inférieure du dispositif et sa direction est visualisée dans le plan focal d'une lentille convergente où le rayon limite est la frontière entre la zone éclairée et la zone sombre. On n'a dessiné que quelques rayons qui proviennent d'un même point du liquide, ceux qui proviennent d'autres points du liquide donnent le même résultat dans le plan focal.

Reste à faire un peu de technologie : un réticule dans le plan focal de la lentille et un oculaire pour un pointé précis, une articulation qui permet de déplacer angulairement la lentille devant une graduation circulaire avec un vernier et l'on peut mesurer les angles à une minute près, soit $3 \cdot 10^{-4}$ radians ce qui permet aisément de mesurer n à la troisième décimale.

• Fibre optique à saut d'indice.

Une fibre optique est un cylindre de verre de très faible rayon, d'indice de réfraction N , gainée d'une fine couche d'un verre de composition chimique différente et d'indice n avec $n < N$. La figure 4 p. 12 représente ce qui s'y passe dans un plan méridien car les complications apportées par un rayon lumineux qui ne serait pas dans un tel plan rendraient l'étude plus complexe et cela masquerait l'essentiel.

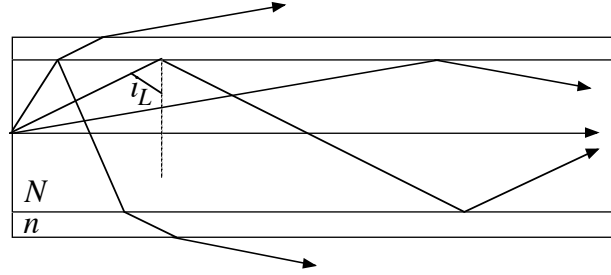


FIGURE 4 – Fibre à saut d'indice.

Traçons quelques rayons qui entrent dans la fibre par l'une de ses extrémités, en un point quelconque (on l'a pris sur l'axe par pure paresse). Pour mémoire celui qui est parallèle à l'axe va tout droit. Un rayon qui fait un angle important avec l'axe rencontre la face latérale avec une faible incidence et seule une proportion $x < 1$ de l'énergie se réfléchit et l'autre sort de la fibre par réfraction ; au bout de p réflexions, il ne reste que la proportion x^p (une décroissance exponentielle donc) de l'énergie initiale et si la fibre est très longue, il ne sort rien à l'autre extrémité.

Si par contre l'angle avec l'axe est faible, l'incidence sur la face latérale est grande et il y a réflexion totale et le rayon se propage sans pertes par des zigs-zags symétriques autour de l'axe ce qui permet un transport sans pertes sur les grandes longueurs. En pratique, si la fibre n'est pas rectiligne, ça ne change pas grand-chose, pourvu que le rayon de courbure reste grand devant le diamètre, et l'on peut ainsi éclairer des endroits peu accessibles (exemple : la fibroscopie médicale).

Si l'on admet, pour les besoins de la cause, que la vitesse de la lumière dans un milieu d'indice N est $v = \frac{c}{N}$ où c est la vitesse dans le vide, on peut aller plus loin et chiffrer la qualité de cette fibre dans la transmission de données binaires (pour internet par exemple). Pour une fibre de longueur L , le chemin le plus court est celui du rayon parallèle à l'axe, de longueur $L_{min} = L$ donc parcouru en un temps $T_{min} = \frac{L_{min}}{v} = \frac{NL}{c}$ et le plus long, celui en zig-zag correspondant à l'angle limite $i_L = \arcsin\left(\frac{n}{N}\right)$, de longueur projetée L , donc de longueur $L_{max} = \frac{L}{\cos(\frac{\pi}{2} - i_L)} = \frac{L}{\sin i_L} = \frac{NL}{n}$ parcouru en un temps $T_{max} = \frac{L_{max}}{v} = \frac{N^2 L}{nc}$.

Un signal très bref émis à $t = 0$ à une extrémité de la fibre arrive à l'autre étalé dans le temps entre T_{min} et T_{max} ; le signal suivant émis à $t = \tau$ arrive entre $\tau + T_{min}$ et $\tau + T_{max}$. On ne peut distinguer les deux signaux à l'arrivée que si le premier a fini d'arriver quand le second commence à le faire soit si $T_{max} < \tau + T_{min}$, ce qui impose la condition :

$$\tau > \tau_{min} = T_{max} - T_{min} = \frac{NL}{c} \left(\frac{N}{n} - 1 \right)$$

Le nombre de signaux maximal que l'on puisse véhiculer par unité de temps, appelé

débit binaire maximal³ est :

$$D_{max} = \frac{1}{\tau_{min}} = \frac{nc}{N(N-n)L}$$

Plus n est proche de N , plus le débit maximal est grand (il est plus aisé de voir que τ_{min} est plus petit). Avec $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $L = 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$ (de l'ordre de grandeur de la distance entre le dernier serveur et l'abonné à la fibre), $N = 1,5$ (typique d'un verre) et $n = 1$ (de l'air), on trouve $D_{max} = 4 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ (50 kilo-octets par seconde, la préhistoire d'internet, c'est-à-dire l'an 2000). Pour améliorer les performances, on gaine la fibre d'un verre d'indice légèrement inférieur, disons $n = 1,49$; le débit maximal est multiplié par pratiquement 75. On a ainsi réalisé une *fibre à saut d'indice*. On verra un peu plus loin que l'on peut encore faire mieux.

- **Onde évanescente. Réflexion totale frustrée.**

Une approche électromagnétique, hors de propos ici, montre que dans le cas de la réflexion totale, il existe tout de même une onde dans le milieu de faible indice. Elle se propage parallèlement au dioptré et son amplitude décroît de façon exponentielle lorsqu'on s'éloigne du dioptré; on l'appelle *onde évanescente*; sa structure ondulatoire et électromagnétique est précisée au chapitre C-XIII.

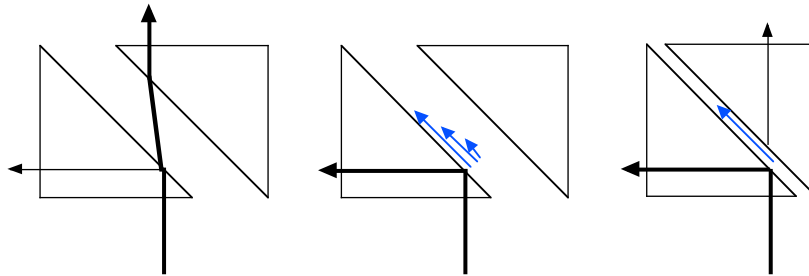


FIGURE 5 – Réflexion totale frustrée.

On peut la mettre en évidence dans un dispositif analogue au réfractomètre d'ABBE en diminuant l'épaisseur du fluide intercalaire suffisamment pour que l'amplitude de l'onde évanescente ne soit pas négligeable au contact du second dioptré d'où sort alors une onde par symétrie de même direction que l'onde de départ. Il s'agit de l'expérience de *réflexion totale frustrée*. Elle est plus facile à réaliser avec des ondes centimétriques (comme celles d'un radar).

La figure 5 p. 13 en illustre le principe : deux prismes à 45° sont installés tête-bêche et l'on envoie un rayon lumineux orthogonalement à une face et l'on étudie ce qui se passe

3. On retrouve cette problématique dans le chapitre E-IV qui traite de la dispersion, dans la partie « physique vibratoire et ondulatoire ».

au niveau de l'hypoténuse. A gauche, l'indice du prisme est faible, le rayon est réfléchi et réfracté, arrive sur l'hypoténuse de l'autre prisme et génère un second réfracté parallèle au rayon initial (lois de SNELL-DESCARTES avec échange des angles et des indices). Au milieu l'indice du prisme est élevé, il y a réflexion totale ; la structure de l'onde évanescente est suggérée par des flèches bleues de plus en plus petites, les prismes sont très écartés, l'hypoténuse du second ne reçoit rien. A droite, les prismes sont très rapprochés, la seconde hypoténuse reçoit quelque chose et génère donc comme à gauche un second réfracté mais de faible amplitude.... et valide ainsi l'hypothèse de l'onde évanescente.

2.b Spectres lumineux, le prisme, l'arc-en-ciel.

Donnons ici deux conséquences classiques de la dispersion. Ces sujets sont traités partout et je n'ai rien d'original à ajouter ; mais je ne peux pas raisonnablement ne pas en parler.

• Le prisme.

La figure 6 p. 15 montre, en projection dans un plan perpendiculaire à ses génératrices, un prisme à base triangulaire, d'angle A (en général 60°) en son sommet O , d'indice n dont la face opposée à O a été noircie pour absorber les rayons qui viendraient s'y égarer. Un faisceau parallèle, dans une direction appartenant au plan de figure, et dont on a tracé un rayon arrive sur une face et ressort par l'autre. Le rayon arrive en I sur la face d'entrée avec un angle d'incidence i et entre dans le verre avec un angle de réfraction r et subit, comme le montre la figure, une première déviation $D_1 = i - r$; il arrive en J sur l'autre face avec un angle d'incidence noté r' et ressort dans l'air avec un angle noté i' et subit une seconde déviation égale à $D_2 = i' - r'$ (voir figure). On s'est donné un sens positif pour les angles (petit cercle orienté par une flèche) et l'on convient de noter les angles du rayon vers la normale en I et de la normale vers le rayon en J , de sorte que sur la figure tous les angles soient positifs.

Les lois de SNELL-DESCARTES en I et J donnent $\sin i = n \sin r$ et $n \sin r' = \sin i'$ car l'indice de l'air est quasiment égal à 1. Les trois angles du triangle OIJ ont une somme égale à π d'où $A + (\frac{\pi}{2} - r) + (\frac{\pi}{2} - r') = \pi$ soit encore $r + r' = A$ et enfin la déviation totale est, compte tenu de la dernière relation, $D = D_1 + D_2 = (i - r) + (i' - r') = i + i' - A$. Résumons, les quatre relations :

$$\boxed{\sin i = n \sin r \quad | \quad r + r' = A \quad | \quad n \sin r' = \sin i' \quad | \quad D = i + i' - A}$$

où A et n sont fixés par le choix du prisme, permettent à partir de la donnée de i et en les prenant dans l'ordre du résumé de tirer successivement r , r' , i' et D . On en tire la déviation en fonction de i :

$$D(i) = i + \arcsin \left\{ n \sin \left[A - \arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right) \right] \right\} - A$$

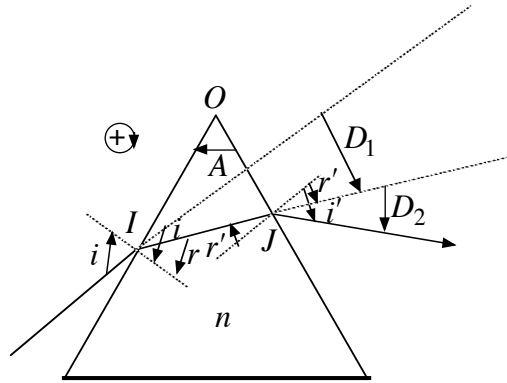


FIGURE 6 – Prisme.

car les logiciels de calcul modernes autorisent les méthodes « de force brutale » ; ils aboutissent du reste au tracé de la figure 7 p. 15 où les axes ont été gradués en radians et où l'axe vertical ne débute pas à 0 pour rendre la courbe plus lisible. On y constate deux choses que nous allons détailler après les avoir signalées :

- en deçà d'une certaine valeur, le logiciel ne trace rien (c'est pour cela que l'on a pas représenté sur le graphe les valeurs négatives de i) parce que le rayon IJ subit en J une réflexion totale et va se faire absorber sur la face inférieure du prisme,
- le graphe met en évidence une déviation minimale.

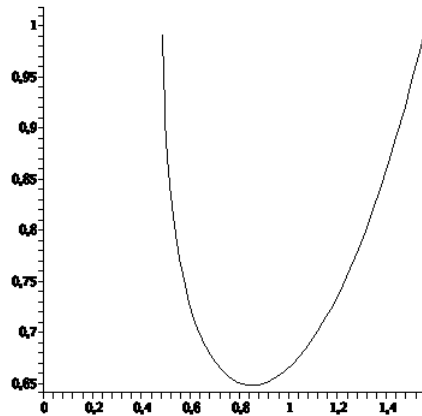


FIGURE 7 – Déviation par un prisme.

◦ Condition d'émergence du rayon.

Pour fixer les idées nous prendrons pour A la valeur courante de 60° et pour n une valeur moyenne pour les verres courants soit $n = 1,5$. Pour que le rayon IJ se réfracte et sorte du prisme, il faut que $|r'|$ soit inférieur à l'angle limite $\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 41,8^\circ$ soit

successivement avec $r = A - r'$ et $\sin i = n \sin r$:

$$-41,8^\circ < r' < 41,8^\circ$$

$$18,2^\circ < r < 101,8^\circ$$

Or r , par définition, ne peut dépasser 90° et par les lois de la réfraction, ne peut dépasser l'angle limite ce qui est encore plus limitant ; on se ramène donc successivement à :

$$18,2^\circ < r < 41,8^\circ$$

$$27,9^\circ < i < 90^\circ$$

Ceci explique les déboires classiques des élèves aux prises pour la première fois avec un prisme ; par une sorte de fatalité, ils commencent par éclairer le prisme de façon presque orthogonale à la face d'entrée ($i \approx 0$) et se désespèrent de ne rien voir sortir du prisme ; le professeur peut alors aller briller au tableau et devenir un demi-dieu.

◦ *Minimum de déviation.*

Pour l'étude du minimum de déviation, plutôt qu'une approche calculatoire, je propose ici une élégante démonstration par symétrie⁴.

Supposons une situation où i a la valeur particulière i_1 , on note r_1 , r_2 , i_2 et D_1 les valeurs de r , r' , i' et D , telles donc que $\sin i_1 = n \sin r_1$, $r_1 + r_2 = A$, $n \sin r_2 = \sin i_2$ et $D_1 = i_1 + i_2 - A$.

Dans la situation où $i = i_2$ (celui de la situation précédente), r est donné par la formule $\sin i = n \sin r$ et s'identifie donc à r_2 , r' est donné par $r' + r = A$ et s'identifie donc à r_1 , i' est donné par $\sin i' = n \sin r'$ et s'identifie donc à i_1 et D est donné par $D = i + i' - A$ et s'identifie donc à D_1 .

Il en résulte que sur la figure 8 p. 17, les deux valeurs de l'angle d'incidence donnant la même déviation peuvent être lues comme les valeurs de i et i' d'une expérience donnant cette déviation. Si l'on fait décroître la déviation vers sa valeur minimale (grosse flèche grasse), les valeurs de i et i' convergent vers une valeur unique (flèches parallèles au graphe) et il en résulte que lorsque D atteint sa valeur minimale D_m , alors $i = i'$ et par conséquent $r = r'$.

Les formules de l'encadré qui gère le trajet d'un rayon d'un prisme deviennent alors :

$$\sin i = n \sin r \quad 2r = A \quad D_m = 2i - A$$

ce qui est une méthode expérimentale de mesure des indices par :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

4. Elle n'est pas de moi et j'ai découverte trop récemment ; mais, comme a dit Jules Renard, « n'importe quelle idée semble personnelle dès qu'on ne se rappelle plus à qui on l'a empruntée ».

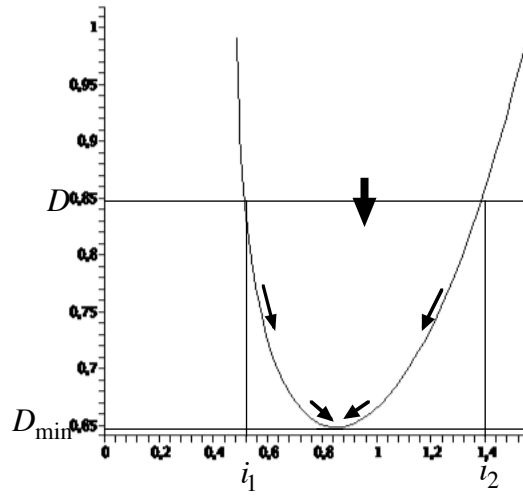


FIGURE 8 – Minimum de déviation.

Pour en revenir à la dispersion de la lumière, la chaîne des calculs prouve que la déviation D ne dépend que de l'angle d'incidence i et de l'indice de réfraction n . Si le premier est constant (lumière solaire arrivant sur un prisme) et si le second dépend de la couleur, alors les différentes couleurs ressortiront du prisme dans des directions différentes⁵. Pour aller plus loin, il faut avoir compris qu'une couleur du spectre⁶ est liée à une longueur d'onde. Et pour que la mesure d'un indice soit une mesure de longueur d'onde, il faut à la fois une approche semi-empirique liant l'un à l'autre (donc une théorie même approximative) et, pour évaluer les constantes qui y apparaissent, un étalonnage avec une source lumineuse dont on connaisse les longueurs d'onde (à l'aide d'une autre théorie, quantique celle-là). Autant dire que le prisme n'est pas un outil de recherche fondamentale puisqu'il suppose connues les théories qu'il pourrait valider. Seuls les réseaux de diffraction⁷ conduisent à une mesure directe et absolue des longueurs d'onde.

• L'arc-en-ciel.

Une situation voisine de celle du prisme préside à la formation d'arcs-en-ciel. Ceux-ci se forment lorsque les rayons solaires arrivent sur des gouttes d'eau, quasiment sphériques, en suspension dans l'air. Tous les plans diamétraux contenant la direction du soleil S sont équivalents et il y a symétrie de révolution autour de cette direction. La figure 9 p. 18 est tracée dans un tel plan.

Un rayon SI arrivé sous l'incidence i se réfléchit avec un angle identique et se réfracte

5. Pas d'images, on en a tous vu.

6. Ne pas confondre avec la perception visuelle des couleurs qui relève de la physiologie et non de la physique.

7. Voir chapitre D-XII sur la diffraction lumineuse.

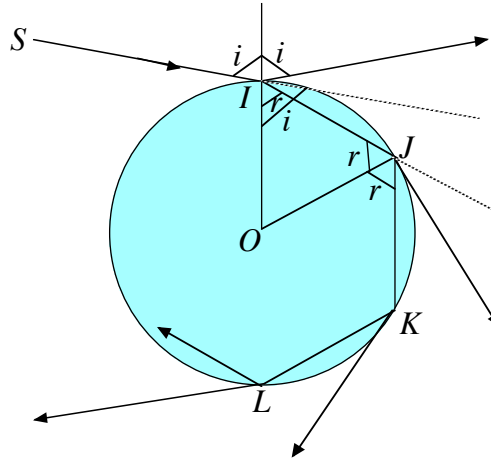


FIGURE 9 – Arc-en-ciel.

avec un angle r au point I ; le réfracté retrouve la surface en un point J avec le même angle r (car le triangle OIJ où O est le centre, est isocèle) et s'y réfléchit et se réfracte vers l'extérieur (on retrouve l'angle i) et le processus se reproduit en K , L , etc. Il ressort donc de la goutte différents rayons de plus en plus faibles qui ont traversé p fois la goutte (0 fois en I , 1 fois en J , 2 fois en K , etc.).

La déviation entre le rayon incident et l'un des émergents est somme de déviations élémentaires à chaque rencontre de la surface. La déviation initiale entre SI et IJ , en raisonnant comme pour le prisme est $i - r$, comptée positivement dans le sens horaire et on retrouve cette valeur entre la dernière traversée et le rayon émergent ; la déviation entre IJ et JK ou entre JK et KL est $\pi - 2r$. Donc pour l'émergent correspondant à p traversées (attention il n'y a que $p - 1$ réflexions internes) la déviation totale est :

$$D_p = (i - r) + (p - 1)(\pi - 2r) + (i - r) = 2(i - pr) + (p - 1)\pi$$

formule qui convient pour le rayon réfléchi directement en I ($p = 0$) et pour lequel $D_0 = -(\pi - 2i)$.

Puisque i et r sont liés par $\sin i = n \sin r$, pour p donné et pour une couleur, donc un indice n , donnée D_p ne dépend que de i . Montrons que $D_p(i)$ passe par un extremum, à condition que p soit au moins égal à 2. Le passage par un extremum se traduit par une dérivée nulle soit :

$$0 = \frac{dD_p}{di} = 2\left(1 - p \frac{dr}{di}\right)$$

d'où, en raisonnant plutôt en terme de différentielle, $di = p dr$. Or $\sin i = n \sin r$ entraîne $\cos i di = n \cos r dr$ d'où $\cos i p dr = n \cos r dr$ et donc $\cos i = \frac{n}{p} \cos r$.

D'autre part, $\sin i = n \sin r$ avec $n > 1$ entraîne que $r < i$ et $\cos i < \cos r$ qui impose donc avec ce qui précède $\frac{n}{p} < 1$ d'où $p \geq 2$ car $n = 1,33$ pour l'eau. Le calcul de la valeur

de i passe par la résolution de :

$$p \cos i = n \cos r$$

soit en posant $X = \sin i$:

$$p \sqrt{1 - X^2} = n \sqrt{1 - \frac{X^2}{n^2}} = \sqrt{n^2 - X^2}$$

ce qui est aisé après avoir élevé au carré. Tout cela relève du calcul numérique et nous nous en tiendrons là.

Reste toutefois à expliquer comment l'existence de ce minimum génère l'arc-en-ciel. Au contraire d'un prisme où tous les rayons solaires arrivent sous la même incidence, une goutte d'eau reçoit ces rayons sous toutes les incidences possibles. Pour les incidences *assez* proches de celle qui correspond, pour une couleur donnée, à l'extremum de déviation, la déviation est *très* proche de l'extremum ; c'est une propriété classique d'un extremum. Il en résulte qu'une part importante de l'énergie est déviée approximativement du même angle et il y a accumulation d'énergie dans les directions correspondant à cette déviation extrême, ce qui par symétrie de révolution (cf supra) donne une allure circulaire.

Et bien sûr, puisque l'indice de réfraction de l'eau dépend de la couleur, les différentes couleurs ne s'accumulent pas dans la même direction, d'où l'aspect irisé⁸.



FIGURE 10 – Arc-en-ciel double.

L'arc obtenu pour $p = 2$ véhicule toutefois une faible partie de l'énergie et n'est visible que si l'atmosphère est chargée en gouttes d'eau, que si le soleil brille très fort et que s'il se détache sur un fond très sombre, soit typiquement une fin d'orage. Pour voir l'arc pour

8. Iris appartient au vocabulaire grec homérique et désigne l'arc-en-ciel éventuellement personnifié en une déesse habillée d'une écharpe à sept couleurs.

lequel $p = 3$, il faut vraiment des conditions exceptionnelles. Je ne puis résister à vous faire profiter de la photographie 10 p. 19. On remarquera que l'arc le plus brillant ($p = 2$) a le rouge à l'extérieur et que l'arc le plus pâle est plus grand et a le rouge à l'intérieur.

3 Formation des images.

Si les lois de l'optique ont été établies au début du XVII^e siècle, il ne faut pas en déduire que les premiers instruments d'optique ont suivi ; c'est l'inverse, ils les ont précédées. Les lunettes correctrices étaient connues au Moyen-Âge et la lunette astronomique de GALILÉE est un peu antérieure aux lois de SNELL-DESCARTES. Par contre, c'est la compréhension de ces lois qui a permis d'améliorer grandement l'efficacité de ces instruments.

3.a Image d'un point. Stigmatisme rigoureux.

Le but d'un instrument optique est de rendre un objet mieux visible en le grossissant ou en le déplaçant (correction de la myopie ou de la presbytie). Un objet est rarement lumineux par lui-même ; il ne fait que renvoyer la lumière qu'il reçoit. Chaque point d'un objet renvoie la lumière dans toutes les directions et nous l'appellerons *point-objet* ainsi que *rayon-objet* un des rayons qu'il émet.

Si les différents rayons issus d'un point-objet, après réflexion ou réfraction sur une ou plusieurs surfaces de l'instrument optique utilisé, se rencontrent en un même point, appelé *point-image* puis poursuivent leur chemin, ce point-image d'où semblent partir les rayons peut se comporter comme un nouveau point-objet vis-à-vis de l'observateur (ou d'un second dioptré ou miroir) C'est ainsi que, point par point, on peut espérer construire l'image d'un objet qui devient un nouvel objet, si possible amélioré en taille ou position.

Ceci nous amène à la définition suivante : nous dirons que vis-à-vis d'un système optique, il y a *stigmatisme rigoureux* pour le couple de points A et A' si tout rayon-objet issu du point-objet A donne, après traversée du système, un rayon-image passant par le point A' . Pour généraliser, si un ensemble de rayons-objets sont parallèles, nous considérons qu'il proviennent d'un même point-objet à l'infini et de même pour les rayons-images.

Le stigmatisme rigoureux n'est pas automatique comme le montre la figure 11 p. 21 où sont tracés par un logiciel de calcul⁹ les rayons réfractés par un dioptré sphérique (partiellement dessiné entre une incidence normale et une incidence limite) et traversé dans le sens des indices décroissants, dans le cas où les rayons-objets proviennent d'un point à l'infini : les rayons émergents font tout sauf se rencontrer en un même point.

Remarque : la courbe enveloppe des rayons émergents, qui se dessine sur la figure, est traditionnellement appelée *caustique*. La recherche de son équation est un exercice de style... pour mathématiciens ; un pur physicien n'en a cure.

9. les valeurs numériques en abscisses et ordonnées sont sans intérêt pour la compréhension du propos.

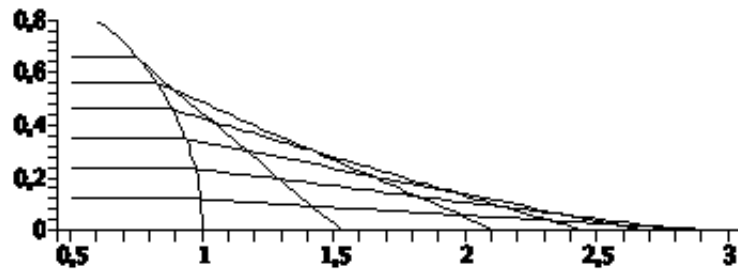


FIGURE 11 – Dioptre sphérique.

3.b Objets, images, rayons réels ou virtuels.

Avant d'aller plus loin, il faut résoudre une petite complication. Il arrive qu'après réflexion ou réfraction les rayons issus d'un même point-objet, au lieu de converger vers un même point-image, divergent en semblant provenir d'un même point situé en amont du point de réflexion/réfraction. On dit alors que l'image est *virtuelle* (par opposition à *réelle*). C'est le cas pour les deux sous-figures du bas de la figure 12 p. 21, tracée dans le cas de la réfraction et où A' est virtuel tandis que sur les sous-figures du haut, il est réel.

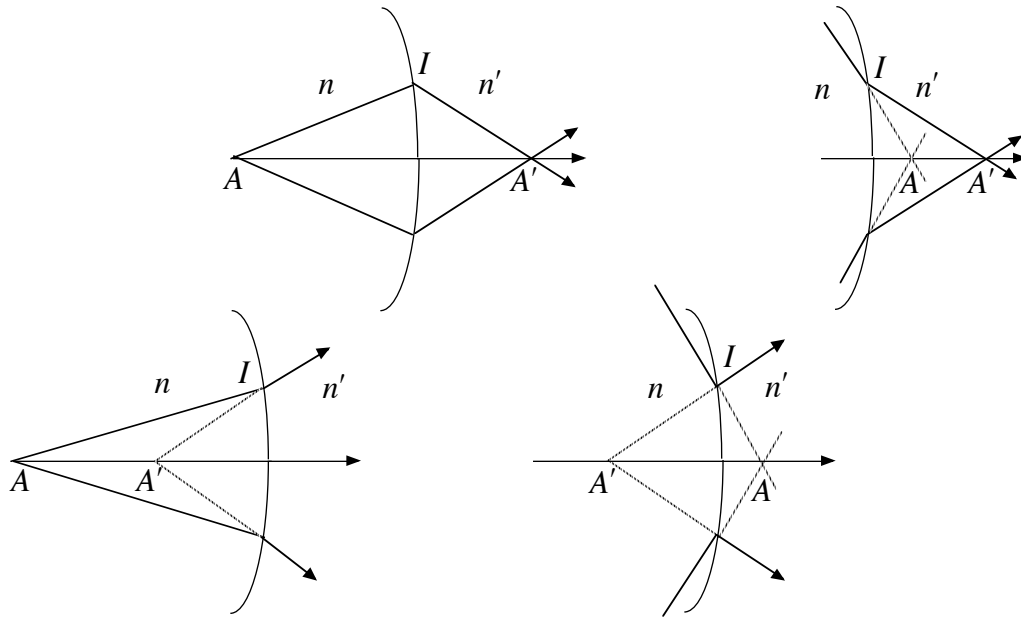


FIGURE 12 – Objets et images réels et virtuels.

De même il arrive que le dioptre ou la surface réfléchissante empêche les rayons-objets de converger vers le point-objet qui est alors, lui-aussi, qualifié de virtuel. Sur la même

figure, A est réel sur les sous-figures à gauche et virtuel à droite.

Pour évaluer le chemin optique $L_{AA'}$ pour le rayon se réfléchissant ou se réfractant en I , on effectue bien sûr la somme des chemins L_{AI} et $L_{IA'}$ avec les conventions suivantes :

- Les longueurs sont comptées positivement si l'on va dans le sens de la lumière, négativement sinon, donc L_{AI} est positif si A est réel et négatif si A est virtuel et de même $L_{IA'}$ est positif si A' est réel, négatif si A' est virtuel.
- Le chemin L_{AI} est affecté de l'indice du *milieu-objet*, celui du milieu où se propage la lumière avant réflexion ou réfraction (donc n dans le cas de la figure) même dans le cas d'un point-objet A virtuel situé dans l'autre milieu. De même, le chemin $L_{IA'}$ est affecté de l'indice du milieu-image, celui du milieu où se propage la lumière après réflexion ou réfraction (donc n' dans le cas de la figure) même dans le cas d'un point-image A' virtuel situé dans le milieu-objet. Dans le cas d'une réflexion $n' = n$ et cette seconde complication disparaît.

Dans les quatre cas de la figure, on a ainsi en haut à gauche $L_{AA'} = n \|\vec{AI}\| + n' \|\vec{IA'}\|$, en haut à droite $L_{AA'} = -n \|\vec{AI}\| + n' \|\vec{IA'}\|$, en bas à gauche $L_{AA'} = n \|\vec{AI}\| - n' \|\vec{IA'}\|$ et en bas à droite $L_{AA'} = -n \|\vec{AI}\| - n' \|\vec{IA'}\|$

Le lecteur exigeant aura remarqué que je n'ai pas justifié ces conventions. C'est que pour le faire proprement, il faudrait une longue digression sur l'aspect propagatif qui alourdirait sans grand intérêt ce chapitre déjà volumineux.

3.c Exemples simples de stigmatisme rigoureux.

Si un ensemble de rayons converge en un même point I , qui de ce fait est point-objet, d'une surface réfléchissante ou réfractante, ils se repartent tous de ce même point I qui est donc aussi le point-image. Un point d'un dioptré ou d'un miroir est donc sa propre image et il y a stigmatisme rigoureux.

Les rayons issus du centre d'un dioptré ou d'un miroir sphérique arrivent sous incidence normale, comme tous les rayons, au sens géométrique, d'une sphère et les lois de SNELL-DESCARTES indiquent qu'ils repartent avec un angle de réflexion ou de réfraction nuls et repassent donc par le centre, qui est donc sa propre image, réelle ou virtuelle, avec là encore un stigmatisme rigoureux.

3.d Propriété fondamentale du stigmatisme rigoureux.

Si tous les rayons AI qui partent du point-objet A vers tous les points I accessibles du dioptré ou du miroir et s'y réfléchissent ou s'y réfractent¹⁰ pour former les rayons IA' vers le point-image A' , alors, dans le principe de FERMAT, les chemins optiques $L_{AIA'}$ sont tous extrémaux. Or une fonction partout extrémale est une fonction constante; d'où la propriété fondamentale :

10. excepté ceux qui conduisent à une réflexion totale.

S'il y a stigmatisme rigoureux entre A et A' , les chemins optiques $L_{AIA'}$ sont tous égaux.

3.e Stigmatisme rigoureux par réflexion.

Dans le cas de la réflexion, puisque le réfléchi se propage dans le même milieu que l'incident et selon que les points A et A' sont réels ou virtuels, la propriété fondamentale s'écrit $\pm n \|\vec{AI}\| \pm n \|\vec{IA'}\| = Cte$, soit après simplification par n , $\pm \|\vec{AI}\| \pm \|\vec{IA'}\| = Cte$, relation qu'il faut lire comme l'équation de la surface réfléchissante de point courant I qui assure le stigmatisme le couple objet A et image A' . On y reconnaît selon que les signes sont les mêmes ou non, l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole de foyers A et A' .

Les cas particuliers sont le plan¹¹ (la constante est nulle et les signes opposés), le cercle (A et A' confondus au centre, cf supra) et la parabole¹² (sur les deux points A et A' , l'un est le foyer et l'autre à l'infini sur l'axe).

La voûte des stations de métro parisiennes ont des sections elliptiques dont les foyers sont approximativement au niveau de la tête d'un adulte debout en bord de quai ; la voûte ne reflète certes pas la lumière, mais le son et, aux heures creuses, deux personnes face-à-face sur les deux quais peuvent mener une conversation sans avoir à élever la voix.

Je ne crois pas utile de dessiner une ellipse¹³ et ses foyers.

3.f Stigmatisme rigoureux par réfraction. Points de Weierstrass.

Dans le cas de la réfraction, selon que les points A et A' sont réels ou virtuels, la propriété fondamentale s'écrit $\pm n \|\vec{AI}\| \pm n \|\vec{IA'}\| = Cte$, relation qu'il faut là encore lire comme l'équation de la surface réfractante de point courant I qui assure le stigmatisme le couple objet A et image A' . Hormis le cas particulier développé ci-dessous, c'est l'équation d'une surface complexe que l'on ne savait pas usiner jusqu'il y a peu. En effet pour fabriquer un dioptré non plan, la méthode la plus simple consiste à frotter l'un contre l'autre deux disques de verre avec de l'abrasif entre leurs faces planes et en imprimant des mouvements selon tous les degrés de liberté accessibles, deux de translation et l'un de rotation ; l'un des disques se creuse en son centre, l'autre s'amincit en périphérie mais ils restent partout en contact de sorte que la courbure en tout point de l'un soit égale à celle en tout point de l'autre, ces courbures sont donc uniformes et l'on obtient donc automatiquement des sphères. Toutefois, depuis le début des années 1990, on fait fabriquer des lentilles dites *asphériques*.

Il y a un cas particulier pour lequel la surface est sphérique c'est celui où la constante est nulle et les signes opposés. L'équation du dioptré est alors $n \|\vec{AI}\| = n \|\vec{IA'}\|$, soit en

11. Le miroir plan est de loin le plus utilisé des miroirs !

12. Le phare parabolique des voitures, des vélos aussi.

13. ou alors dans une caisse avec un trou pour la regarder car je ne sais pas bien dessiner.

choisissant l'axe Ox confondu avec la droite AA' , en élevant au carré et en notant x , y et z les coordonnées de I , quelque chose comme :

$$n^2 [(x - x_A)^2 + y^2 + z^2] = n'^2 [(x - x'_A)^2 + y^2 + z^2]$$

qui est bien une sphère car, sans qu'il soit besoin de développer les calculs, on remarque que c'est polynomial du second degré et que les coefficients de x^2 , y^2 et z^2 sont égaux ; par ailleurs le seul terme du premier degré est en x donc la sphère a son centre sur l'axe AA' .

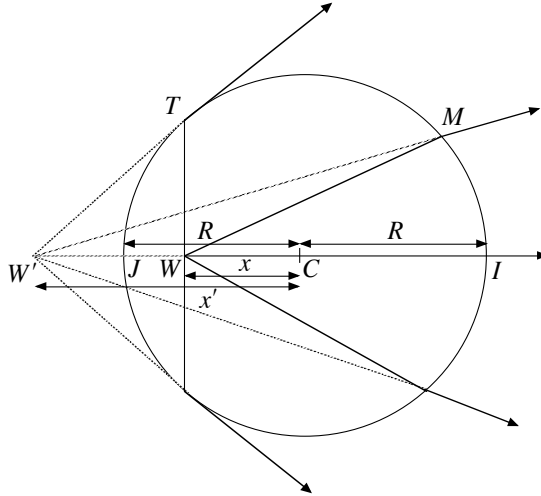


FIGURE 13 – Points de Weierstrass.

En pratique il est plus intéressant de situer sur un diamètre quelconque d'un dioptré sphérique le couple de points qui vérifient la condition de stigmatisme rigoureux. On les appelle traditionnellement *points de WEIERSTRASS*¹⁴ ou *points de YOUNG - WEIERSTRASS*, notés W et W' (en remplacement de A et A') sur la figure 13 p. 24 où on lira la définition des notations utilisées par la suite. La relation $n \|\overrightarrow{WI}\| = n' \|\overrightarrow{IW'}\|$, appliquée aux deux extrémités I et J du diamètre choisi permet d'écrire :

$$\frac{n}{n'} = \frac{\|\overrightarrow{IW'}\|}{\|\overrightarrow{WI}\|} = \frac{x' + R}{R + x} = \frac{\|\overrightarrow{JW'}\|}{\|\overrightarrow{WJ}\|} = \frac{x' - R}{R - x}$$

On obtient deux fractions égales¹⁵ à celle-ci en effectuant les demi-sommes et demi

14. Pourquoi Karl Weierstrass, mathématicien et « père de l'analyse moderne » est-il associé à cette propriété certes plus géométrique que physique mais loin de l'analyse, je n'arrive pas à en trouver l'explication. Si un lecteur la connaît, je suis preneur.

15. Une propriété bien utile souvent méconnue : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, en notant k la valeur commune, alors $a = kb$ et $c = kd$; si λ et μ sont deux coefficients quelconques, alors $\lambda a + \mu c = k(\lambda b + \mu d)$ et

$$k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}$$

différences de numérateurs et dénominateurs, soit :

$$\frac{n}{n'} = \frac{x' + R}{R + x} = \frac{x' - R}{R - x} = \frac{x'}{R} = \frac{R}{x}$$

d'où $x' = \frac{n}{n'} R$ et $x = \frac{n'}{n} R$ ce qui donne la position des points recherchés. Pas d'affolement, la figure a été tracée dans le cas où $n > n'$.

Remarque 1 : considérons dans un plan méridien, celui de la figure pour être lisible, le rayon WTW' tel que $W'T$ soit tangent à la sphère. L'angle d'émergence est alors $\frac{\pi}{2}$ donc l'angle d'incidence entre WT et la normale CT est l'angle limite i_L tel que $n \sin i_L = n'$; on a donc :

$$\sin \widehat{CTW} = \sin i_L = \frac{n'}{n} = \frac{x}{R} = \frac{\|\overrightarrow{WC}\|}{\|\overrightarrow{TC}\|}$$

qui prouve que le triangle WTC est bien rectangle en W comme le suggérait la figure.

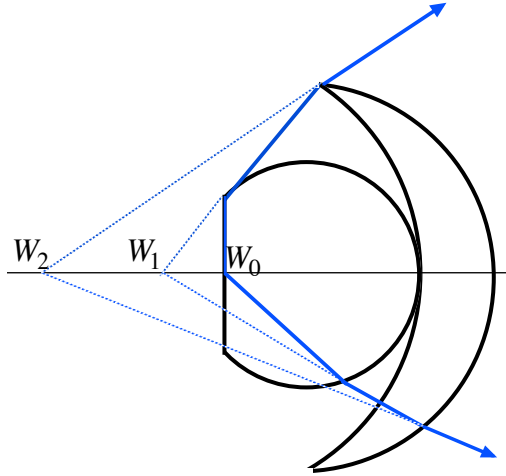


FIGURE 14 – Objectif de microscope.

Remarque 2 : un exemple classique d'utilisation des points de WEIERSTRASS est l'objectif de microscope, représenté sur la figure 14 p. 25. Une première lentille a pour premier dioptré un dioptré plan collé contre la lame à observer. Le microbe W_0 collé sur le dioptré en son centre est sa propre image (cf supra les exemples simples de stigmatisme rigoureux) et le second dioptré a W_0 comme point de WEIERSTRASS objet dont il forme l'image en W_1 . Le premier dioptré de la seconde lentille a W_1 comme centre qui est donc sa propre image (cf supra, même endroit) et son second dioptré l'admet comme point de WEIERSTRASS objet dont il forme l'image en W_2 . Un troisième lentille peut être ajoutée sur le même principe que la seconde. Le but du jeu est, en respectant le stigmatisme rigoureux, de diminuer progressivement l'angle maximal que fait avec l'axe le faisceau lumineux afin

de l'amener dans le cadre d'un stigmatisme approché (voir le chapitre D-VII sur les systèmes centrés) qui suppose des angles avec l'axe pas trop élevés. De nos jours, l'usage des lentilles asphériques permet des solutions moins volumineuses mais plus onéreuses.

Remarque 3 : La dispersion a pour conséquence que le stigmatisme rigoureux pour un couple de points donnés n'est en général acquis que pour une seule couleur.

3.g Conclusion pratique.

Un dioptré donné ne possède que peu de couples de points pour lesquels il y a stigmatisme rigoureux et la dispersion en limite l'intérêt. On sera donc, par la force des choses, obligé de se contenter d'un stigmatisme approché qui reste à définir ; ce sera fait dans le chapitre D-VII traitant des « systèmes centrés ».

3.h Notion d'aplanétisme.

Bien que la notion d'aplanétisme ne prenne tout son sens que dans le cadre des systèmes centrés, il n'est pas prématuré d'en parler ici car cela placera la problématique dans le bon contexte. Voici de quoi il s'agit : en supposant que pour un système optique donné, il y ait stigmatisme pour un couple objet-image $A-A'$, on cherche à quelle condition il peut y avoir un autre couple $B-B'$ très proche (B de A et donc B' de A') pour lequel il y ait aussi stigmatisme. On se doute, au vu de ce qui précède, que c'est un rêve sans espoir pour le stigmatisme rigoureux ; mais l'on pourra transiger et en déduire la condition d'un stigmatisme approché.

Le chemin optique entre A et A' est identique pour tous les rayons allant de l'objet à l'image, chacun d'eux rencontre un premier dioptré (ou surface réfléchissante) en I , un second en J et l'on s'arrête à deux dans cet exposé car ça se généralise aisément ; les lois de SNELL-DESCARTES permettent de trouver J connaissant I ; on peut donc poser $L(I) = L_{AIJA'} = Cte = K$ (on note K la constante) puisque la remarque précédente montre que J ne dépend que de I . De même, on veut que le chemin optique entre B et B' soit identique pour tous les rayons allant de l'objet à l'image, chaque rencontre le premier dioptré en K , le second en L (voir la figure 15 p. 27 tracée dans un contexte particulier étudié ci-après) et l'on pose $L'(K) = L_{BKLB'} = Cte = K'$ (a priori $K' \neq K$) puisque, là aussi, L' ne dépend que de K . La différence constante va être assimilée à une différentielle calculée avec la formule établie plus haut :

$$\begin{aligned} K' - K &= L'(K) - L(I) = dL_{AIJA'} = L_{AI} + L_{IJ} + L_{JA'} = \dots \\ &\dots = n_1 \vec{u}_1 \cdot (\vec{dI} - \vec{dA}) + n_2 \vec{u}_2 \cdot (\vec{dJ} - \vec{dI}) + n_3 \vec{u}_3 \cdot (\vec{dA'} - \vec{dJ}) \end{aligned}$$

où $\vec{u}_1$ est le vecteur unitaire de $\vec{AI}$ dans le milieu d'indice n_1 , $\vec{u}_2$ celui de $\vec{IJ}$ dans le milieu d'indice n_2 et $\vec{u}_3$ celui de $\vec{JA'}$ dans le milieu d'indice n_3 . En regroupant les termes

autrement, on arrive à :

$$K' - K = -n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{d\vec{A}} + (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{d\vec{I}} + (n_2 \vec{u}_2 - n_3 \vec{u}_3) \cdot \vec{d\vec{J}} + n_3 \vec{u}_3 \cdot \vec{d\vec{A}'}$$

La formulation brute des lois de Snell-Descartes (cf supra) entraîne la nullité des termes $(n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{d\vec{I}}$ et $(n_2 \vec{u}_2 - n_3 \vec{u}_3) \cdot \vec{d\vec{J}}$, d'où en identifiant $\vec{d\vec{A}}$ à $\vec{AB}$ et $\vec{d\vec{A}'}$ à $\vec{A'B'}$:

$$K' - K = -n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{AB} + n_3 \vec{u}_3 \cdot \vec{A'B'}$$

qui est la condition d'*aplanétisme*, c'est-à-dire de stigmatisme approché autour d'un couple vérifiant le stigmatisme approché. Hormis l'application au cas particulier qui suit, cette condition est inexploitable. On remarque toutefois, avant de poursuivre que la référence à I est conservée, cachée dans $\vec{u}_1$, mais que tout référence à K disparaît ; c'est-à-dire que si la relation est vérifiée quel que soit $\vec{u}_1$, c'est-à-dire quel que soit le rayon choisi pour aller de A à A' , elle le sera aussi implicitement quel que soit K , c'est-à-dire quel que soit le rayon choisi pour aller de B à B' , ce qui somme toute est dans la philosophie du stigmatisme rigoureux.

• Application à un système optique présentant une symétrie de révolution.

Supposons que tous les dioptries et miroirs du système aient un axe commun de symétrie de révolution noté Ox , que le point A soit sur l'axe, donc par symétrie A' aussi. Par symétrie, un rayon confondu avec Ox entre A et A' vérifie les lois de SNELL-DESCARTES (incidences nulles) et est donc rayon possible pour lequel $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$ se confondent avec $\vec{e}_x$, vecteur unitaire de Ox et l'on notera I_0 et J_0 les positions de I et J pour ce rayon-là. Deux cas se présentent alors. La figure 15 p. 27 résume tout ceci et est tracée dans le premier de ces cas

◦ Aplanétisme transversal.

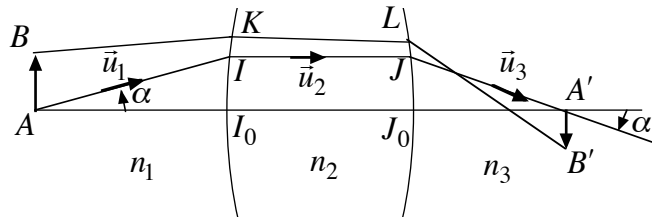


FIGURE 15 – Aplanétisme transversal.

On cherche un couple B - B' tel que $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ soient orthogonaux à l'axe Ox , on doit donc avoir, en prenant un rayon quelconque et le rayon particulier confondu avec l'axe :

$$K' - K = -n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{AB} + n_3 \vec{u}_3 \cdot \vec{A'B'} = -n_1 \vec{e}_x \cdot \vec{AB} + n_3 \vec{e}_x \cdot \vec{A'B'} = 0$$

où la nullité est assurée par l'orthogonalité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ avec Ox . En notant α et α' les angles que font $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_3}$ avec Ox c'est-à-dire les angles que fait un même rayon lumineux quelconque avec Ox à son entrée et à sa sortie du système optique, angles qui sont nuls pour le rayon confondu avec l'axe, on arrive à la *condition des sinus d'ABBE* où l'on rebaptise, pour la symétrie, n et n' les indices extrêmes :

$$\boxed{n \overline{AB} \sin \alpha = n' \overline{A'B'} \sin \alpha'}$$

où $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$ soit des longueurs affectées d'un signe selon le sens du vecteur.

On laissera ici le lecteur sur sa faim car on lui tait la façon d'utiliser ce résultat ; comme annoncé plus haut, ce résultat, adapté au contexte de stigmatisme approché qui y sera défini, ne prendra tout son sens que dans le contexte de l'étude des « systèmes centrés » (chapitre D-VII).

Remarque : on a sous-entendu que la lumière allait toujours de gauche à droite. Si la lumière rencontre un miroir et ressort à l'envers alors $\overrightarrow{u_3}$ s'identifie à $-\overrightarrow{e_x}$ pour le rayon qui suit l'axe et l'on aboutit alors à $n \overline{AB} \sin \alpha = -n' \overline{A'B'} \sin \alpha'$ (avec $n' = n$ puisque l'on ressort de là où l'on vient !). Pour un tel système dit *catadioptrique*, il suffira donc formellement de remplacer n' par $-n$. On s'abstiendra de le répéter.

◦ Aplanétisme longitudinal.

Cette fois, on cherche un couple $B-B'$ tel que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ soient parallèles à l'axe Ox , on doit donc avoir, en prenant un rayon quelconque et le rayon particulier confondu avec l'axe :

$$K' - K = -n \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{AB} + n' \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{A'B'} = -n \overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{AB} + n' \overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{A'B'}$$

soit ici :

$$K' - K = -n \overline{AB} \cos \alpha + n' \overline{A'B'} \cos \alpha' = -n \overline{AB} + n' \overline{A'B'}$$

d'où successivement :

$$n \overline{AB} (1 - \cos \alpha) = n' \overline{A'B'} (1 - \cos \alpha')$$

$$2 n \overline{AB} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = 2 n' \overline{A'B'} \sin^2 \left(\frac{\alpha'}{2} \right)$$

d'où, après simplification, la condition de HERSCHEL

$$\boxed{n \overline{AB} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = n' \overline{A'B'} \sin^2 \left(\frac{\alpha'}{2} \right)}$$

◦ **Aplanétisme global.**

Dans le cas d'un miroir plan, on a $n = n'$ et, par symétrie, $\alpha' = -\alpha$, $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ dans le cas transversal et $\overline{A'B'} = -\overline{AB}$ dans le cas longitudinal, ce qui assure les deux formes d'aplanétisme. C'est le seul cas possible de stigmatisme rigoureux en volume et il est partout acquis, ce qui permet à la Castafiore de « se voir si belle en ce miroir »¹⁶.

4 Propagation dans des milieux inhomogènes par couches.

Dans le cas général, la propagation dans un milieu inhomogène ne peut être gérée par l'approche purement axiomatique adoptée dans ce chapitre. Toutefois, dans quelques cas simples, on y arrive par passage à la limite.

4.a Modèle en couches planes. Mirages.

Soit un milieu formé de couches horizontales homogènes d'indices n_1, n_2, n_3 , etc. et un rayon se propageant dans le milieu d'indice n_1 en faisant l'angle α_1 avec l'horizontale. Lorsqu'il arrive sur le dioptré entre les milieux d'indice n_1 et n_2 de normale verticale, c'est avec l'incidence $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$; si l'on note $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$ l'angle de réfraction de sorte que le réfracté fait l'angle α_2 avec l'horizontale, les lois de SNELL-DESCARTES entraînent que $n_1 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_1) = n_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha_2)$ soit encore $n_1 \cos \alpha_1 = n_2 \cos \alpha_2$. De même lors de la traversée du dioptré entre les milieux d'indices n_2 et n_3 , on a $n_2 \cos \alpha_2 = n_3 \cos \alpha_3$ et ainsi de suite, d'où :

$$n_1 \cos \alpha_1 = n_2 \cos \alpha_2 = n_3 \cos \alpha_3 = \dots$$

Tout ceci est résumé par la figure 16 p. 30. Imaginons que les couches deviennent plus fines et plus nombreuses, la relation précédente reste valable. Si elles deviennent infiniment fines, le milieu varie continûment ; l'indice de réfraction et l'angle avec l'horizontale deviennent des fonctions de l'altitude z et on peut les noter $n(z)$ et $\alpha(z)$ qui vérifient, par passage à la limite $n(z) \cos \alpha(z) = Cte$.

Le rayon est donc une courbe d'équation inconnue $z = z(x)$ et l'on sait que la tangente de l'angle avec l'horizontale est la dérivée de cette fonction, d'où :

$$\frac{dz}{dx} = \tan \alpha$$

On peut noter z_0 l'altitude dont l'indice est la constante de $n(z) \cos \alpha(z) = Cte$, d'où

$$n(z) \cos \alpha(z) = n(z_0)$$

16. L'air des bijoux du *Faust* de Charles Gounod.

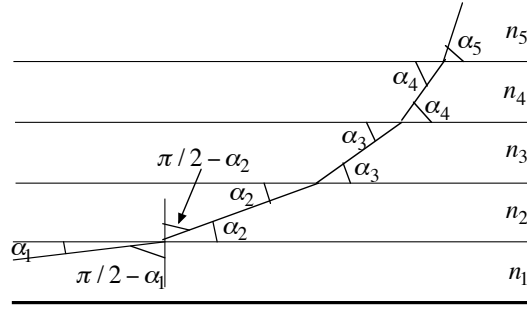


FIGURE 16 – Milieu en couches horizontales.

On élimine classiquement l'angle grâce à la relation $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$, d'où, après mise en forme :

$$\frac{n(z)^2}{n(z_0)^2} = 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\frac{n(z)^2 - n(z_0)^2}{n(z_0)^2}}$$

$$\frac{n(z_0) dz}{\sqrt{n(z)^2 - n(z_0)^2}} = \pm dx$$

Les variables sont séparées ; connaissant la fonction $n(z)$, on peut espérer intégrer et trouver la forme du rayon. Le signe dépend s'il s'agit d'un rayon qui monte ou qui descend ; du reste s'il passe à l'altitude z_0 , il changera forcément de sens et il s'agira de l'adaptation de la réflexion totale.

Par exemple, dans le gradient de température d'une couche d'air surchauffée au niveau du sol, la permittivité relative ϵ_r , égale au carré de l'indice (voir l'électromagnétisme dans la matière au chapitre C-XIII) varie avec l'altitude mais assez faiblement de sorte que l'on peut en assez bonne approximation considérer qu'une approximation affine est convenable ; plus l'air est chaud (au contact d'un sol brûlant) plus il est dilaté donc d'indice petit. Une fonction $n(z)^2 = n(z_0)^2 + a(z - z_0)$ avec a positif est raisonnable, d'où pour un rayon ascendant et en notant $n(z_0) = n_0$:

$$\frac{n_0 dz}{\sqrt{a(z - z_0)}} = dx$$

ce qui conduit, en introduisant une constante x_0 , à une parabole d'équation :

$$z = z_0 + \frac{a(x - x_0)^2}{4n_0^2}$$

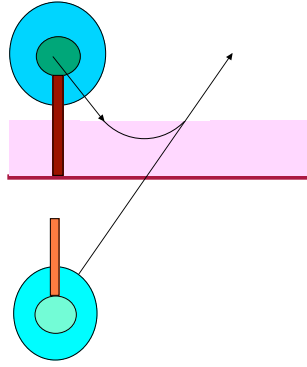


FIGURE 17 – Mirage.

La figure 17 p. 31 montre ce qu'il advient d'un rayon issu du feuillage d'un arbre¹⁷ ou du ciel (symbolisé par le halo bleu autour de l'arbre) et se faufillant à travers ce feuillage : il plonge dans l'air homogène, devient parabolique dans la couche d'air surchauffé, en ressort et devient ascendant donnant l'illusion d'un feuillage sous le sol et sur fond bleu, forcément interprété comme un reflet sur une flaque d'eau. Bien sûr, il s'agit là de la théorie du mirage.

4.b Modèle en couches cylindriques. Fibre optique à gradient d'optique.

• Forme du rayon.

Supposons cette fois que dans un cylindre de verre inhomogène l'indice ne dépend que de la distance r à l'axe Oz . Dans un plan méridien, on retrouve la situation précédente à ceci près que x est remplacé par z et z par r et l'on a en particulier :

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n(r)^2 - n(r_0)^2}{n(r_0)^2}$$

Pour des raisons qui apparaîtront un peu plus loin, il est intéressant de développer une technologie apte à donner un profil d'indice régi par la loi :

$$n(r)^2 = n(0)^2 - a^2 r^2$$

et la relation précédente devient :

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = -\frac{a^2 (r^2 - r_0^2)}{n(r_0)^2}$$

En dérivant par rapport à z , on tire :

$$2 \frac{dr}{dz} \frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{2 a^2 r}{n(r_0)^2} \frac{dr}{dz}$$

17. Un palmier eût été plus crédible mais plus difficile à dessiner.

soit après simplification :

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{a^2}{n(r_0)^2} r$$

qui admet des solutions sinusoïdale que nous noterons $r = r_m \sin(kz)$.

Remarque : le r_0 qui annule l'angle α avec l'axe (cf supra) s'identifie avec le maximum r_m de $r(z)$

• Temps de parcours de la fibre.

Un élément de rayon lumineux entre les cotes z et $z + dz$ et qui fait l'angle α avec l'axe a une longueur $d\ell = \frac{dz}{\cos \alpha}$ (il suffit d'adapter la figure 16 p. 30) et si l'on admet que la vitesse de la lumière est $v = \frac{c}{n}$ (résultat de l'approche électromagnétique) où n est calculé pour la distance à l'axe où se trouve cet élément, alors ce trajet est parcouru pendant le temps dt dont l'expression est, en tenant compte successivement de $n(r) \cos \alpha = n(r_m)$, de l'expression de $n(r)$ et de l'équation du rayon :

$$dt = \frac{d\ell}{v} = \frac{n(r) dz}{c \cos \alpha} = \frac{n(r)^2 dz}{c n(r_m)} = \frac{n(0)^2 - a^2 r^2}{c n(r_m)} dz = \frac{n(0)^2 - a^2 r_m^2 \sin^2(kz)}{c n(r_m)} dz$$

Le temps que met un rayon pour parcourir la fibre supposée très longue, de longueur L , se calcule par intégration de dt entre $z = 0$ et $z = L$ (l'intégrale d'un carré sinus est la moitié du domaine d'intégration s'il est grand, tout physicien sait cela, sous la version de la moyenne d'une telle fonction), d'où, en développant à la fin l'expression de $n(r_m)$:

$$T = \int_0^L dt = \int_0^L \frac{n(0)^2 - a^2 r_m^2 \sin^2(kz)}{c n(r_m)} dz = \frac{n(0)^2 L - \frac{1}{2} a^2 r_m^2 L}{c n(r_m)} = \frac{n(0)^2 L - \frac{1}{2} a^2 r_m^2 L}{c \sqrt{n(0)^2 - a^2 r_m^2}}$$

soit encore, en factorisant les termes prépondérants du numérateur et du dénominateur :

$$T = \frac{n(0) L}{c} \frac{1 - \frac{a^2 r_m^2}{2 n(0)^2}}{\sqrt{1 - \frac{a^2 r_m^2}{n(0)^2}}}$$

Si $\frac{a^2 r_m^2}{n(0)^2}$ est petit devant 1 pour tout r_m inférieur ou égal au rayon de la fibre, un développement limité montre que les termes d'ordre 2 en r_m sont nuls et, compte tenu de la parité, T est constant jusqu'à l'ordre 3. Une telle fibre résout donc le problème de limitation du débit binaire posé par la fibre à saut d'indice étudié plus haut.

4.c Modèle en couches sphériques. Réfraction atmosphérique.

Soit un milieu formé de couches sphériques concentriques. Un rayon passe en I_1 à la distance r_1 du centre O de la couche d'indice n_1 à celle d'indice n_2 , l'angle d'incidence i_1

et l'angle de réfraction j_2 y vérifient $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin j_2$. Puis il passe en I_2 à la distance r_2 du centre de la couche d'indice n_2 à celle d'indice n_1 , l'angle d'incidence y est i_2 . Le tout est illustré par la figure 18 p. 33.

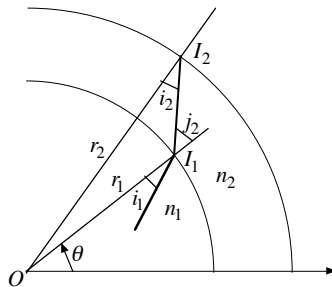


FIGURE 18 – Formule de Bouguer.

Reste à lier j_2 et i_2 ; c'est aisé si l'on se souvient que les trois rapports de sinus des angles d'un triangle aux longueurs des côtés opposés sont égaux, d'où en se limitant aux deux qui nous intéressent :

$$\frac{\sin i_2}{r_1} = \frac{\sin(\pi - j_2)}{r_2} = \frac{\sin j_2}{r_2}$$

qui combiné à $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin j_2$, conduit à :

$$r_1 n_1 \sin i_1 = r_2 n_2 \sin i_2$$

qui conduit par récurrence et passage à la limite (cf supra) à la *formule de BOUGUER* :

$$r n(r) \sin i = Cte$$

Si l'équation du rayon en coordonnées polaires est $r = r(\theta)$, on sait (ou on devrait savoir) que l'angle i qui est celui entre la tangente et le « rayon-vecteur » vérifie la relation $\cotan i = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}$.

On élimine i par $\frac{1}{\sin^2 i} = 1 + \cotan^2 i$, d'où, en notant $\frac{1}{K}$ la constante :

$$K^2 r^2 n(r)^2 = 1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2$$

qui permet, comme dans les exemples précédents, de séparer les variables et d'espérer trouver l'équation du rayon, pourvu que l'on connaisse la fonction $n(r)$.

L'exemple le plus classique est celui de la réfraction atmosphérique ; malheureusement la fonction $n(r)$ de l'atmosphère en fonction de l'altitude est extrêmement complexe et ne permet pas une résolution explicite, c'est pourquoi les calculs n'ont pas été poursuivis.

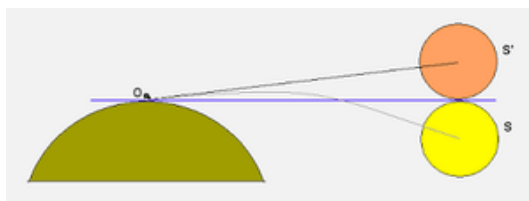


FIGURE 19 – Soleil couchant.

L'effet sur les rayons solaires (ou lunaires ou stellaires) est le plus marqué au lever ou au coucher et explique qu'ils arrivent encore sur Terre alors que l'astre du jour est déjà sous le plan de l'horizon : le soleil est déjà couché géométriquement quand il se couche optiquement. C'est l'un des deux effets¹⁸ qui expliquent, qu'à l'équinoxe il y a plus de douze heures de jour. La figure¹⁹ 19 p. 34 montre en jaune le soleil réel sous l'horizon et en orange le soleil apparent au-dessus, dans la direction des rayons à leur arrivée au sol.

18. L'autre est que le soleil n'est pas ponctuel : hors réfraction à l'équinoxe, douze heures séparent le lever du centre du soleil (le soleil est donc déjà partiellement levé) et le coucher du centre (le soleil n'est donc pas totalement couché).

19. issue de Wikipedia.