

Chapitre D-X

Optique dans les milieux anisotropes ou chiraux.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site joelsornette.fr

RÉSUMÉ :

On étudie la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu anisotrope où le vecteur $\vec{D}$ est lié au champ électrique par une relation linéaire dont la matrice, symétrique, est diagonalisée. Les effets les plus marquants sont la biréfringence et le non parallélisme entre les directions de propagation de l'onde et de l'énergie. On introduit la surface des indices et on l'utilise pour tracer les rayons réfractés à l'entrée d'un tel milieu. On s'intéresse au cas particulier des milieux uniaxes à symétrie de révolution. Le sujet est vaste et délicat ; on est allé à l'essentiel mais on n'est pas resté à la surface des choses.

On se place ensuite dans le cadre expérimental fécond de la traversée d'une lame biréfringente à faces parallèles par un faisceau lumineux parallèle et orthogonal à la lame. On définit en lumière monochromatique les lames demi-onde et quart d'onde qui, couplées à l'utilisation de polariseurs, permettent de créer à volonté des ondes de polarisation déterminée et inversement de connaître la polarisation d'une onde donnée. On montre comment les analyseurs à pénombre et à quadrant augmentent la précision de ces techniques.

On s'intéresse ensuite aux milieux chiraux, c'est-à-dire non invariants par une symétrie plan. On explique leur pouvoir rotatoire par un modèle cinématique, puis un modèle électromagnétique. On en montre l'intérêt en chimie avec un exemple d'expérience réalisée avec le polarimètre de Laurent.

On étudie les conditions d'obtention d'interférences en lumière polarisée et on en montre l'intérêt en lumière blanche : mesure d'épaisseur, fabrication de filtres (celui de Lyot par exemple), etc.

On évoque enfin, sans développement, les biréfringences provoquées par des déformations ou l'application d'un champ transversal, électrique ou magnétique, et le pouvoir rotatoire provoqué par l'application d'un champ longitudinal magnétique.

Table des matières

D-X Optique dans les milieux anisotropes ou chiraux.	1
1 Electromagnétisme dans les milieux anisotropes.	5
1.a Le cadre de l'étude.	5
1.b Recherche d'ondes planes sinusoïdales.	6
1.c Propagation de l'énergie.	8
1.d Recherche des polarisations rectilignes privilégiées. Surface des indices.	8
1.e Polarisation ordinaire dans les milieux uniaxes.	13
1.f Polarisation extraordinaire dans les milieux uniaxes.	14
1.g Surface des indices dans un milieu uniaxe.	15
1.h Tracé des rayons entrant dans un milieu anisotrope.	17
2 Modification de l'état de polarisation d'un faisceau de lumière parallèle.	18
2.a Le cadre de l'étude.	18
2.b Obtention d'une lumière polarisée rectilignement.	19
2.c Action d'une lame biréfringente sur un faisceau parallèle sous incidence normale.	23
2.d Détermination expérimentale des axes lent et rapide de lames demi-onde ou quart d'onde.	25
2.e Obtention d'une lumière polarisée elliptiquement.	27
2.f Analyse d'une vibration a priori elliptique.	27
2.g Analyseur à pénombre.	29
2.h Analyseur à quadrants.	32
3 Milieux chiraux.	34

3.a	Propriété essentielle des milieux chiraux.	34
3.b	Propagation d'une onde localement rectiligne dans un milieu chiral.	34
3.c	Polarimètre de Laurent : théorie et exemple d'application.	35
3.d	Origine du pouvoir rotatoire.	39
3.e	Etude du modèle de Drude.	40
4	Interférences en lumière polarisée.	42
4.a	Conditions d'obtention d'interférences.	42
4.b	Interférences produites par une lame anisotrope.	44
4.c	Compensateur de Babinet.	45
4.d	Filtre de Lyot.	46
5	Anisotropies provoquées.	48
5.a	Biréfringence par déformation.	49
5.b	Biréfringence électrique.	49
5.c	Biréfringence magnétique.	50
5.d	Pouvoir rotatoire magnétique.	50

1 Electromagnétisme dans les milieux anisotropes.

1.a Le cadre de l'étude.

On se limitera dans ce paragraphe à des milieux

- homogènes,
- de caractéristiques stationnaires, car faire de l'optique dans un milieu en cours d'explosion ou d'implosion, c'est de la cruauté mentale,
- non conducteurs (sans charges libres donc), en effet dans un milieu conducteur les ondes électromagnétiques sont rapidement amorties et il est dès lors sans intérêt d'y faire de l'optique,
- non magnétiques (le vecteur aimantation est partout négligeable et $\vec{H}$ se confond avec $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$), en effet c'est toujours le cas (sauf dans des milieux ferromagnétiques qui sont opaques),
- linéaires, ce qui est une bonne approximation sauf à basse températures et/ou pour des ondes de grande amplitude,
- non isotropes, ce que nous détaillerons un peu plus loin, gérés une permittivité non pas scalaire mais matricielle,
- non absorbants (encore une fois, si l'onde est rapidement amortie par absorption, l'optique géométrique perd son intérêt) de sorte que la matrice permittivité soit à coefficient réels.

Les équations de Maxwell adaptés à la propagation dans la matière, soit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho_{lib} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

dans un milieu non conducteur ($\rho_{lib} = 0$ et $\vec{j}_{lib} = \vec{0}$), non magnétique ($\frac{\vec{B}}{\mu_0}$), donnent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

On a montré par des considérations énergétiques, dans le chapitre C-XII consacré à l'électromagnétisme dans la matière, que la matrice qui lie les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{D}$ est symétrique. Or les mathématiciens, qui sont des gens charmants et serviables, ont montré que pour toute matrice symétrique à coefficients réels, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est diagonale et c'est bien sûr dans cette base que s'effectueront les calculs. Les axes associés à cette base sont généralement appelés *directions principales* par

les physiciens¹. Par analogie avec les notations des milieux isotropes et de la définition qu'on y fait de l'indice de réfraction n , on notera dans cette base privilégiée :

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x = \varepsilon_0 n_x^2 E_x \\ D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_y = \varepsilon_0 n_y^2 E_y \\ D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z = \varepsilon_0 n_z^2 E_z \end{cases}$$

Il importe de comprendre que l'anisotropie est une propriété de la matière, qu'elle résulte donc d'une anisotropie de sa structure ; une telle anisotropie n'est pas compatible avec une violente agitation thermique par la nature déstructurante de celle-ci ; elle ne s'observe donc en pratique dans les solides obtenus par un refroidissement lent pour éviter que le désordre des hautes températures ne se fige avant que la restructuration ait le temps de se faire ; bref l'anisotropie ne s'observe que dans les solides cristallisés et sous réserve que la structure cristalline² soit une de celles qui est anisotrope. Pour compliquer encore, un solide cristallisé est rarement un cristal unique (on dit un *monocristal*) mais plus souvent une juxtaposition de cristaux différents et à chacun de ces cristaux est associé un repère, chacun le sien, dans lequel la matrice permittivité est diagonale ; si un rayon passe d'un cristal à l'autre, il y aura pour lui changement de milieu, donc réflexion et réfraction. Bien évidemment, dans ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre d'un monocristal et c'est lui qui imposera le choix des axes.

Après avoir étudié le cas général, nous nous placerons ensuite dans le cas à la fois le plus simple et le plus courant, celui des *milieux uniaxes* pour lesquels deux³ des coefficients diagonaux sont égaux, disons ε_x et ε_y . On appelle alors indice *ordinaire* $n_o = \sqrt{\varepsilon_x}$ et indice *extraordinaire* $n_e = \sqrt{\varepsilon_z}$; la suite justifiera ces dénominations.

Dans ce cas, pour tout vecteur $\vec{E}$ tel que $E_z = 0$, on a $\vec{D} = \varepsilon_0 n_o \vec{E}$ et le cristal uniaxe n'impose plus que d'axe Oz ; pour les axes Ox et Oy (d'une base orthonormée), ils sont définis à une rotation près autour de Oz , ce qui permet de choisir ceux qui simplifient les calculs. Une autre façon de présenter les choses consiste à dire que le cristal uniaxe a une symétrie de révolution autour de Oz .

1.b Recherche d'ondes planes sinusoïdales.

On recherche des ondes en $\exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})]$ (en notation complexe), soit encore en notant k_1 , k_2 et k_3 les composantes de $\vec{k}$, en $\exp[i(\omega t - k_1 x - k_2 y - k_3 z)]$. En notation complexe, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ deviennent formellement des multiplications par $i\omega$, $-ik_1$, $-ik_2$ et $-ik_3$, l'opérateur nabla ($\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$) devient $-i\vec{k}$ et les opérateurs $\text{div} = \vec{\nabla} \cdot$ et $\text{rot} = \vec{\nabla} \wedge$ deviennent $-i\vec{k} \cdot$ et $-i\vec{k} \wedge$

1. et *directions propres* par les mathématiciens.

2. Cela relève de la cristallographie. C'est très aride.

3. Bien sûr, si les trois sont égaux, on a $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_x \vec{E}$ et le milieu est isotrope.

Les équations de MAXWELL dans le cadre de notre étude, soit (cf supra) :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

deviennent donc :

$$\begin{cases} -i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ -i \vec{k} \wedge \vec{E} = -i \omega \vec{B} \\ -i \vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \\ -i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 i \omega \vec{D} \end{cases}$$

soit après simplifications :

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \\ \vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{B} = -\mu_0 \omega \vec{D} \end{cases}$$

Pour des ondes en $\vec{E}(M, t) = \vec{E}^* \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})]$ où $\vec{E}^*$ est un vecteur constant, et expressions analogues pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$, il en résulte après simplification par l'exponentielle que

$$\begin{cases} (1) \quad \vec{k} \cdot \vec{B}^* = 0 \\ (2) \quad \vec{k} \wedge \vec{E}^* = \omega \vec{B}^* \\ (3) \quad \vec{k} \cdot \vec{D}^* = 0 \\ (4) \quad \vec{k} \wedge \vec{B}^* = -\mu_0 \omega \vec{D}^* \end{cases}$$

On peut déjà en déduire que le vecteur d'onde $\vec{k}$ est orthogonal à $\vec{B}^*$ (équations 1 et 2), à $\vec{D}^*$ (équations 3 et 4) et que $\vec{B}^*$ est orthogonal à $\vec{E}^*$ (équation 2) et à $\vec{D}^*$ (équation 4). Il en résulte que $\vec{k}$, $\vec{D}^*$ et $\vec{B}^*$ deux à deux perpendiculaires forment un trièdre trirectangle (direct dans cet ordre d'après l'équation 4); on rappelle (voir le chapitre C-XIII sur les ondes électromagnétiques dans le vide, là où l'on étudie la polarisation des ondes) que, pour une direction de propagation donnée par $\vec{k}$, cela ne prouve nullement que $\vec{B}^*$ et $\vec{D}^*$ aient une direction fixe; le trièdre peut tourner librement autour de la direction de $\vec{k}$. Quant au dernier vecteur, à savoir $\vec{E}^*$, il est orthogonal à $\vec{B}^*$ donc dans le plan qui contient $\vec{D}^*$ et $\vec{k}$; la relation matricielle entre $\vec{E}$ et $\vec{D}$ qui se reporte sur $\vec{E}^*$ et $\vec{D}^*$ montre qu'ils ne sont pas parallèles, sauf cas particulier.

On sait qu'une onde plane progressive sinusoïdale peut être considérée comme somme de deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions orthogonales⁴. La suite montrera comment les trouver de façon pertinente ; toutefois dans le cas des milieux uniaxes, on les devine aisément (cf infra). La structure trirectangle impose de privilégier le vecteur $\vec{D}$ au vecteur $\vec{E}$.

1.c Propagation de l'énergie.

La figure 1 p. 8 reprend la disposition des vecteurs $\vec{k}, \vec{E}$ (placé arbitrairement dans le plan de $\vec{k}$ et $\vec{D}$), $\vec{D}$ et $\vec{B}$ (perpendiculaire au plan de figure et pointant vers le lecteur). On y a ajouté le vecteur de POYNTING $\vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ qui donne la direction de propagation de l'énergie. On a dessiné un faisceau lumineux diaphragmé (en rouge) dont les frontières (entre ombre et lumière) suivent la direction de propagation de l'énergie. Dans ce faisceau, on a dessiné quelques surfaces d'onde orthogonales au vecteur d'onde $\vec{k}$ et un rayon parallèle à $\vec{k}$ et, dans ce contexte, invisible à l'œil nu.

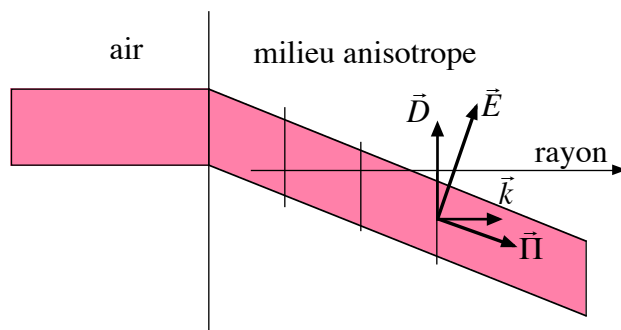


FIGURE 1 – Propagation de l'énergie.

De plus, on y a visualisé, pour ce faisceau diaphragmé, une réfraction sous incidence normale entre l'air et le diélectrique anisotrope. Comme la loi de SNELL-DESCARTES s'applique aux vecteurs d'onde (voir le chapitre D-V sur les lois de l'optique et en électromagnétisme, le chapitre C-XIII sur les ondes dans la matière), le vecteur d'onde reste orthogonal au dioptre mais la direction de propagation du faisceau, celle de $\vec{H}$, ne l'est pas et semble violer les lois de SNELL-DESCARTES ; ce paragraphe explique qu'il n'en est rien.

1.d Recherche des polarisations rectilignes privilégiées. Surface des indices.

Si la lecture de ce paragraphe semble un peu ardue, on peut sans problème passer au suivant.

4. voire non orthogonales mais ça complique inutilement les choses.

• **Considérations initiales.**

Considérons une onde plane progressive sinusoïdale dans la direction du vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{u}$ (où $\vec{u}$ est unitaire et $k = \|\vec{k}\|$), polarisée rectilignement dans la direction que définit le vecteur constant $\vec{D}^*$. Par analogie avec une onde dans un milieu isotrope, on définira la vitesse et l'indice pour ces directions de propagation et de polarisation par $k = \frac{\omega}{v}$ et $v = \frac{c}{n}$. Les relations :

$$\begin{cases} \vec{k} \wedge \vec{E}^* = \omega \vec{B}^* \\ \vec{k} \wedge \vec{B}^* = -\mu_0 \omega \vec{D}^* \end{cases}$$

deviennent

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{E}^* = \frac{c}{n} \vec{B}^* \\ \vec{u} \wedge \vec{B}^* = -\mu_0 \frac{c}{n} \vec{D}^* \end{cases}$$

On tire $\vec{B}^*$ de la première et l'on reporte dans la seconde pour en tirer :

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E}^*) = -\mu_0 \frac{c^2}{n^2} \vec{D}^*$$

soit avec la formule du double produit vectoriel, la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et le fait que $\vec{u}$ est unitaire :

$$\vec{u} \cdot (\vec{E}^* \cdot \vec{u}) - \vec{E}^* \cdot (\vec{u} \cdot \vec{u}) = -\mu_0 \frac{c^2}{n^2} \vec{D}^*$$

$$\vec{E}^* - \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{\varepsilon_0 n^2} \vec{D}^*$$

où $\vec{E}^*$ de composantes notées ici E_x , E_y et E_z et $\vec{D}^*$ de composantes D_x , D_y et D_z sont liés par :

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_0 n_x^2 E_x \\ D_y = \varepsilon_0 n_y^2 E_y \\ D_z = \varepsilon_0 n_z^2 E_z \end{cases}$$

• **Vitesses de propagation.**

La suite est un peu artificielle ; on commence par privilégier pour les raisons évoquées plus haut le vecteur $\vec{D}^*$ mais uniquement là où c'est utile pour la suite⁵. Grâce à la

5. Le premier qui ait démontré ce qui suit a éliminé $\vec{E}^*$ partout, puis la démonstration a été ramenée au strict minimum pour lui rendre un peu de lisibilité.

relation matricielle, en projetant sur les trois directions principales du milieu anisotrope et en multipliant par ε_0 , on peut réécrire les choses ainsi :

$$\begin{cases} \frac{1}{n_x^2} D_x - \varepsilon_0 u_x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{n^2} D_x \\ \frac{1}{n_y^2} D_y - \varepsilon_0 u_y \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{n^2} D_y \\ \frac{1}{n_z^2} D_z - \varepsilon_0 u_z \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{n^2} D_z \end{cases}$$

d'où :

$$D_x = \frac{\varepsilon_0 u_x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*)}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}} \quad D_y = \frac{\varepsilon_0 u_y \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*)}{\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n^2}} \quad D_z = \frac{\varepsilon_0 u_z \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*)}{\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n^2}}$$

L'astuce finale consiste à se rappeler que $\vec{D}^*$ est orthogonal à $\vec{k}$ donc à $\vec{u}$, ce que l'on exprime par $D_x u_x + D_y u_y + D_z u_z = 0$; en y reportant les expressions ci-dessus et en simplifiant par $\varepsilon_0 (\vec{u} \cdot \vec{E}^*)$ qu'il était donc inutile de développer, on arrive à :

$$\frac{u_x^2}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{u_y^2}{\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{u_z^2}{\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

que l'on considère⁶ comme une équation donnant n (donc la vitesse de propagation, la possibilité d'utiliser les lois de SNELL-DESCARTES, etc.) en fonction de la direction de propagation (décrite par u_x , u_y et u_z) dans le milieu caractérisé par les indices n_x , n_y et n_z .

Remarque : La simplification par $(\vec{u} \cdot \vec{E}^*)$ escamote des solutions possibles pour lesquelles cette quantité est nulle; en revenant au système de départ et en annulant le terme concerné, on se convainc aisément que cela correspond à trois solutions, une avec $n = n_x$, $D_y = 0$ et $D_z = 0$ et deux autres obtenues par permutation circulaires. Pour ces solutions, $\vec{D}$ est parallèle à une direction privilégiée et $\vec{E}$ lui est parallèle. Ces rares solutions se raccordent par continuité avec celles de l'équation qui vient d'être obtenue, mais c'est délicat à montrer.

La suite est plus simple qu'il n'y paraît car, malgré les apparences, l'équation est bicarrée⁷ en n et admet donc quatre solutions de la forme $\pm n'$ et $\pm n''$, où le signe n'est significatif que du sens de propagation pour une direction donnée. Donc, au sens près, pour une direction de propagation donnée, il y a deux types de solutions (deux polarisations) correspondant aux indices n' et n'' et aux vitesses $\frac{c}{n'}$ et $\frac{c}{n''}$. Les expressions de n' et n'' sont accessibles mais compliquées à manipuler; les exhiber ici n'apporterait rien.

6. Je suggère au lecteur qu'à la fin de toute séquence de calcul (dans la lecture de ce cours ou dans ses travaux), il se remémore quelles sont les données, les paramètres et les inconnues du problème, bref qu'il redonne du sens aux notations qu'il manipule, et qu'il ne confonde jamais, comme disent les linguistes, le signifié et le signifiant.

7. On multiplie par le produit des trois dénominateurs puis par n^4 .

• **Direction des polarisations privilégiées.**

Les expressions des composantes de $\vec{D}^*$, données ci-dessus, donnent aisément les directions de polarisation correspondant aux deux indices ; il suffit de remarquer qu'elles montrent le parallélisme de $\vec{D}^*$ avec un vecteur $\vec{v}$ de composantes :

$$v_x = \frac{u_x}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}} \quad v_y = \frac{u_y}{\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n^2}} \quad v_z = \frac{u_z}{\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n^2}}$$

où il suffira de remplacer n par les expressions de n' ou n'' ; on notera $\vec{v}'$ et $\vec{v}''$ les vecteurs ainsi obtenus.

A n' correspond une direction de polarisation de $\vec{D}^*$ parallèle à $\vec{v}'$ et à n'' , une direction parallèle à $\vec{v}''$. Nous allons montrer que ces deux directions privilégiées de polarisation sont orthogonales ; pour cela calculons le produit scalaire $\vec{v}' \cdot \vec{v}''$:

$$\begin{aligned} \vec{v}' \cdot \vec{v}'' &= v'_x v''_x + v'_y v''_y + v'_z v''_z = \dots \\ \dots &= \frac{u_x^2}{\left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n''^2}\right)} + \frac{u_y^2}{\left(\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \left(\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n''^2}\right)} + \frac{u_z^2}{\left(\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \left(\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n''^2}\right)} \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\frac{\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2}}{\left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n''^2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n'^2}} - \frac{1}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n''^2}}$$

et expressions analogues, et en se souvenant que n' et n'' sont les solutions de :

$$\frac{u_x^2}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{u_y^2}{\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{u_z^2}{\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \vec{v}' \cdot \vec{v}'' &= \dots \\ \dots &= \left(\frac{u_x^2}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n'^2}} + \frac{u_y^2}{\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n'^2}} + \frac{u_z^2}{\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n'^2}}\right) - \left(\frac{u_x^2}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n''^2}} + \frac{u_y^2}{\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n''^2}} + \frac{u_z^2}{\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n''^2}}\right) = \dots \\ &\dots = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

La conclusion de tout ce paragraphe consacré aux diélectriques anisotropes est que dans toute direction de propagation, on peut décomposer une onde plane progressive sinusoïdale (transversale vis-à-vis des vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{B}$), en deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions orthogonales entre elles, se propageant l'une à la vitesse $\frac{c}{n'}$ et l'autre à la vitesse $\frac{c}{n''}$.

Surface des indices.

On peut visualiser le résultat donnant n' et n'' en fonction de la direction $\vec{u}$, en traçant, à partir d'un même point arbitraire O deux points tels que OM soit égal à n' ou n'' , soit deux points tel que $\overrightarrow{OM}$ soit égal à $n' \vec{u}$ ou $n'' \vec{u}$. On obtient ainsi la *surface des indices*, surface à deux nappes, l'une pour n' , l'autre pour n'' .

n' et n'' sont solutions (cf supra) de :

$$\frac{u_x^2}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{u_y^2}{\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{u_z^2}{\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

que l'on peut réécrire ainsi :

$$\frac{n_x^2 n^2 u_x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{n_y^2 n^2 u_y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{n_z^2 n^2 u_z^2}{n^2 - n_z^2} = 0$$

Par projection de $\overrightarrow{OM} = n \vec{u}$ où n est indifféremment n' ou n'' puis en calculant le carré de la norme (avec $\vec{u}$ unitaire), on a, en appelant x, y et z les coordonnées de M :

$$x = n u_x \quad y = n u_y \quad z = n u_z \quad x^2 + y^2 + z^2 = n^2$$

d'où, en reportant dans l'équation précédente :

$$\frac{n_x^2 x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - n_x^2} + \frac{n_y^2 y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - n_y^2} + \frac{n_z^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - n_z^2} = 0$$

qu'on peut mettre sous forme polynomiale en multipliant par le produit des trois dénominateurs. Le polynôme obtenu est de degré élevé et l'étude de la surface est complexe. Nous verrons un peu plus loin que dans un milieu uniaxe le résultat est plus simple.

Nous verrons un peu plus loin aussi quel profit on peut tirer de cette surface.

• Une autre approche.

On trouve parfois l'approche suivante, moins naturelle : au lieu de chercher la vitesse de propagation dans une direction de propagation donnée, on la cherche pour une direction de polarisation donnée. Au lieu d'écrire :

$$D_x = \frac{\varepsilon_0 u_x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*)}{\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}} \quad D_y = \frac{\varepsilon_0 u_y \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*)}{\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n^2}} \quad D_z = \frac{\varepsilon_0 u_z \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*)}{\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n^2}}$$

on écrit :

$$u_x = \frac{\left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_x}{\varepsilon_0 \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*)}$$

et analogues que l'on reporte comme précédemment dans $D_x u_x + D_y u_y + D_z u_z = 0$. Après simplification par le facteur commun, on arrive aisément à :

$$\frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2} = \frac{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2}{n^2} = \frac{D^2}{n^2}$$

et en divisant par D^2 on fait apparaître les composantes du vecteur unitaire de $\vec{D}$ que l'on notera ici $\vec{w}$, d'où :

$$\frac{w_x^2}{n_x^2} + \frac{w_y^2}{n_y^2} + \frac{w_z^2}{n_z^2} = \frac{1}{n^2}$$

Cette fois, il n'y a qu'une seule valeur de n possible, au signe près (soit au sens de propagation près).

Dans ce cas, les relations $u_x = \frac{\left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_x}{\varepsilon_0 \cdot (\vec{u} \cdot \vec{E}^*)}$ et analogues, une fois n calculé pour une direction de polarisation $\vec{w}$ donnée, montre que la direction de propagation de ce type d'onde est parallèle à un vecteur de composantes :

$$\left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}\right) w_x \quad \left(\frac{1}{n_y^2} - \frac{1}{n^2}\right) w_y \quad \left(\frac{1}{n_z^2} - \frac{1}{n^2}\right) w_z$$

Comme pour la surface des indices, on peut ici tracer les points M tels que $\vec{OM} = n \vec{w}$ et la surface obtenue a une équation polynomiale du second degré⁸ ; c'est un ellipsoïde appelé *ellipsoïde des indices*.

1.e Polarisation ordinaire dans les milieux uniaxes.

Pour donner une souplesse dans la lecture, je traite les deux paragraphes suivants sans tenir compte du précédent.

Remarquons avant toute chose que le milieu étant anisotrope, les propriétés d'une onde plane dépendent a priori de sa direction de propagation, donnée par son vecteur d'onde $\vec{k}$. La symétrie de révolution autour de l'axe Oz dans le cas d'un milieu uniaxe permet de choisir Ox de sorte que $\vec{k}$ soit dans le plan zOx et, en notant φ l'angle que $\vec{k}$ avec Oz , on pourra écrire $\vec{k} = k(\cos \varphi \vec{e}_z + \sin \varphi \vec{e}_x)$

Une polarisation rectiligne simple est celle pour laquelle $\vec{D}$ est parallèle à Oy (et est bien orthogonal à $\vec{k}$) et $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{k}$ dans le plan zOx . Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} 0 = D_x = \varepsilon_0 n_o^2 E_x \\ D_y = \varepsilon_0 n_o^2 E_y \\ 0 = D_z = \varepsilon_0 n_e^2 E_z \end{cases}$$

8. Les calculs sont plus aisés et sont laissés à la charge du lecteur.

d'où $E_z = 0$ qui couplé à $D_z = 0$ permet d'écrire $D_z = Cte E_z$ quelle que soit la valeur de la constante, en particulier pour n_o^2 ; on a donc aussi⁹ :

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_0 n_o^2 E_x \\ D_y = \varepsilon_0 n_o^2 E_y \\ D_z = \varepsilon_0 n_o^2 E_z \end{cases}$$

soit vectoriellement $\vec{D} = \varepsilon_0 n_o^2 \vec{E}$ et formellement, on se retrouve dans le cas d'un onde se propageant dans un milieu isotrope d'indice n_o

On se retrouve donc en terrain connu et l'on parle donc de *polarisation ordinaire*. On renvoie le lecteur au chapitre sur les milieux homogènes.

1.f Polarisation extraordinaire dans les milieux uniaxes.

Pour une propagation de vecteur d'onde $\vec{k} = k(\cos \varphi \vec{e}_z + \sin \varphi \vec{e}_x)$, une autre polarisation rectiligne simple est celle pour laquelle $\vec{B}$ est parallèle à Oy et $\vec{D}$ orthogonal à $\vec{k}$ dans le plan zOx . Dans ce cas, on peut noter $\vec{D} = k(-\sin \varphi \vec{e}_z + \cos \varphi \vec{e}_x)$. La relation matricielle entre $\vec{E}^*$ et $\vec{D}^*$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} -D \sin \varphi = D_x = \varepsilon_0 n_o^2 E_x \\ 0 = \varepsilon_0 n_o^2 E_y \\ D \cos \varphi = D_z = \varepsilon_0 n_e^2 E_z \end{cases}$$

On en tire :

$$\vec{E}^* = -\frac{D \sin \varphi}{\varepsilon_0 n_o^2} \vec{e}_x + \frac{D \cos \varphi}{\varepsilon_0 n_e^2} \vec{e}_z$$

puis, avec $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v} = \frac{n}{c}$ où v est la vitesse de propagation de ce type d'onde et n l'indice correspondant

$$\vec{B}^* = B_y \vec{e}_y = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}^* = \frac{n D}{\varepsilon_0 c} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{n_o^2} \right) \vec{e}_y$$

Enfin on exploite $\vec{k} \wedge \vec{B}^* = -\mu_0 \omega \vec{D}^*$ en remarquant, pour éviter les calculs par projection sur les axes, que, puisque les vecteurs du produit vectoriel sont directement orthogonaux, on a alors, avec nos notations, $k B_y = \mu_0 \omega D$, soit, toujours avec $\frac{k}{\omega} = \frac{n}{c}$:

$$\frac{n^2 D}{\varepsilon_0 c^2} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{n_o^2} \right) = \mu_0 D$$

9. C'est évident et l'on peut s'éviter ces circonlocutions si l'on maîtrise la notion mathématique de vecteur propre.

d'où l'on déduit, après simplification par D et avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{n_o^2}$$

qui fixe n et donc v en fonction de la direction de propagation donnée par φ

Conclusion des deux derniers paragraphes : dans un milieu uniaxe, une onde plane progressive sinusoïdale se propageant dans une direction faisant avec l'axe de symétrie un angle φ se décompose en deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions orthogonales en elles :

- la première se comporte comme dans un milieu isotrope d'indice n_o
- la seconde a le comportement « extraordinaire » évoqué dans tout ce qui précède : non-parallélisme de $\vec{E}$ et $\vec{D}$, non-transversalité de $\vec{E}$, non-parallélisme de $\vec{k}$ et $\vec{H}$, indice dépendant de la direction de propagation.

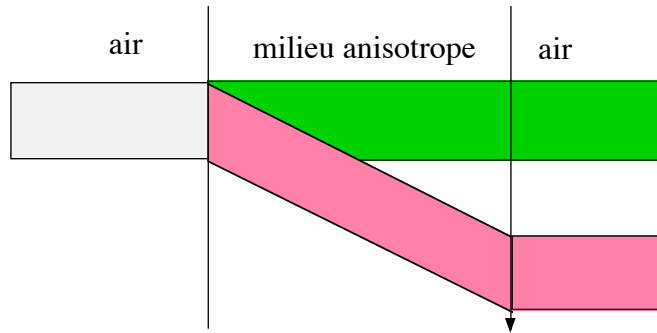


FIGURE 2 – Biréfringence.

Un effet classique est que si un faisceau de lumière naturelle arrive orthogonalement à une lame de milieu uniaxe, sa composante ordinaire (dessinée en vert sur la figure 2 p. 15) traverse la lame de façon normale et sa composante extraordinaire (dessinée en rouge) subit la même réfraction (du vecteur $\vec{H}$) que sur la figure 1 p. 8 à l'entrée et la déviation inverse en sortie. C'est ce genre de dédoublement qui explique que les milieux anisotropes soient aussi qualifiés de *biréfringents*.

Cet effet explique ce que l'on observe quand on pose une lame de spath d'Islande (une forme de calcite) sur un texte imprimé : le texte apparaît dédoublé comme le montre la photographie 3 p. 16

1.g Surface des indices dans un milieu uniaxe.

On peut sauter ce paragraphe si on a sauté plus haut le paragraphe 1.d p. 8 qu'il prolonge.

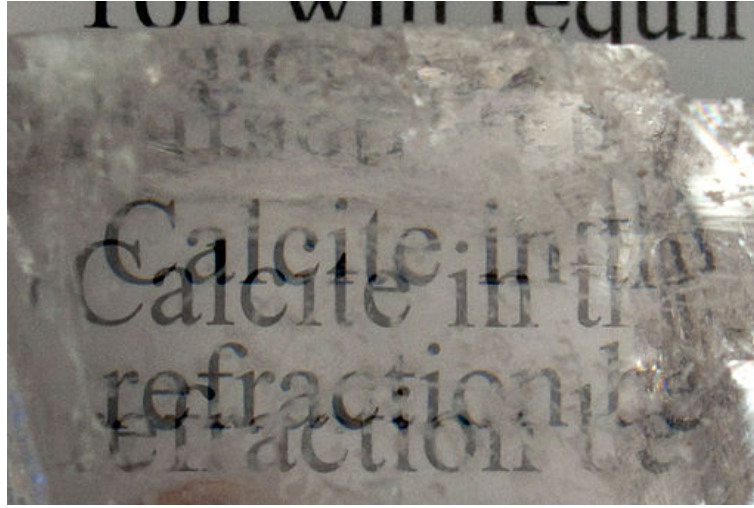


FIGURE 3 – Spath d'Islande.

Avec $n_x = n_y = n_o$ et $n_z = n_e$, l'équation

$$\frac{u_x^2}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{u_y^2}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{u_z^2}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

devient :

$$\frac{u_x^2 + u_y^2}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{u_z^2}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

que l'on peut réécrire ainsi :

$$\frac{n_o^2 n^2 (u_x^2 + u_y^2)}{n^2 - n_o^2} + \frac{n_e^2 n^2 u_z^2}{n^2 - n_e^2} = 0$$

d'où, avec

$$x = n u_x \quad y = n u_y \quad z = n u_z \quad x^2 + y^2 + z^2 = n^2$$

l'équation de la surface des indices que l'on met progressivement en forme :

$$\begin{aligned} \frac{n_o^2 (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - n_o^2} + \frac{n_e^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - n_e^2} &= 0 \\ [n_o^2 (x^2 + y^2)][x^2 + y^2 + z^2 - n_e^2] + [n_e^2 z^2][x^2 + y^2 + z^2 - n_o^2] &= 0 \\ [n_o^2 (x^2 + y^2) + n_e^2 z^2][x^2 + y^2 + z^2] &= [x^2 + y^2 + z^2] n_o^2 n_e^2 \end{aligned}$$

$$n_o^2 (x^2 + y^2) + n_e^2 z^2 = n_o^2 n_e^2$$

$$\frac{x^2}{n_e^2} + \frac{y^2}{n_e^2} + \frac{z^2}{n_o^2} = 1$$

qui est l'équation d'un ellipsoïde de révolution d'axe Oz .

C'est certes sympathique mais on a perdu une nappe de la surface des indices qui en comporte deux. Mathématiquement, la remarque antérieure expliquant que la simplification par $(\vec{u} \cdot \vec{E}^*)$ escamote des solutions possibles pour lesquelles cette quantité est nulle reste valable ; mais avec deux indices égaux, on a cette fois des solutions escamotées plus nombreuses pour lesquelles $n = n_o$ et seul $D_z = 0$. Physiquement, il s'agit des rayons ayant la polarisation ordinaire correspondant à n_o quelle que soit la direction de propagation ; la physique permet alors d'affirmer sans plus de calcul que le seconde nappe correspond à l'ensemble des solutions escamotées et que c'est une sphère de rayon n_o tangente à l'ellipsoïde sur l'axe Oz .

1.h Tracé des rayons entrant dans un milieu anisotrope.

La connaissance de la surface des indices permet de tracer les rayons réfractés (nommés ordinaire et extraordinaire si l'on a affaire à un milieu uniaxe) quand un rayon incident arrive sur un dioptre entre l'air (ou tout autre milieu isotrope) et un milieu biréfringent. La figure 4 p. 17 a été tracée dans le cas d'un milieu uniaxe parce que c'est plus aisé à dessiner mais la méthode est valable dans le cas général.

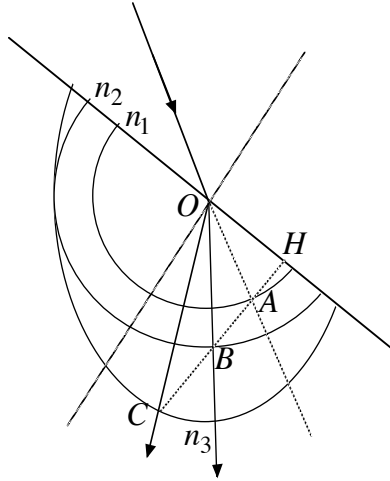


FIGURE 4 – Tracé des rayons.

On trace le plan d'incidence du rayon arrivant en O sur le dioptre ; on a choisi un milieu homogène d'indice n_1 et un milieu uniaxe d'indice ordinaire n_2 et extraordinaire n_3 . La

trace du dioptré sur le plan d'incidence est la droite¹⁰ OH , celle de la surface des indices à deux nappes (ici une sphère et un ellipsoïde) est formée de deux courbes (ici un cercle de rayon n_2 et une ellipse de demi-axes n_2 et n_3) dont on n'a tracé que des moitiés. On a choisi un plan d'incidence de direction quelconque par rapport à l'ellipsoïde. Le choix $n_1 < n_2 < n_3$ est parfaitement arbitraire.

On sait que les lois de SNELL-DESCARTES résultent que l'égalité des projections des vecteurs $\vec{k}$ de l'onde incidente et des ondes réfractées (ici au pluriel, biréfringence oblique) ; en introduisant les vecteurs unitaires $\vec{u}$, on sait que $\vec{k} = k \vec{u} = \frac{n\omega}{c} \vec{u}$ pour les trois ondes ; on sait aussi qu'elles ont même pulsation ω donc les vecteurs $n \vec{u}$ ont eux aussi leur projections égales. Or ce sont ces vecteurs qui définissent les surfaces d'onde ; par analogie de construction, dans le milieu isotrope ce sera une surface à une nappe isotrope, donc une sphère de rayon n_1 .

Dès lors les choses sont aisées à comprendre : l'intersection du rayon incident avec la sphère de rayon n_1 donne un point A tel que $\vec{OA} = n_1 \vec{u}_{inc.}$ qui se projette sur le dioptré en un point H ; les points B et C de même projection H et appartenant aux deux nappes de la surface des indices sont les extrémités des vecteurs $n \vec{u}$ des réfractés ordinaire et extraordinaire ; comme les vecteurs $\vec{u}$ sont les vecteurs unitaires de la direction de propagation, les rayons réfractés sont OB et OC .

Remarque : cette méthode est bien sûr l'extrapolation d'une méthode classique de tracé d'un réfracté par un dioptré entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , on y a juste ajouté le tracé de OC .

2 Modification de l'état de polarisation d'un faisceau de lumière parallèle.

2.a Le cadre de l'étude.

Une onde lumineuse est un phénomène électromagnétique, donc doublement vectoriel. Toutefois, un modèle scalaire est suffisant pour expliquer nombre de phénomènes (optique géométrique, interférences, diffraction), mais pas dans certains cas particuliers.

Nous allons ici explorer cette nature vectorielle et nous nous placerons systématiquement en faisceau parallèle, donc n'étudierons que des ondes planes et nous savons dans ce cas comment déduire le champ électrique du champ magnétique, nous n'en parlerons donc pas.

Rappelons (voir chapitre D-II), et c'est là l'essentiel de notre étude d'aujourd'hui, que les champs d'une onde électromagnétique sont transversaux¹¹, c'est-à-dire orthogonaux à

10. Elle est en biais non parce qu'elle a été tracée un lendemain de fête mais parce qu'il est plus aisé de dessiner une ellipse avec ses axes horizontal et vertical.

11. La première partie de ce chapitre montre qu'il s'agit dans un matériau anisotrope des vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{B}$; or les seuls vecteurs qui aient une composante tangentielle continue sont $\vec{E}$, et, puisque nous

la direction de propagation ; ils appartiennent donc à un espace à deux dimensions. Avec un choix convenable des axes, le champ le plus général est donc :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \\ B_2 \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

Nous avons aussi vu que si $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ou π , alors $\vec{B}$ a une direction fixe (qu'on choisit, sauf contrainte particulière, comme direction Oy ou Oz) ; on dit alors qu'on a affaire à une polarisation rectiligne dans telle ou telle direction.

Nous avons aussi vu que si $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ et $B_1 = B_2$, alors $\vec{B}$ tourne avec le temps de façon circulaire ; on dit qu'on a affaire à une polarisation circulaire directe ou indirecte selon le sens de rotation.

Dans le cas général, $\vec{B}$ décrit une ellipse, on a affaire à une polarisation elliptique directe ou indirecte.

Rappelons enfin que toute polarisation elliptique peut être considérée comme somme de deux polarisations rectilignes dans des directions orthogonales et que toute polarisation rectiligne peut être considérée comme somme de deux polarisations circulaires, une directe et l'autre indirecte.

Terminons par adapter la notion de cohérence (voir le chapitre D-XI sur les interférences lumineuses). Là aussi, puisque le modèle scalaire n'est qu'une simplification de notre propos de ce jour, la lumière naturelle est une succession de trains d'onde dont la durée (de l'ordre de 10^{-11} s pour une lampe spectrale par exemple) est grande devant la période du phénomène (de l'ordre de 10^{-15} s) mais petite devant le temps de réponse des récepteurs (de l'ordre de 10^{-2} s). Mais au lieu d'une phase qui varie aléatoirement à chaque changement de train d'onde, c'est ici l'état de polarisation, c'est à dire, bien sûr, φ_1 et φ_2 , mais aussi leur différence et aussi les amplitudes B_1 et B_2 , avec toutefois $B_1^2 + B_2^2 \approx Cte$, ce qui assure que les trains d'onde ont même intensité.

2.b Obtention d'une lumière polarisée rectilignement.

• Polarisation par réflexion.

Dans le chapitre C-XIII consacré aux ondes électromagnétiques dans la matière (partie relative à la réflexion et à la réfraction), nous avons vu que, sous un angle d'incidence particulier, appelé incidence de BREWSTER, le rayon réfléchi par un dioptré est polarisé rectilignement dans une direction perpendiculaire au plan d'incidence.

Historiquement les premiers polariseurs étaient conçus à partir de ce phénomène. Ils

n'utiliseront que des matériaux non conducteurs ($\vec{i}_{s,lib} = \vec{0}$) et non magnétiques ($\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$), $\vec{B}$. Il est donc nécessaire de travailler avec $\vec{B}$ pour éviter le maximum de difficulté.

ont vite été abandonnés car leur défaut est qu'ils changent la direction de la lumière et empêchent une expérience en ligne sur un banc d'optique

Remarque : en observant à travers un filtre polarisant moderne (cf infra) le reflet sur une vitre sous la bonne incidence et avec la bonne orientation du filtre, le reflet disparaît. On peut ainsi photographier au mieux l'intérieur d'une vitrine. Par la même méthode, si la mer est d'huile, les gentils avions américains peuvent repérer les méchants sous-marins soviétiques... et réciproquement ¹².

• Prisme de Nicol.

La figure 5 p. 20, issue de Wikipedia, montre le principe d'un prisme de NICOL ¹³ (on dit couramment « un nicol »). Il est constitué d'un cristal de spath d'Islande (c'est un milieu uniaxe) taillé sous des angles précis, scié en deux en diagonale puis recollé à l'aide de baume du Canada (une térébenthine issue de la résine d'une variété canadienne de sapin, utilisé en optique pour sa transparence et son indice de réfraction proche du verre).

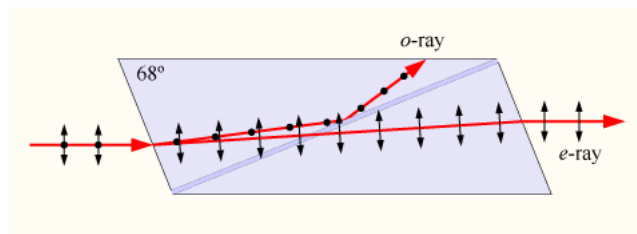


FIGURE 5 – Prisme de Nicol.

Un rayon lumineux qui y pénètre parallèlement aux grands côtés du prisme est séparé en rayon ordinaire, pour lequel l'indice est élevé et qui subit donc une réflexion totale sur le baume du Canada et est éjecté par le côté, et rayon extraordinaire, pour lequel, dans la direction obtenue, l'indice est quasiment celui du baume et qui traverse donc le prisme.

Il est désormais peu utilisé car trop encombrant.

• Filtre polaroïd.

Un filtre polaroïd est une lame à faces parallèles anisotrope ; traversée normalement par une onde électromagnétique, elle possède deux axes orthogonaux à la direction de l'onde et orthogonaux entre eux, tels que les ondes polarisées selon ces axes subissent une propagation exponentiellement amortie, avec deux distances caractéristiques fortement

12. Le lecteur adaptera la position des adjectifs selon ses convictions. Personnellement, je n'ai trouvé aucune qui me satisfait.

13. inventé par William Nicol en 1828.

différentes. On peut alors choisir son épaisseur de façon que l'une des polarisations soit quasiment éteinte et l'autre quasiment inchangée.

D'un point de vue pratique le champ qui sort de la lame est la projection du champ qui y entre sur une direction privilégiée¹⁴ liée à la lame, à un déphasage près dénué de toute pertinence.

La structure de ces lames, protégées par des brevets commerciaux¹⁵, est un peu délicate à obtenir. Il s'agit de molécules linéaires orientées parallèlement¹⁶ les unes aux autres et conductrices, en ce sens que des charges électroniques peuvent circuler dans le sens de leur longueur. Un champ électrique dans la direction des fibres (et pas dans la direction perpendiculaire) mettra les charges en mouvement ce qui provoquera une absorption d'énergie.

Ce type de *polarisateur* est de loin le plus utilisé de nos jours.

Remarque sur l'incohérence : la lumière naturelle est incohérente, après passage à travers un filtre polarisant, la direction de polarisation est imposée, mais la phase continue à varier de façon aléatoire à chaque changement de train d'onde. Nous parlerons des interférences en lumière polarisée dans la partie 4 p. 42.

• Loi de Malus. Repérage des axes d'un polaroïd.

Considérons maintenant un faisceau parallèle traversant successivement deux filtres polarisateurs, le premier de direction privilégiée $\vec{e}_y$, le second dont la direction privilégiée fait avec $\vec{e}_y$ un angle θ et dont le vecteur unitaire est donc $\vec{u} = \cos \theta \vec{e}_y + \sin \theta \vec{e}_z$.

A la sortie du premier polariseur, le champ est, à une phase près :

$$\vec{B}_1 = B_{1m} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_y$$

d'amplitude B_{1m} et donc de puissance surfacique transportée (intensité lumineuse I_1) proportionnelle à B_{1m}^2

A la sortie du second, le champ sera, par projection sur $\vec{u}$:

$$\vec{B}_2 = (\vec{B}_1 \cdot \vec{u}) \vec{u} = B_{1m} \cos \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{u}$$

d'amplitude $B_{2m} = B_{1m} \cos \theta$ et donc d'intensité I_2 proportionnelle à $B_{2m}^2 = B_{1m}^2 \cos^2 \theta$

Nous venons d'établir la loi de MALUS : $I_2 = I_1 \cos^2 \theta$

14. J'ai expliqué plus haut en note pourquoi je travaille avec le vecteur $\vec{B}$; les exposés traditionnels travaillent avec le vecteur $\vec{E}$. La structure de ces filtres (voir un tout petit peu plus loin) montre que $\vec{E}$ est projeté sur la normale à la direction des fibres et $\vec{B}$ sur la direction des fibres.

15. « Polaroid » est une marque déposée.

16. par un champ électrique avant qu'elles ne soient figées dans un substrat.

Remarque 1 : dans nombre d'expériences, on place divers objets entre les deux polariseurs, le premier sert alors à obtenir une polarisation rectiligne, le second à analyser l'effet des objets intercalés sur la lumière polarisée. C'est pourquoi il est d'usage d'appeler *polariseur* le premier et *analyseur* le second.

Remarque 2 : la loi de MALUS permet de retrouver la direction privilégiée d'un polariseur si l'on connaît¹⁷ celle d'un autre ; l'expérience permet instantanément de comprendre qu'il est plus aisé de repérer $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ (il y a alors *extinction* de la lumière) que $\theta = 0$ ou π (éclairage maximum).

Remarque 3 : une curiosité, la polarisation des écrans LCD. Un *cristal liquide* est un état de la matière qui combine des propriétés d'un liquide conventionnel (mobilité des molécules) et celles d'un solide cristallisé (ordre). Ses molécules, de forme allongées, s'ordonnent naturellement de manière parallèle les unes aux autres. Déposées sur une plaque gravée de sillons, les molécules vont s'aligner dans les sillons. Le principe de l'écran LCD consiste à placer des cristaux liquides en sandwich entre deux plaques gravées et orientées à 90° . Les molécules, au repos, vont passer progressivement d'une orientation à l'autre (voir la figure 6 p. 22) en formant une hélice. Le milieu est donc chiral et possède un *pouvoir rotatoire* (cf partie 3 p. 34). L'écran est rétro-éclairé avec une lumière polarisée, en choisissant convenablement l'épaisseur de la couche de cristal liquide la polarisation à la sortie a tourné de 90° et elle passe (sans atténuation) un deuxième filtre polarisant.

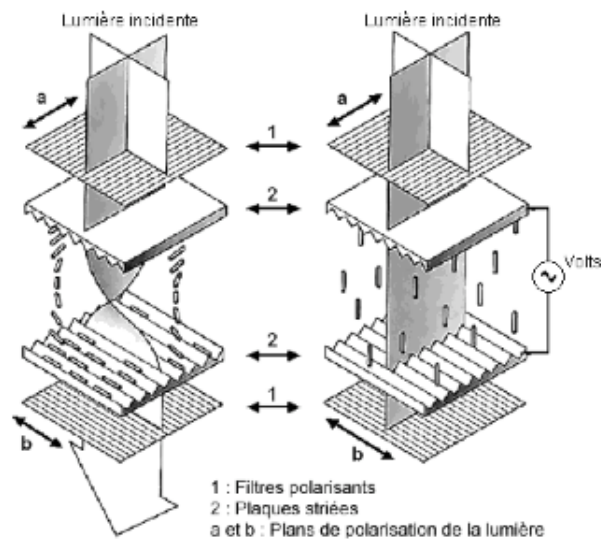


Figure 1 : la modulation de la lumière par les cristaux liquides

FIGURE 6 – Pixel LCD.

Sous l'effet d'une tension de commande, les molécules vont s'orienter dans le sens du

17. La réflexion sous incidence de Brewster donne cette orientation de façon connue.

champ électrique. Le milieu perd son pouvoir rotatoire et la lumière sera bloquée¹⁸ par le deuxième polariseur. N.B. chaque pixel d'un écran LCD est constitué d'une cellule de ce type devant laquelle est placé un filtre rouge, vert, ou bleu.

2.c Action d'une lame biréfringente sur un faisceau parallèle sous incidence normale.

• Généralités.

On considère ici une lame à faces parallèles construite dans un milieu biréfringent et traversé normalement par une onde électromagnétique, elle possède deux axes orthogonaux à la direction de l'onde et orthogonaux entre eux, tels que les ondes polarisées selon ces axes ont des vitesses de phase différentes, notées $\frac{c}{n_1}$ et $\frac{c}{n_2}$. On choisit ces axes comme axes Oy et Oz et on appelle axe lent, celui pour lequel la vitesse est la plus faible, donc l'indice le plus grand, et axe rapide l'autre. On note $x = 0$ et $x = e$ les faces d'entrée et de sortie de la lame.

Si l'onde en $x = 0$ est :

$$\vec{B}(t, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ B_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

avec un déphasage égal à $\varphi_2 - \varphi_1$ entre les deux composantes, l'onde en sortie est :

$$\vec{B}(t, e) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \cos \left[\omega \left(t - \frac{n_1 e}{c} \right) + \varphi_1 \right] \\ B_2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{n_2 e}{c} \right) + \varphi_2 \right] \end{pmatrix}$$

et pour $x > e$:

$$\vec{B}(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \cos \left[\omega \left(t - \frac{n_1 e}{c} - \frac{x-e}{c} \right) + \varphi_1 \right] \\ B_2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{n_2 e}{c} - \frac{x-e}{c} \right) + \varphi_2 \right] \end{pmatrix}$$

avec un déphasage entre les deux composantes égal à :

$$\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{\omega(n_1 - n_2)e}{c} = \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi \frac{(n_1 - n_2)e}{\lambda}$$

c'est-à-dire le déphasage initial augmenté de $\Phi = 2\pi \frac{(n_1 - n_2)e}{\lambda}$. On n'oubliera pas de remarquer que ce déphasage additionnel dépend de la longueur d'onde du faisceau supposé monochromatique.

18. Une mésaventure classique du monde moderne est de croire son téléphone portable hors-service parce qu'on le regarde avec des lunettes polarisantes censées atténuer la lumière polarisée par la diffusion atmosphérique en été ou en altitude.

Puisque le plus important est le déphasage additionnel, on simplifie et on idéalise : on annule l'épaisseur et l'on considère que la lame ajoute un déphasage de Φ entre les composantes du champ. Résumons, s'il entre dans la lame :

$$\vec{B}(t, x < 0) = \begin{vmatrix} 0 \\ B_1 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_1) \\ B_2 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_2) \end{vmatrix}$$

alors il sort de la lame :

$$\vec{B}(t, x > 0) = \begin{vmatrix} 0 \\ B_1 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_1) \\ B_2 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_2 + \Phi) \end{vmatrix}$$

Une approximation a été faite de façon tacite : l'évolution des composantes du champ avec x n'a pas été menée entre $x = 0$ et $x = e$ mais entre $x = 0^+$ et $x = e^-$, c'est-à-dire après avoir pénétré dans la lame d'un côté et avant d'en sortir de l'autre ; on a donc omis de multiplier par les coefficients de transmission. L'approximation est bonne car ces coefficients sont assez proches de 1 et leur produit encore plus : en effet (voir chapitre C-XIII sur les ondes électromagnétiques dans la matière) les coefficients de transmission en entrée et en sortie sont $t_E = \frac{2n}{1+n}$ et $t_S = \frac{2}{1+n}$ et leur produit $t_E t_S = \frac{4n}{(1+n)^2}$, soit, en prenant arbitrairement des valeurs courantes, $n_1 = 1,5$ (axe rapide) et $n_2 = 1,6$ (axe lent), $t_E t_S = 0,960$ sur l'axe rapide et $t_E t_S = 0,947$ sur l'axe lent ; ces coefficients sont presque égaux (à 1% près) et presque égaux à l'unité.

Remarque : on a vu sur la figure 2 p. 15 que la biréfringence d'un milieu uniaxe s'accompagne d'un décalage latéral du faisceau extraordinaire. Pour une lame courante dont le rayon est grand devant l'épaisseur, ce décalage n'est guère sensible et, de toute façon, les plans d'onde sont des plans $x = Cte$ qu'un décalage latéral laisse invariants.

• Lames demi-onde et quart d'onde.

On appelle lame demi-onde une lame dont l'épaisseur est telle que ce déphasage supplémentaire Φ vaut π ; elle a donc une épaisseur $\frac{\lambda}{2(n_1 - n_2)}$.

On appelle lame quart d'onde une lame dont l'épaisseur est telle que ce déphasage supplémentaire Φ vaut $\frac{\pi}{2}$; elle a donc une épaisseur $\frac{\lambda}{4(n_1 - n_2)}$.

L'épaisseur de ces lames dépend de la longueur d'onde ; comprenons qu'une lame n'est demi-onde ou quart d'onde que pour une longueur d'onde donnée (raie jaune du sodium, raie du laser hélium-néon). Il faudra donc les utiliser soit avec une source adaptée, soit avec une lumière convenablement filtrée.

S'il entre dans la lame :

$$\vec{B}(t, x < 0) = \begin{vmatrix} 0 \\ B_1 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_1) \\ B_2 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_2) \end{vmatrix}$$

alors il sort d'une lame demi-onde :

$$\vec{B}(t, x > 0) = \begin{vmatrix} 0 \\ B_1 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_1) \\ B_2 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_2 + \pi) = -B_2 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_2) \end{vmatrix}$$

et d'une lame quart d'onde :

$$\vec{B}(t, x > 0) = \begin{vmatrix} 0 \\ B_1 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_1) \\ B_2 \cos(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}) = -B_2 \sin(\omega (t - \frac{x}{c}) + \varphi_2) \end{vmatrix}$$

Remarque : si l'on confond l'axe lent et l'axe rapide, on change le signe du déphasage additionnel. Pour une lame demi-onde, cela n'a pas d'importance car déphaser de π ou de $-\pi$, c'est bonnet blanc et blanc bonnet. Pour une lame quart d'onde, c'est un peu plus gênant et ça peut entraîner des complications dans son utilisation.

2.d Détermination expérimentale des axes lent et rapide de lames demi-onde ou quart d'onde.

• Action de ces lames sur une lumière polarisée rectilignement.

Considérons une onde polarisée rectilignement selon le vecteur unitaire $\vec{u}$ arrivant sur une lame demi-onde de directions privilégiées $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ et appelons α l'angle que fait $\vec{u}$ avec $\vec{e}_y$. Il entre dans la lame :

$$\begin{aligned} \vec{B}(t, x < 0) &= B_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{u} = \dots \\ \dots &= B_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ B_0 \cos \alpha \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ B_0 \sin \alpha \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Il sort donc de la lame demi-onde :

$$\vec{B}(t, x > 0) = \begin{vmatrix} 0 \\ B_0 \cos \alpha \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ B_0 \sin \alpha \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \pi \right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ B_0 \cos \alpha \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ -B_0 \sin \alpha \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \end{vmatrix}$$

soit :

$$\vec{B}(t, x > 0) = B_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{vmatrix} = B_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{u}'$$

On reconnaît une onde polarisée rectilignement dans la direction du vecteur $\vec{u}'$, symétrique de $\vec{u}$ par rapport à Oy (et aussi par rapport à Oz , puisque la direction est aussi donnée par $-\vec{u}'$).

Il est bon de mémoriser ce résultat et de savoir le représenter sur une figure (que le lecteur est invité à dessiner lui-même).

La même onde arrivant sur une lame quart d'onde donnerait en sortie : Il sort donc de la lame demi-onde :

$$\vec{B}(t, x > 0) = \begin{vmatrix} 0 \\ B_0 \cos \alpha \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ B_0 \sin \alpha \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ B_0 \cos \alpha \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ -B_0 \sin \alpha \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \end{vmatrix}$$

Là, il s'agit d'une onde polarisée elliptiquement et l'on connaît les directions des axes (il s'agit de Oy et Oz), les demi-axes ($B_0 |\cos \alpha|$ et $B_0 |\sin \alpha|$) et les sens de parcours selon les valeurs de α .

Remarque : si $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ alors $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'onde est polarisée circulairement.

• Détermination des axes.

Sur un banc éclairé en lumière parallèle par une source de la bonne longueur d'onde au foyer-objet d'une lentille convergente, on place un polariseur P de direction privilégiée connue et choisie comme axe Oy , il en sort une onde polarisée rectilignement selon Oy ; on place ensuite un second polariseur qui fera office d'analyseur A qu'on tourne jusqu'à l'extinction de la lumière qui en sort; son axe privilégié est alors orthogonal à la polarisation de l'onde, c'est donc Oz .

Sans plus toucher ni à P ni à A, on intercale entre eux une lame demi-onde D dont l'axe lent (par exemple) fait avec Oy un angle β inconnu; il en sort (cf supra) une onde polarisée rectilignement dans la direction 2β qui n'est pas a priori orthogonale à Oz et l'extinction n'a plus lieu. Pour la rétablir, on tourne la lame demi-onde et l'extinction s'obtient lorsque $2\beta = k\pi$ où k est entier, soit $\beta = k\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à quatre positions distantes de 90° . Dans ces positions, les axes lent et rapide de la lame sont parallèles aux axes privilégiés des deux polariseurs. Les directions des axes lent et rapide sont désormais connus mais on ne sait pas lequel est le lent et lequel le rapide mais on a vu plus haut que c'est de peu d'importance.

Si l'on reprend l'expérience mais en intercalant entre polariseurs croisés une lame quart d'onde Q dont l'axe lent (par exemple) fait avec Oy un angle β inconnu; il en sort (cf supra) une onde polarisée elliptiquement dont le vecteur se projette en une composante variant de façon alternative sur l'analyseur : l'extinction est supprimée, sauf peut-être dans le cas où l'ellipse est dégénérée en segment ce qui correspond là-encore $\beta = k\frac{\pi}{2}$ et l'étude de ces cas particuliers, très aisée, retrouve l'extinction. On arrive donc à la même conclusion qu'avec la demi-onde avec la même ambiguïté.

- **Détermination de l'axe lent d'une lame quart d'onde.**

Si l'on dispose d'une lame quart d'onde de référence, on peut trouver l'axe lent et l'axe rapide d'une autre après en avoir repéré les axes à une permutation près. Il suffit de faire traverser les deux lames, dont on aura aligné les axes, successivement par un même faisceau. Si l'on a aligné l'axe lent de la première avec l'axe lent de la seconde, les déphasages supplémentaires de $\frac{\pi}{2}$ s'ajoutent et l'on obtient une lame demi-onde ; sinon ils se retranchent et l'on obtient une lame qui ne fait rien. L'action sur une polarisation rectiligne à 45° des axes, sera déterminante : dans le premier car elle ressort symétriquement, dans le second inchangé.

Pour la lame de référence, on peut utiliser, par exemple, un spath d'Islande dont les cristaux ont extérieurement une forme liée à leur structure cristalline et dont les plans de clivage sont orientés de façon connue par rapport aux axes lent et rapide.

2.e Obtention d'une lumière polarisée elliptiquement.

Il s'agit de créer une onde polarisée elliptiquement dont on s'impose les directions d'axe et le rapport $\frac{b}{a}$ du grand et du petit axe.

La réponse est écrite noir sur blanc un peu plus haut. On prend une lame quart d'onde dont on connaît les axes, à une permutation lent-rapide près, et on les place dans les directions souhaitées pour le grand axe (choisi ici pour Oy) et le petit axe (Oz donc) ; on intercale entre la source et la lame un polariseur dont la direction privilégiée est connue et on impose l'angle α qu'elle fait avec Oy de sorte que le rapport entre $B_0 \cos \alpha$ selon Oy et $B_0 |\sin \alpha|$ selon Oz (cf supra) soit le bon, ce qui impose $\tan \alpha = \pm \frac{b}{a}$. Si l'on impose pas d'avoir une onde directe ou indirecte peu importe de savoir quel est l'axe lent.

Dans le cas particulier où l'on veut obtenir une polarisation circulaire, on prend (cf supra) $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$

2.f Analyse d'une vibration a priori elliptique.

Il s'agit du problème inverse de celui du paragraphe précédent : trouver les directions des axes d'une polarisation elliptique et le rapport du grand et du petit axe.

- **Recherche des axes.**

Si l'on fait traverser un polariseur (utilisé en analyseur) par le faisceau à étudier, on projette sur la direction de l'analyseur un vecteur qui décrit une ellipse et l'on obtient un segment qui sera de taille maximale si la direction privilégiée de l'analyseur est parallèle au grand axe et de taille minimale si elle est parallèle au petit. La figure 7 p. 28 montre le principe de cette projection (en rouge) sur une direction arbitraire avec une position quelconque du vecteur à projeter et les deux positions extrêmes.

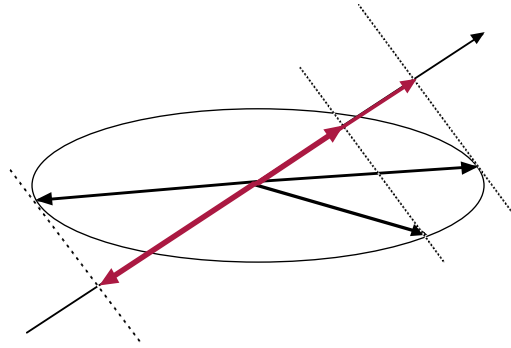


FIGURE 7 – Action d'un polariseur sur une polarisation elliptique.

On peut ainsi, en tournant l'analyseur jusqu'à l'éclairement minimum, trouver le petit axe de l'ellipse. Le grand axe lui est orthogonal.

Remarque 1 : Au voisinage d'un extremum, les fonctions varient peu et la méthode est de peu de précision (de l'ordre du degré). On verra un peu plus loin des méthodes plus précises.

Remarque 2 : si le minimum est une extinction (minimum nul), la polarisation à analyser est rectiligne dans la direction orthogonale à l'analyseur à l'extinction.

Remarque 3 : si la rotation de l'analyseur ne provoque aucune variation, c'est que la polarisation est circulaire à moins qu'il ne s'agisse de lumière naturelle de polarisation fluctuante à un rythme trop rapide pour être décelé. Pour lever l'incertitude, il suffit de faire traverser une lame quart d'onde par le faisceau ; s'il s'agit de lumière naturelle, la fluctuation persiste et rien ne change, mais s'il s'agit d'une polarisation circulaire, elle devient rectiligne, ce qui est aisé à vérifier avec l'analyseur.

• Recherche du rapport entre les axes.

En prenant l'axe de l'analyseur à l'éclairement minimum, confondu (cf supra) avec le petit axe de l'ellipse, comme axe Oz , l'onde à analyser est de la forme :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ b \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \end{pmatrix}$$

avec $b < a$.

Si l'on intercale une lame quart d'onde sur le chemin du faisceau à analyser avant l'analyseur, en orientant ses axes lent et rapide de sorte que l'un soit parallèle à Oy et l'autre à Oz , il ressort l'onde :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \begin{vmatrix} 0 \\ a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ b \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \pm \frac{\pi}{2} \right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ a \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \\ \pm b \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \end{vmatrix} = \dots \\ &\dots = \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \begin{vmatrix} 0 \\ a \\ \pm b \end{vmatrix} = \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{v}\end{aligned}$$

qui est une polarisation rectiligne dans la direction du vecteur $\vec{v}$. Il suffit alors de tourner l'analyseur (à partir de Oz sa position précédente) de façon que son axe privilégié soit orthogonal à $\vec{v}$ pour obtenir l'extinction ; il est aisé de se convaincre qu'il faut le tourner, dans un sens ou dans l'autre, d'un angle $\theta < \frac{\pi}{4}$ tel que $\tan \theta = \frac{b}{a}$, et la mesure de θ donne accès au rapport $\frac{b}{a}$ recherché.

2.g Analyseur à pénombre.

Dans ce dispositif, une onde plane monochromatique se propage selon Ox et traverse successivement :

- un polariseur dont l'axe privilégié fait un petit angle α (de l'ordre du degré) avec Oy défini ci-après.
- une lame demi-onde (pour la longueur d'onde utilisée) dont les axes lent et rapide sont Oy et Oz et qui ne couvre que la moitié du faisceau (disons $z > 0$) et donc l'autre moitié du faisceau ne traverse rien à cet endroit.
- un analyseur dont l'axe privilégié fait un angle β avec Oz , angle qui peut varier de $-\pi$ à $+\pi$

Dans le plan yOz , appelons $\vec{u}$ le vecteur unitaire qui fait avec $\vec{e}_y$ l'angle α , $\vec{v}$ son symétrique par rapport à Oy et $\vec{w}$ le vecteur unitaire qui fait avec $\vec{e}_z$ l'angle β .

Il sort du polariseur une onde¹⁹ en $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t^*) \vec{u}$ où l'on note $t^* = t - \frac{x}{c}$. Pour la partie du faisceau qui traverse la lame demi-onde, on sait que le champ est transformé en son symétrique par rapport aux axes privilégiés de la demi-onde, soit $\vec{E}_2 = E_0 \cos(\omega t^*) \vec{v}$ (voir figure 8 p. 30).

A la sortie de l'analyseur, on observe dans les deux moitiés du faisceau les projections des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sur $\vec{w}$ (voir figure 8 p. 30), soit respectivement

$$\begin{aligned}\vec{E}_3 &= (\vec{E}_1 \cdot \vec{w}) \vec{w} = E_0 \cos(\omega t^*) (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{w} \\ &= E_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha \right) \cos(\omega t^*) \vec{w} = E_0 \sin(\beta - \alpha) \cos(\omega t^*) \vec{w}\end{aligned}$$

19. Par lassitude, on revient à l'exposé traditionnel qui privilégie — à tort — le champ électrique.

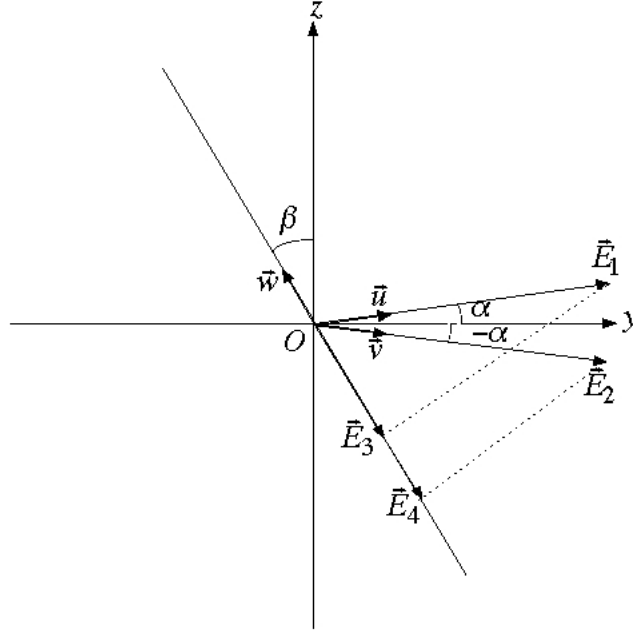


FIGURE 8 – Direction des polarisations.

$$\begin{aligned}\vec{E}_4 &= (\vec{E}_2 \cdot \vec{w}) \vec{w} = E_0 \cos(\omega t^*) (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{w} \\ &= E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta + \alpha\right) \cos(\omega t^*) \vec{w} = E_0 \sin(\beta + \alpha) \cos(\omega t^*) \vec{w}\end{aligned}$$

dont les intensités²⁰ sont les carrés des amplitudes, soit, en notant $\mathcal{I}_0 = E_0^2$

$$\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_0 \sin^2(\beta - \alpha) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_4 = \mathcal{I}_0 \sin^2(\beta + \alpha)$$

On voit sur le graphe (voir figure 9 p. 31 où l'on a décuplé la valeur de α pour une meilleure lisibilité) que $\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_4$ pour $\beta = 0, \pm\pi/2$ et π . On se convainc du reste sur la figure 8 p. 30 que $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$, ont des projections de même module sur $\vec{w}$ uniquement si $\vec{w}$ est porté par Oy ou Oz .

Pour $\beta = \pm\pi/2$, les éclaircissements sont maximums, l'œil est ébloui et sature, ce qui ne permet pas une estimation correcte de l'égalité des éclaircissements. Au contraire au voisinage de $\beta = 0$ (ou π), en tournant l'analyseur de 2α (environ deux degrés) on passe de la plage gauche obscure et la plage droite grise ($\beta = -\alpha$) à l'inverse ($\beta = \alpha$), l'égalité des éclaircissements se remarquant par la disparition du diamètre séparant les deux plages (voir figure 10 p. 31)

20. Il s'agit de la moyenne temporelle de la norme du vecteur $\vec{II}$, égale à la puissance surfacique transportée, elle-même proportionnelle au carré de l'amplitude. Par convention, on assimile la constante de proportionnalité à l'unité pour simplifier l'exposé.

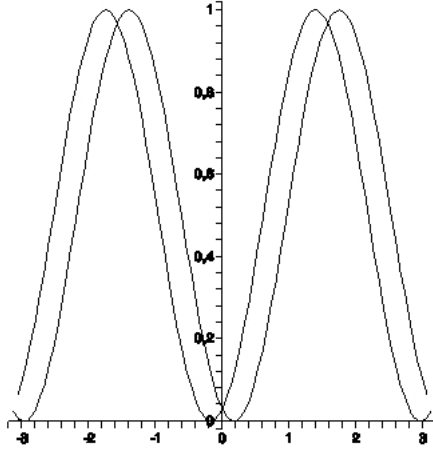


FIGURE 9 – Intensités.

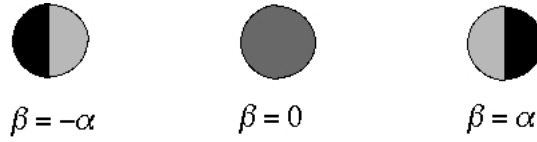


FIGURE 10 – Dans l'oculaire.

Dans cette plage, α et β sont suffisamment petits pour que l'on puisse confondre les sinus et leurs arguments, donc (voir figure 11 p. 32) :

$$\mathcal{I}_3 \approx \mathcal{I}_0 (\alpha - \beta)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_4 \approx \mathcal{I}_0 (\alpha + \beta)^2$$

On définit le contraste par

$$\gamma = \frac{\mathcal{I}_{sup} - \mathcal{I}_{inf}}{\mathcal{I}_{sup} + \mathcal{I}_{inf}}$$

où, compte tenu que β peut être négatif

$$\mathcal{I}_{sup} \approx \mathcal{I}_0 (\alpha + |\beta|)^2$$

$$\mathcal{I}_{inf} \approx \mathcal{I}_0 (\alpha - |\beta|)^2$$

$$\gamma \approx \frac{2\alpha|\beta|}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Or l'œil ne distingue plus rien en dessous d'un contraste 0,01. La figure 11 p. 32 montre que près de l'égalité, $|\beta| \ll \alpha$, on peut donc se contenter d'une approximation correcte du

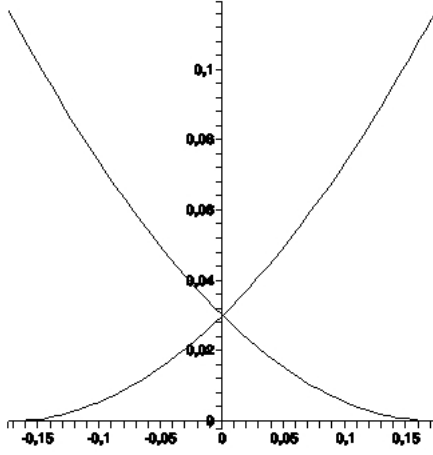


FIGURE 11 – Intensités (zoom).

contraste en y négligeant β^2 devant α^2 . L'œil considère donc les éclaircissement égaux si

$$\frac{2\alpha|\beta|}{\alpha^2} = \frac{2|\beta|}{\alpha} < 0,01 \quad \text{soit} \quad |\beta| < \frac{\alpha}{200}$$

c'est-à-dire que le réglage de l'appareil sur $\beta = 0$ se fait à une précision du deux-centième de degré (rappelons que α est de l'ordre du degré) ; c'est là son intérêt par rapport à un simple couple polariseur-analyseur, où l'extinction s'apprécie expérimentalement à guère mieux que le degré : le polarimètre à pénombre est plus de cent fois plus précis.

Il permet, dans cette version simple, de repérer avec précision l'axe privilégié de l'analyseur. On verra (partie 3 p. 34), dans la version de LAURENT, son utilisation dans l'étude des milieux chiraux.

2.h Analyseur à quadrants.

Si l'on remplace, dans l'analyseur à pénombre du chapitre précédent, l'onde polarisée rectilignement selon le vecteur $\vec{u}$ par une onde polarisée elliptiquement avec un grand axe selon $\vec{u}$ et un petit axe négligeable mais non nul, alors pour $\beta = 0$, par symétrie, les deux plages seront de même éclaircissement ; c'est dire qu'il n'y a aucun moyen de vérifier que l'onde est bien polarisée rectilignement et non elliptiquement avec une ellipse très allongée. Ceci est très gênant pour l'analyse d'une onde polarisée elliptiquement car on a vu plus haut qu'après en avoir trouvé les axes, une lame quart d'onde, correctement, orientée la transforme en onde polarisée rectilignement ; or la méthode évoquée plus haut ne permet pas l'orientation de la lame quart d'onde à mieux qu'un degré.

Imaginons donc que l'onde qui arrive sur la lame demi-onde de l'analyseur à pénombre soit en $a \cos(\omega t) \vec{u} + b \sin(\omega t) \vec{U}$ avec b petit devant a et $\vec{U}$ directement perpendiculaire à $\vec{u}$, après la traversée de la lame sur la moitié du faisceau concernée, on trouve une onde en $a \cos(\omega t) \vec{v} + b \sin(\omega t) \vec{V}$ avec $\vec{v}$ et $\vec{V}$ symétriques de $\vec{u}$ et $\vec{U}$ par rapport à Oy . Leur projection sur l'analyseur, pour $\beta = 0$, sont, par symétrie, de même intensité qui comportera un terme en a^2 , un terme en b^2 mais pas de terme en ab car la moyenne temporelle du produit $\cos(\omega t) \sin(\omega t)$ est nulle. Le terme en b^2 est difficile²¹ à mettre en évidence.

Modifions légèrement le dispositif de façon à permuter le rôle de α et β ; cette fois c'est β qui est fixé à une petite valeur de l'ordre du degré et c'est alors pour $\alpha = 0$ que les éclairagements sont égaux. $\vec{u}$ et $\vec{U}$ se confondent alors à $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ et les deux ondes sont respectivement en :

$$\begin{cases} a \cos(\omega t) \vec{e}_y + b \sin(\omega t) \vec{e}_z \\ a \cos(\omega t) \vec{e}_y - b \sin(\omega t) \vec{e}_z \end{cases}$$

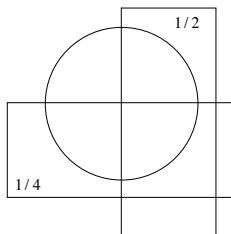


FIGURE 12 – Analyseur à quadrants.

Occultons une nouvelle fois une moitié du faisceau par une deuxième lame quart d'onde cette fois (la première était demi-onde), de mêmes axes Oy et Oz et dans le sens haut-bas au lieu de droite-gauche (comme sur la figure 12 p. 33) ; avec les règles du jeu de cette nouvelle lame (déphasage de $\frac{\pi}{2}$ qui transforme les sinus en cosinus), les nouvelles plages ainsi créées correspondent à des ondes en :

$$\begin{cases} a \cos(\omega t) \vec{e}_y + b \cos(\omega t) \vec{e}_z = (a \vec{e}_y + b \vec{e}_z) \cos(\omega t) \\ a \cos(\omega t) \vec{e}_y - b \cos(\omega t) \vec{e}_z = (a \vec{e}_y - b \vec{e}_z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

et il n'est pas besoin de calculs pour se rendre compte que ces deux nouvelles plages ne peuvent avoir le même éclairage que si $b = 0$ (on rappelle que β est désormais fixe et non nul) et qu'alors les quatre plages auront même éclairage.

21. Attention ce n'est pas si simple qu'il n'y paraît car le terme en a se projette avec un $\sin \beta \approx \beta$ et le terme en b en $\cos \beta \approx 1$. Or par construction, β est de l'ordre du degré, soit du centième de radian et le rapport $\frac{b}{a}$, dû à une erreur d'orientation de l'ordre du degré, est du même ordre de grandeur. Donc $a \sin \beta$ et $b \cos \beta$ vont être voisins ; en gros l'éclairage (à la pénombre) sera deux fois plus grand que prévu mais ce ne sera pas perceptible car l'œil s'adaptera en fermant un peu l'iris.

Dans la pratique, on aura une lame quart d'onde juste après l'onde à analyser puis un ensemble d'une demi-onde et d'une quart d'onde, de mêmes axes, couvrant de façon croisée la moitié du faisceau, associées à un analyseur dont l'axe est à un petit angle β des précédents. En jouant alternativement sur l'orientation de la première quart d'onde et sur celle de l'ensemble, on finit par arriver à l'égalité des éclairagements des quatre quadrants et on est alors sûr, à une très bonne précision, que les axes de la quart d'onde initiale sont ceux de l'onde à analyser.

3 Milieux chiraux.

3.a Propriété essentielle des milieux chiraux.

Un milieu chiral²² est un milieu qui n'est pas invariant dans une symétrie par rapport à un plan. Il peut s'agir d'une structure cristalline particulière ou d'un milieu non cristallin dont les molécules sont elles-mêmes chirales.

Par ailleurs le symétrique²³ d'une onde polarisée rectilignement par rapport à un plan ne change pas la nature de cette polarisation qui n'est donc pas chirale ; par contre une onde polarisée circulairement devient indirecte si elle est directe et vice versa ; elle est donc chirale.

Dans un milieu chiral, la décomposition d'une onde quelconque en deux ondes polarisées rectilignement cesse donc d'être pertinente au profit d'une décomposition en deux ondes polarisées circulairement dans les deux sens et il est vraisemblable que les ondes circulaires directes et indirectes aient des propriétés différentes ; en particulier leur vitesse de propagation.

Nous noterons les choses ainsi : les ondes planes progressives de direction Ox se propagent à la vitesse $v_1 = \frac{c}{n_1}$ si elles sont polarisées circulairement dans le sens direct et à la vitesse $v_2 = \frac{c}{n_2}$ si elles sont polarisées circulairement dans le sens indirect. Il s'agit du modèle cinématique de FRESNEL.

3.b Propagation d'une onde localement rectiligne dans un milieu chiral.

Supposons qu'en $x = 0$, le champ électrique d'une onde plane se propageant dans la direction de Ox soit : $E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$.

Cette onde, polarisée rectilignement de façon locale, peut être considérée comme somme

22. On prononce « kiral ». Etymologiquement ça provient du grec « kheir » (la main, qui est chirale), cf chiropracteur (qui soigne avec ses mains), chiroptère (aile-main, chauve-souris donc) et chiromancien (qui lui l'avenir dans les lignes de la main).

23. Le champ magnétique se change, comme il se doit, en l'opposé du symétrique

d'une circulaire directe et d'une indirecte, en effet

$$\vec{E}(0, t) = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{2} \cos(\omega t) \\ \frac{E_0}{2} \sin(\omega t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{2} \cos(\omega t) \\ -\frac{E_0}{2} \sin(\omega t) \end{vmatrix}$$

Chacun des deux termes est la valeur en $x = 0$ d'une onde en $\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = \omega \left(t - \frac{nx}{c}\right)$ où n désigne respectivement n_1 ou n_2 ; on a donc en une abscisse x :

$$\vec{E}(x, t) = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{n_1 x}{c}\right) \right] \\ \frac{E_0}{2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{n_1 x}{c}\right) \right] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{n_2 x}{c}\right) \right] \\ -\frac{E_0}{2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{n_2 x}{c}\right) \right] \end{vmatrix}$$

soit, puisqu'on assure²⁴ en trigonométrie, en notant respectivement $n_m = \frac{n_1 + n_2}{2}$ et $\Delta n = \frac{n_2 - n_1}{2}$:

$$\vec{E}(x, t) = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos \left(\omega \frac{\Delta n x}{c} \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{n_m x}{c}\right) \right] \\ E_0 \sin \left(\omega \frac{\Delta n x}{c} \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{n_m x}{c}\right) \right] \end{vmatrix} = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{n_m x}{c}\right) \right] \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \left(\omega \frac{\Delta n x}{c} \right) \\ \sin \left(\omega \frac{\Delta n x}{c} \right) \end{vmatrix}$$

où la dernière formulation prouve que $\vec{E}(x, t)$ a une direction indépendante du temps mais dépendante de l'abscisse (on parle alors de *polarisation localement rectiligne*) qui fait dans le plan yOz un angle $\alpha(x) = \omega \frac{\Delta n x}{c}$ avec $\vec{E}(0, t)$, proportionnel à la distance x parcourue. C'est ce qu'on appelle le *pouvoir rotatoire*.

3.c Polarimètre de Laurent : théorie et exemple d'application.

• Théorie.

Si dans un analyseur à pénombre (cf paragraphe 2.h p. 32) réglé à l'égalité d'éclairement des plages, on intercale après entre le polariseur et la lame demi-onde d'une part et l'analyseur d'autre part, les avoir écartés, un milieu optiquement actif sur une longueur ℓ , les polarisations rectilignes des deux demi-faisceaux tournent d'un même angle $\alpha(\ell)$ (cf supra) et il n'est pas sorcier d'en déduire qu'on retrouvera l'égalité d'éclairement des plages en tournant l'analyseur d'un même angle $\alpha(\ell)$. On a ainsi réalisé un polarimètre de LAURENT qui mesure, avec la précision de l'analyseur à pénombre, le pouvoir rotatoire.

²⁴. grave

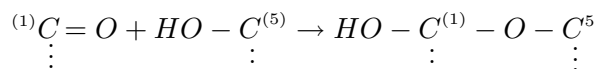
• **Mutarotation de l' α -D-glucopyranose.**

Cet exemple pour rappeler que nos amis chimistes nous sont chers.

On vient de voir que l'angle dont tourne la polarisation rectiligne est proportionnel à la longueur parcourue et on admet la loi de BIOT qui affirme que la constante de proportionnalité est une combinaison linéaire (de coefficients traditionnellement notés entre crochets $[a_i]$) des concentrations c_i en solutés optiquement actifs, soit

$$\alpha = \left(\sum [a_i] c_i \right) \ell$$

Le D-glucose, sur une chaîne carbonée linéaire à six carbones, possède un groupement carbonyle en C_1 et un groupement hydroxyle sur chacun des autres carbones. La libre rotation des liaisons sigma amène facilement le groupement carboxyle de C_1 à proximité de l'hydroxyle en C_5 ce qui permet une réaction d'hémi-acétalisation intramoléculaire sur le schéma



dont vous trouverez le mécanisme dans tout bon cours de chimie. Selon que le groupement hydroxyle en C_1 se retrouve en position axiale ou équatoriale, on obtient du α -D-glucopyranose ou du β -D-glucopyranose. Chacune de ces formes s'ouvre facilement, passe par la forme linéaire (qui fait office d'intermédiaire réactionnel minoritaire) et peut se recycler dans l'une ou l'autre forme selon de la figue 13 p. 36.

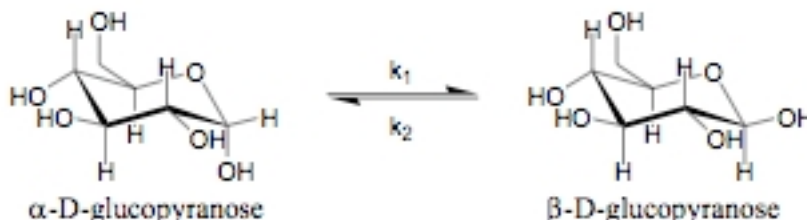
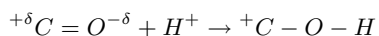


FIGURE 13 – α - et β -D-glucopyranose.

Expérimentalement, les deux cinétiques directe et inverse sont d'ordre 1 *en milieu tamponné*²⁵ et l'on note k_1 et k_2 les constantes de vitesse.

25. Les réactions sont vraisemblablement aussi d'ordre 1 en $[H_3O^+]$ et l'ordre total est normalement 2, dégénéré en ordre 1 en milieu tampon. On soupçonne une première étape réactionnelle en



Si à l'instant $t = 0$, on dissout très rapidement du α -D-glucopyranose solide et stable sous cette forme ; la réaction de « mutarotation » commence instantanément. Comment varient avec le temps les concentrations des deux formes ? l'angle de rotation de la polarisation ? C'est ce que nous allons voir.

On va noter tout naturellement $[\alpha]$ et $[\beta]$ les concentrations des deux formes et C_0 la concentration initiale en forme α . Les vitesses algébriques de formation des deux espèces résultent de la contribution des deux réactions, soit

$$\begin{aligned}\frac{d[\alpha]}{dt} &= \left. \frac{d[\alpha]}{dt} \right|_1 + \left. \frac{d[\alpha]}{dt} \right|_2 = -k_1 [\alpha] + k_2 [\beta] \\ \frac{d[\beta]}{dt} &= \left. \frac{d[\beta]}{dt} \right|_1 + \left. \frac{d[\beta]}{dt} \right|_2 = +k_1 [\alpha] - k_2 [\beta]\end{aligned}$$

Il saute aux yeux, par addition que la somme des concentrations reste constante, ce qui est chimiquement évident si l'on néglige l'intermédiaire linéaire, et égale à la concentration initiale en forme α , donc

$$[\alpha] + [\beta] = C_0 \quad \text{soit} \quad [\alpha] = C_0 - [\beta]$$

que l'on reporte dans la seconde équation différentielle :

$$\frac{d[\beta]}{dt} = k_1 (C_0 - [\beta]) - k_2 [\beta] = k_1 C_0 - (k_1 + k_2) [\beta]$$

Compte tenu de la condition initiale (pas de forme β), la solution est :

$$[\beta] = \frac{k_1 C_0}{k_1 + k_2} - \frac{k_1 C_0}{k_1 + k_2} \exp[-(k_1 + k_2) t]$$

d'où

$$[\alpha] = C_0 - [\beta] = \frac{k_2 C_0}{k_1 + k_2} + \frac{k_1 C_0}{k_1 + k_2} \exp[-(k_1 + k_2) t]$$

et, en notant φ l'angle de rotation pour éviter les confusions avec la forme α

$$\varphi = (a_1 [\alpha] + a_2 [\beta]) \ell = \left(\frac{a_1 k_2 + a_2 k_1}{k_1 + k_2} + \frac{(a_1 - a_2) k_1}{k_1 + k_2} \exp[-(k_1 + k_2) t] \right) C_0 \ell$$

où l'on reconnaît bien sûr

$$\varphi(t) = \varphi_\infty + (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Remarque : on aurait pu, bien sûr, calculer directement φ_∞ , ainsi :

$$0 = \frac{d[\alpha]}{dt} = -k_1 [\alpha]_\infty + k_2 [\beta]_\infty = -k_1 [\alpha]_\infty + k_2 (C_0 - [\alpha]_\infty)$$

d'où $[\alpha]_\infty$, donc $[\beta]_\infty$, C_∞ et φ_∞ ; l'affirmation sans calcul du résultat concernant $\varphi(t)$ est licite puisque l'équation différentielle à résoudre est d'ordre 1.

En pratique l'instant $t = 0$ est difficile à apprécier mais la méconnaissance de l'instant initial n'est pas un réel problème. Imaginons en effet que l'on ait déclenché le chronomètre à $t_i \neq 0$ et donc que l'on mesure en fait $t^* = t - t_i$. On a d'une part

$$\varphi_i = \varphi(t_i) = \varphi_\infty + (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp\left(-\frac{t_i}{\tau}\right)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_\infty + (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp\left(-\frac{t_i + t^*}{\tau}\right) = \\ &\varphi_\infty + (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp\left(-\frac{t_i}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t^*}{\tau}\right) = \varphi_i + (\varphi_0 - \varphi_i) \exp\left(-\frac{t^*}{\tau}\right) \end{aligned}$$

qui finalement a la même forme que la loi initialement trouvée.

Par ailleurs la cinétique est très lente il est difficile de savoir si l'on a vraiment atteint la valeur limite à une bonne approximation (on ne peut atteindre φ_∞ car il faudrait une éternité²⁶). On peut toutefois trouver la valeur de φ_∞ (et aussi celle de τ) en mesurant φ à intervalles réguliers.

En effet, notons T l'intervalle entre deux mesures et φ_n l'angle mesuré au temps nT ; on a

$$\varphi_n = \varphi_\infty + (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp\left(-\frac{nT}{\tau}\right)$$

et aussi

$$\varphi_{n-1} = \varphi_\infty + (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp\left(-\frac{nT - T}{\tau}\right)$$

d'où

$$\varphi_{n-1} - \varphi_n = (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp\left(-\frac{nT}{\tau}\right) \left[\exp\left(\frac{T}{\tau}\right) - 1 \right]$$

de même

$$\varphi_n - \varphi_{n+1} = (\varphi_0 - \varphi_\infty) \exp\left(-\frac{nT + T}{\tau}\right) \left[\exp\left(\frac{T}{\tau}\right) - 1 \right]$$

et enfin

$$\frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{\varphi_n - \varphi_{n+1}} = \exp\left(\frac{T}{\tau}\right)$$

La constance de ce rapport valide l'hypothèse de l'ordre 1, permet le calcul de τ , puis en reportant dans l'expression de φ_1 de calculer φ_∞ ; il sera aisé d'en déduire k_1 et k_2 .

26. L'éternité, c'est long, surtout vers la fin. Woody Allen.

3.d Origine du pouvoir rotatoire.

On a vu dans le chapitre C-XII consacré à l'électromagnétisme qu'un milieu linéaire a, pour des raisons énergétiques, une matrice symétrique et une telle matrice traduit des propriétés invariantes par une symétrie plan. Il faut donc sortir du cadre de la linéarité au sens strict pour rendre compte de la chiralité.

Imaginons une molécule chirale et deux de ses liaisons polarisables, l'une centrée sur un point A l'autre sur un point B . En premier effet, la première liaison acquiert un moment dipolaire proportionnel au champ électrique au point A et la seconde un moment dipolaire proportionnel au champ électrique au point B ; à ce premier effet s'ajoute un second car la première liaison se comporte comme un dipôle placé en A et crée un champ supplémentaire en B qui va modifier la polarisation de la seconde liaison et vice versa. Le champ en A va donc influencer indirectement sur la liaison en B et vice versa.

En généralisant, la polarisation en un point ne dépend pas uniquement du champ électrique en ce point mais aussi du champ électrique des points voisins (uniquement des voisins, car le champ dipolaire décroît rapidement avec la distance).

Evitons d'introduire des tenseurs pour rendre la lecture aisée et pour cela intéressons-nous à une composante du vecteur $\vec{D}$. Au lieu d'écrire une linéarité stricte de la forme $D_1(M) = \sum_i A_i E_i(M)$ (les indices 1, 2 et 3 remplacent ici x , y et z), on écrira :

$$D_1(M) = \iiint_{\Omega_M} \sum_i a_i(P) E_i(P) d_3P$$

où Ω_M est un volume restreint centré sur M et où $a_i(P)$ est une fonction caractéristique de la molécule étudiée.

Puisque le domaine d'intégration est restreint, on peut remplacer le champ à intégrer par un développement limité à l'ordre un (à trois variables) mais pas les fonctions a_i qui sont forcément rapidement variables car elles décrivent la structure complexe de la molécule chirale. Pour la lisibilité, prenons le point M comme origine (on notera donc O). On part de :

$$E_i(P) = E_i(O) + \sum_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} x_j$$

où les dérivées partielles sont calculées en O donc constantes vis-à-vis de l'intégration. Reportons dans l'expression de $D_1(O)$ en notant :

$$A_i = \iiint_{\Omega_M} a_i(P) d_3P \quad \text{et} \quad B_{ij} = \iiint_{\Omega_M} a_i(P) x_j d_3P$$

On arrive à

$$D_1(O) = \sum_i A_i E_i(O) + \sum_i \sum_j B_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j}$$

On reconnaît dans la première somme l'expression linéaire classique liant $\vec{D}$ à $\vec{E}$; on a vu qu'elle ne peut rendre compte de la chiralité et celle-ci se cache donc dans la seconde somme, une somme double gérée par la matrice de B_{ij} . Si nous décomposons, de façon classique²⁷, cette matrice en somme d'une matrice symétrique (invariante par symétrie par rapport à un plan) et d'une matrice anti-symétrique G , la chiralité se logera dans la matrice G .

En revenant aux notations classiques, on aura, par exemple :

$$D_x = \dots + G_{xy} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + G_{yz} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + G_{zx} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

où les pointillés représentent des termes non chiraux.

Une étude réellement sérieuse se doit de passer par les tenseurs pour affiner ces considérations trop intuitives, aussi ne poursuivrons-nous pas plus loin en nous rabattant sur un modèle proposé par Paul DRUDE²⁸ qui, par son analogie²⁹ avec cette dernière remarque, donnera, avec des calculs plus simples, des résultats qui doivent être qualitativement identiques. En se rapprochant de la forme standard d'écriture de la relation entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$, ce modèle part de la relation :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left(n^2 \vec{E} + g \text{rot } \vec{E} \right)$$

3.e Etude du modèle de Drude.

Avec le contexte général de ce chapitre et les considérations déjà évoquées plus haut, et en tenant compte de la loi proposée, on a :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} = 0 \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \left(n^2 \vec{E} + g \text{rot } \vec{E} \right) \end{cases}$$

Pour une onde plane progressive sinusoïdale en $\vec{E}^* \exp i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} \right)$, en ne dé-

27. Si M est une matrice carrée et ${}^t M$ sa transposée, en notant $S = \frac{1}{2} (M + {}^t M)$, qui est manifestement symétrique et $A = \frac{1}{2} (M - {}^t M)$, qui est manifestement antisymétrique, on a bien $M = S + A$

28. Une seule de mes sources attribue ce modèle à Paul Drude, physicien allemand de la seconde moitié du XIX^e siècle. On prononce en gros « droudeux », avec accent tonique sur le « ou ».

29. $\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)$, entre autres, rappelle furieusement une composante d'un rotationnel.

taillant plus ce qui l'a été plus haut, on en déduit, après simplifications :

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{B}^* = 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{E}^* = \omega \vec{B}^* \\ \vec{k} \cdot \vec{D}^* = 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{B}^* = -\mu_0 \omega \vec{D}^* \\ \vec{D}^* = \varepsilon_0 \left(n^2 \vec{E}^* - i g \vec{k} \wedge \vec{E}^* \right) \end{cases}$$

On retrouve encore la structure trirectangle directe entre $\vec{k}$, $\vec{D}^*$ et $\vec{B}^*$, mais le début de l'étude du pouvoir rotatoire n'incite pas à chercher des polarisations rectilignes. On choisit Ox parallèle à la direction de propagation et l'on note $\vec{k} = k \vec{e}_x$ et l'on note :

$$\vec{E}^* = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

En utilisant successivement la deuxième et la quatrième équation d'une part, la cinquième d'autre part, on en déduit :

$$\vec{B}^* = \frac{k}{\omega} (-E_z \vec{e}_y + E_y \vec{e}_z)$$

$$\vec{D}^* = \frac{k^2}{\mu_0 \omega} (E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z)$$

$$\vec{D}^* = \varepsilon_0 [n^2 E_x \vec{e}_x + (n^2 E_y + i g k E_z) \vec{e}_y + (n^2 E_z - i g k E_y) \vec{e}_z]$$

En égalant les trois composantes des deux dernières relations, on arrive d'une part à $E_x = 0$ ($\vec{E}$ est donc lui aussi transversal) et d'autre part, avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, au système :

$$\begin{cases} \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2 \right) E_y - i g k E_z = 0 \\ i g k E_y + \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2 \right) E_z = 0 \end{cases}$$

Ce système linéaire homogène admet la solution sans intérêt (correspondant à l'absence d'onde) $E_y = E_z = 0$; si l'on en veut d'autres, il faut que le déterminant soit nul soit :

$$\left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2 \right)^2 = g^2 k^2$$

d'où successivement :

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2 = \pm g k$$

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \pm g k - n^2 = 0$$

$$k = \frac{\pm g \pm \sqrt{g^2 + \frac{4n^2 c^2}{\omega^2}}}{\frac{2c^2}{\omega^2}}$$

Où en pratique, car g est petit, on peut négliger le terme en g^2 pour arriver à :

$$k = \pm \frac{n\omega}{c} \pm \frac{g\omega^2}{2c^2}$$

soit quatre valeurs deux à deux opposées de k donc de la vitesse de propagation $v = \frac{\omega}{k}$; dans un sens donné de propagation, il ne reste donc que deux vitesses possibles. A quelles polarisations correspondent-elles ?

Pour chaque vitesse, le système admet une infinité de solutions qui vérifient toutes $\frac{E_z}{E_y} = \frac{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2}{i g k}$ ou, ce qui revient à la même chose, $\frac{E_z}{E_y} = \frac{-i g k}{\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2}$

Or pour les deux valeurs positives de k , l'une vérifie $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2 = g k$ (cf supra) et l'autre $\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2 = -g k$. Pour l'une, on a donc $\frac{E_z}{E_y} = i$ et pour l'autre, $\frac{E_z}{E_y} = -i$ ce qui correspond à deux fonctions sinusoïdales de même amplitude réelle et déphasées respectivement de $\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$. Il s'agit bien de deux polarisations circulaires de sens contraire ; le modèle de DRUDE, approche raisonnable d'une réalité plus complexe, rend donc bien compte du modèle cinématique de FRESNEL.

4 Interférences en lumière polarisée.

Cette partie suppose que le lecteur ait les connaissances minimales sur les interférences lumineuses (voir chapitre D-XI), en particulier sur la notion de cohérence.

4.a Conditions d'obtention d'interférences.

- **Absence d'interférences entre polarisations rectilignes croisées.**

Supposons qu'un dispositif interférentiel superpose deux ondes monochromatiques de directions de propagation identiques, rigoureusement ou en bonne approximation, choisies comme axe Ox , avec une différence de marche Δ donc un déphasage $\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$, l'une polarisée rectilignement selon Oy et l'autre selon Oz .

Si l'on est dans le vide (par exemple) les champs électriques et magnétiques des deux ondes sont, en notant $t^* = t - \frac{x}{c}$:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_{1m} \cos(\omega t^*) \vec{e}_y & \vec{B}_1 = \frac{1}{c} E_{1m} \cos(\omega t^*) \vec{e}_z \\ \vec{E}_2 = E_{2m} \cos(\omega t^* + \varphi) \vec{e}_z & \vec{B}_2 = -\frac{1}{c} E_{2m} \cos(\omega t^* + \varphi) \vec{e}_y \end{cases}$$

On sait que l'intensité $\mathcal{I}$ est proportionnelle à la moyenne temporelle du vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}$ (en projection sur la direction de propagation), avec un coefficient conventionnellement choisi égal à $2\mu_0 c$; on a donc successivement (le point clef est $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$) :

$$\begin{aligned}\Pi_x = \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_x &= \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \right] \cdot \vec{e}_x = \dots \\ &\dots = \frac{1}{\mu_0 c} (E_{1m}^2 \cos^2(\omega t^*) + E_{2m}^2 \cos^2(\omega t^* + \varphi))\end{aligned}$$

$$\mathcal{I} = 2\mu_0 c \langle \Pi_x \rangle = E_{1m}^2 + E_{2m}^2$$

Ce résultat est indépendant de la différence de marche et est donc incapable de générer des interférences.

• **Forçage des interférences entre polarisations rectilignes croisées.**

L'idée est d'obliger les champs à s'additionner scalairement et non plus vectoriellement ; pour cela il suffit, grâce à un polarisateur, de projeter les deux champs sur une direction commune de vecteur unitaire $\vec{u}$. En sortie du polarisateur, le champ sera :

$$\vec{E}_s = [(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \vec{u}] \vec{u} = [E_{1m} \cos^2(\omega t^*) (\vec{e}_y \cdot \vec{u}) + E_{2m} \cos^2(\omega t^* + \varphi) (\vec{e}_z \cdot \vec{u})] \vec{u}$$

qui va conduire à une intensité en $[E_{1m} \cos^2(\omega t^*) (\vec{e}_y \cdot \vec{u}) + E_{2m} \cos^2(\omega t^* + \varphi) (\vec{e}_z \cdot \vec{u})]^2$ qui génère manifestement, dans l'expression de l'intensité, un terme dépendant de φ et donc des interférences (on renvoie le lecteur au chapitre D-XI).

On sait que les interférences ont un contraste optimal si l'amplitude des fonctions à additionner ont les amplitudes voisines ; il faut donc ici, au signe près, s'arranger pour avoir égalité entre $E_{1m} (\vec{e}_y \cdot \vec{u})$ et $E_{2m} (\vec{e}_z \cdot \vec{u})$; le plus facile à réaliser expérimentalement consiste à s'arranger pour que $E_{1m} \approx E_{2m}$ et de placer l'axe du polariseur à environ $\pm 45^\circ$ de $\vec{e}_y$

• **Forçages des interférences entre polarisations circulaires en sens opposés.**

Supposons que les deux ondes soient respectivement en

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_{1m} [\cos(\omega t^*) \vec{e}_y + \sin(\omega t^*) \vec{e}_z] & \vec{B}_1 = \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 = E_{2m} [\cos(\omega t^* + \varphi) \vec{e}_y - \sin(\omega t^* + \varphi) \vec{e}_z] & \vec{B}_2 = \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_2 \end{cases}$$

On arrive aisément à :

$$\mathcal{I} = 2 \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = \dots = E_{1m}^2 + E_{2m}^2$$

Ce résultat est lui aussi indépendant de la différence de marche et est donc incapable de générer des interférences.

Là aussi, on va forcer les interférences en projetant sur la direction privilégiée d'un polarisateur ; ici l'invariance par rotation, à l'expression de la phase près, rend le choix de cette direction totalement indifférent et l'on choisit $\vec{e}_y$ pour simplifier l'exposé ; on arrive alors, après linéarisation du double produit et avec (cf supra) $E_{1m} = E_{2m}$ pour un contraste optimal, à :

$$\mathcal{I} = 2 \langle (E_{1x} + E_{2x})^2 \rangle = \dots = 2 E_{1m}^2 (1 + \cos \varphi)$$

qui est typique du contexte interférentiel.

• Gestion de la cohérence.

Ce qui précède suppose que les deux ondes que l'on force à interférer soient cohérentes, or la plupart des sources lumineuses émettent une succession frénétique de trains d'ondes dont l'état de polarisation est quelconque. Il en résulte une incohérence entre les projections sur deux directions rectilignes croisées ou sur les polarisations circulaires opposées. C'est un second polarisateur, cette fois en amont du montage qui forcera la cohérence.

Dans le cas d'une différence de marche entre polarisations rectilignes selon Oy et Oz (on pense à un diélectrique anisotrope qui impose ses axes), ce premier polarisateur aura sa direction privilégiée à $\pm 45^\circ$ de sorte que la polarisation rectiligne qui en sort puisse être considérée comme somme de deux polarisations rectilignes selon Oy et Oz de même amplitude pour un bon contraste (cf supra) et cohérentes comme projections d'une même fonction.

Dans le cas d'une différence de marche entre polarisations circulaires en sens contraires (on pense à un milieu chiral), ce premier polarisateur aura sa direction quelconque et la polarisation rectiligne qui en sort pourra être considérée comme somme de deux polarisations circulaires en sens contraires de même amplitude (on aura un bon contraste, cf supra) et cohérentes comme projections³⁰ d'une même fonction.

4.b Interférences produites par une lame anisotrope.

Soit une lame anisotrope d'épaisseur e traversée par un faisceau parallèle orthogonal d'axe Ox ; ses axes privilégiés sont Oy et Oz correspondant aux indices n_1 et n_2 . Les deux polarisations rectilignes selon Oy et Oz ont dans la traversée de la lame les chemins optiques respectifs $n_1 e$ et $n_2 e$, donc une différence de marche $\Delta n e$ où $\Delta n = n_1 - n_2$ qui dépend a priori de la longueur d'onde utilisée. Elles ressortent avec un déphasage $\varphi = 2\pi \frac{\Delta n e}{\lambda}$ qui correspond (cf chapitre D-XI) à une intensité proportionnelle à $(1 + \cos \varphi)$ ou $(1 - \cos \varphi)$ selon que les deux polarisateurs à $\pm 45^\circ$ en amont et en aval (cf supra) sont parallèles ou orthogonaux.

30. non pas au sens géométrique mais au sens de l'algèbre linéaire.

Il importe de comprendre qu'en faisceau parallèle, la différence de marche est la même pour tous les rayons et que le champ d'interférences a un éclairement uniforme quelle que soit la source utilisée.

En faisceau légèrement convergent ou divergent, on aura bien sûr une structure en anneaux mais l'anisotropie³¹ ôtera à ces anneaux la symétrie de révolution. Comme, en outre, les indices de réfraction dépendent de la direction de propagation, le problème devient complexe et dépasse le niveau visé par mon cours.

En lumière monochromatique, il sort de la lame un faisceau d'éclairement uniforme intermédiaire entre un maximum et un minimum nul (c'est le cas de la lame demi-onde) et il n'y a rien de plus à dire.

En lumière blanche, on retrouve (cf chapitre D-XI) la situation classique où, selon que la différence de marche est faible ou non, on retrouve des irisations, auquel cas la couleur uniforme est caractéristique de la différence de marche (teintes de NEWTON), ou du *blanc d'ordre supérieur*, auquel cas un spectroscope à prisme ou à réseau donnera un *spectre cannelé* dont seront absentes les radiations qui vérifient $[n_1(\lambda) - n_2(\lambda)] e = (k + \frac{1}{2}) \lambda$ avec k entier.

Pour une lame à pouvoir rotatoire placée entre deux polariseurs, même si le détail des calculs diffère, on arrive exactement aux mêmes conclusions.

4.c Compensateur de Babinet.

La figure 14 p. 46 montre le principe du *compensateur de BABINET*, lame à faces parallèles constituée de deux prismes, mobiles latéralement (grosse double flèche) selon Oy , de petit angle au sommet θ formés du même matériau biréfringent mais dont les axes ont été croisés. La position de référence, matérialisée par un réticule sur le viseur en sortie du montage, est celle pour laquelle, sur le rayon moyen du faisceau, les deux prismes ont même épaisseur e_0 .

A l'ordonnée y , les épaisseurs des deux prismes sont respectivement $e_0 + y \tan \theta \approx e_0 + y \theta$ et $e_0 - y \tan \theta \approx e_0 - y \theta$ et l'épaisseur optique la lame est pour l'une des polarisations :

$$e'(y) = n_1 (e_0 + y \theta) + n_2 (e_0 - y \theta) = \dots = e(0) + \Delta n \theta y$$

et pour l'autre

$$e''(y) = n_2 (e_0 + y \theta) + n_1 (e_0 - y \theta) = \dots = e(0) - \Delta n \theta y$$

soit une différence de marche $\Delta = 2 \Delta n \theta y$

En lumière blanche, on observe des franges irisées centrées sur $\Delta = 0$ soit $y = 0$, irisations qui pâlisent jusqu'au blanc d'ordre supérieur (voir, dans le chapitre D-XI, les franges du coin d'air en lumière blanche).

31. sauf si la normale à la lame est l'axe de symétrie d'un milieu uniaxe

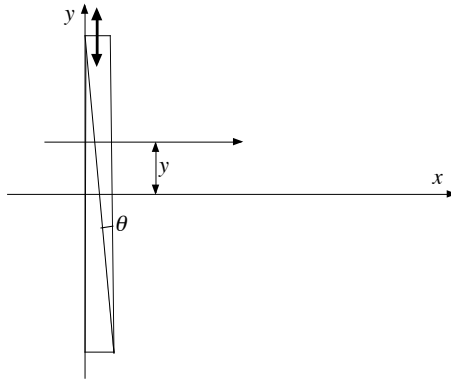


FIGURE 14 – Compensateur de Babinet.

Si l'on place, avant ou près le compensateur, une lame à faces parallèles pour laquelle la différence de marche entre polarisations croisées est δ (indépendamment de y), la différence de marche globale est $\delta + 2 \Delta n \theta y$ et le centre de symétrie des irisations, toujours en $\Delta = 0$ est décalé de $y = 0$ à $y = -\frac{\delta}{2 \Delta n \theta}$ d'autant plus aisé à mesurer que δn et θ sont petits. Dans la pratique, on ramène le centre de symétrie de la figure sur le réticule en décalant, dans un sens ou dans l'autre, le prisme mobile du compensateur par rapport au fixe et l'on mesure la translation nécessaire, mais ça ne change rien au principe. Fondamentalement, le compensateur de BABINET mesure la différence de marche introduite par la traversée d'une lame anisotrope.

4.d Filtre de Lyot.

Un filtre de LYOT, utilisé en lumière parallèle dans une direction Ox orthogonale aux lames qui le constituent, est une succession alternée de polariseurs de même direction privilégiée de vecteur unitaire $\vec{u}$ et de lames biréfringentes réalisées dans un même matériau, d'axes lents et rapides parallèles respectivement dans les directions de Oy et Oz dont la bissectrice est la direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ des polariseurs et dont les épaisseurs croissent de façon exponentielle, la première a une épaisseur e , le seconde une épaisseur $2e$, la troisième une épaisseur $4e$ et plus généralement celle de rang n une épaisseur $2^{n-1}e$; la série commence et finit par un polariseur et ne peut comporter qu'un nombre raisonnable d'éléments faute de quoi sa taille deviendrait déraisonnable. La figure est laissée à la charge du lecteur.

Au sortir du premier polariseur, une lumière monochromatique de longueur d'onde λ est polarisée selon $\vec{u}$, notons-la $\vec{E}_0 = E_0 \cos(\omega t^*) \vec{u}$ où $t^* = t - \frac{x}{c}$

Pour gérer la traversée de la première lame biréfringente, décomposons-la en deux ondes

polarisées selon Oy et Oz soit :

$$\vec{E}_0 = E_0 \cos(\omega t^*) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_z \right) = E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t^*) \vec{e}_y + E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t^*) \vec{e}_z$$

Au sortir de la lame, d'épaisseur e et d'indices n_1 et n_2 , les deux composantes se déphasent de $\varphi = \frac{(n_1 - n_2)\omega e}{c} = 2\pi \frac{(n_1 - n_2)e}{\lambda}$ et l'onde qui sort³² de la lame est :

$$\vec{E}_s = E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t^*) \vec{e}_y + E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t^* + \varphi) \vec{e}_z$$

Le second polariseur projette ce champ sur la direction de vecteur unitaire $\vec{u}$; il en sort donc :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= (\vec{E}_s \cdot \vec{u}) \vec{u} = \left[E_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cos(\omega t^*) + E_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cos(\omega t^* + \varphi) \right] \vec{u} = \dots \\ &\dots = \frac{1}{2} E_0 [\cos(\omega t^*) + \cos(\omega t^* + \varphi)] \vec{u} = E_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t^* + \frac{\varphi}{2}\right) \vec{u} \end{aligned}$$

A un déphasage près, non pertinent, l'amplitude est passée de E_0 à $E_1 = E_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$; à près la seconde lame, d'épaisseur double introduisant un déphasage double, et le polariseur qui la suit, on sera passé à l'amplitude réelle³³ $E_2 = E_1 \cos(\varphi)$; puis ensuite à $E_3 = E_2 \cos(2\varphi)$ etc.

Globalement, pour un filtre de LYOT à cinq étages, on a :

$$\frac{E_5}{E_0} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos(\varphi) \cos(2\varphi) \cos(4\varphi) \cos(8\varphi)$$

On simplifie cette expression grâce à la relation $\sin(\varphi) = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ d'où l'on tire $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\sin(\varphi)}{2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$ et expressions analogues d'où :

$$\frac{E_5}{E_0} = \frac{\sin(\varphi)}{2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\sin(2\varphi)}{2 \sin(\varphi)} \frac{\sin(4\varphi)}{2 \sin(2\varphi)} \frac{\sin(8\varphi)}{2 \sin(4\varphi)} \frac{\sin(16\varphi)}{2 \sin(8\varphi)}$$

et par télescopage multiplicatif (comme disent nos amis mathématiciens) :

$$\frac{E_5}{E_0} = \frac{\sin(16\varphi)}{32 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

32. Avec la convention simplificatrice exposée plus haut sur les lames biréfringentes et qui insiste sur le déphasage et non les phases absolues.

33. Rigoureusement, il faut une valeur absolue ; je m'en abstiens pour une meilleure lisibilité

ce qui correspond à un rapport d'intensité (proportionnelle au carré de l'amplitude) en

$$\frac{\mathcal{I}_5}{\mathcal{I}_0} = \left[\frac{\sin(16\varphi)}{32 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2$$

On trouve ce type de fonction dans l'éclairement donné par un réseau de diffraction et nous renvoyons le lecteur au chapitre D-XI s'il désire des développements sur ce type de fonction. Nous nous contenterons ici d'en donner le graphe en fonction de $\xi = \frac{\varphi}{2\pi}$ sur la figure 15 p. 48. Si la longueur d'onde correspondant à $x = 1$ soit $\varphi = 2\pi$ est dans le visible, celles correspondant à $x = 2, x = 3$ etc. sont ³⁴ dans l'infrarouge (et $x = 0$ est purement formel).

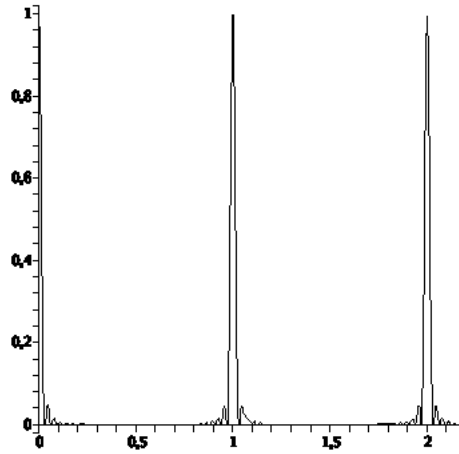


FIGURE 15 – Filtre de Lyot.

En observant le graphe autour de $x = 1$, on constate que seules les longueurs d'onde pour lesquelles le coefficient de transmission énergétique est non négligeable forment une bande passante très étroite centrée sur cette valeur ; on a donc ainsi réalisé un filtre sélectif très performant. Bernard LYOT, astronome français ayant vécu dans la première moitié du XX^e siècle, spécialiste du soleil³⁵, a conçu ce filtre³⁶ pour isoler une raie de l'hydrogène dans la lumière émise par l'atmosphère solaire.

5 Anisotropies provoquées.

Il ne s'agit ici que d'une évocation ; approfondir le propos serait au delà des mes objectifs.

34. Attention toutefois à ne pas dire de bêtises : les indices n_1 et n_2 dépendent de λ .

35. Il meurt du reste d'une crise cardiaque au Caire, au retour d'une mission d'observation d'une éclipse solaire totale.

36. et bien d'autre choses.

5.a Biréfringence par déformation.

Etirer un matériau dans une direction particulière lui confère de facto une anisotropie ; que celle-ci se traduise par une anisotropie optique, une biréfringence, n'a rien que de très naturel. Sans être un génie, on devinera que plus la déformation est forte, puis la biréfringence, caractérisée par la différence entre les indices des directions privilégiées de polarisation est importante.

Toute propriété physique peut être potentiellement exploitée, en l'occurrence ici, si l'on visualise la biréfringence par des interférences en lumière blanche entre polariseurs (cf supra), on peut visualiser les zones où les déformations dans un corps sont plus ou moins grandes. Dans la pratique, on fabrique une maquette en matériau transparent pour mettre en œuvre cette technique de *photo-élasticimétrie*.

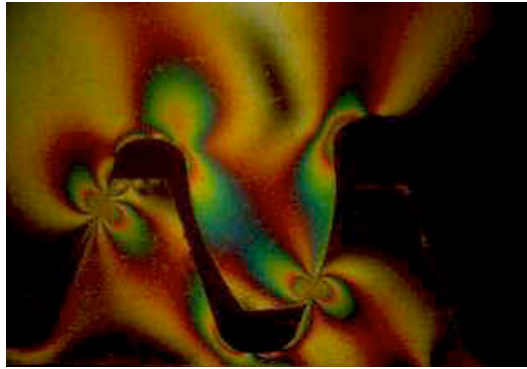


FIGURE 16 – Photo-élasticimétrie.

La figure 16 p. 49 montre une maquette d'engrenage soumis à un couple moteur.

5.b Biréfringence électrique.

Soumettre un matériau à un champ électrique uniforme et stationnaire lui confère de facto une anisotropie qui conduit a priori à une biréfringence. En particulier, dans un milieu où se propage une onde plane dans la direction de l'axe Ox , un champ électrique selon Oy crée une biréfringence entre les composantes de polarisations rectilignes selon Oy et Oz , matérialisé par une différence d'indice Δn .

Dans un milieu liquide, solide amorphe (non cristallisé), ou cristallin sous certaines conditions (l'effet est trop infime pour être mis en évidence dans les gaz), on vérifie expérimentalement, ce qui peut être justifié par des considérations en terme de tenseurs, trop délicates pour être exposées ici, que Δn est proportionnel au carré du champ électrique ; il s'agit de l'*effet KERR* mis en évidence³⁷ en 1875. L'explication qualitative en est

37. par John KERR, physicien écossais, 1824–1907.

que le champ électrique oriente les molécules polaires, ce qui reporte l'anisotropie dans la structure de la matière.

Un tel effet n'est pas intéressant à utiliser car à champ faible il est trop faible (à cause du carré) et car il ne permet pas de trouver le sens du champ (un carré est toujours positif). Les mêmes considérations tensorielles montrent que pour un cristal non invariant dans une symétrie par rapport à un point, Δn est proportionnel au champ électrique et non plus à son carré ; il s'agit de l'*effet Pockels*³⁸ utilisé pour créer des *commutateurs opto-électriques*.

5.c Biréfringence magnétique.

Par des raisons identiques, soumettre un matériau à un champ magnétique uniforme et stationnaire lui confère de facto une anisotropie qui conduit a priori à une biréfringence. En particulier, dans un milieu où se propage une onde plane dans la direction de l'axe Ox , un champ magnétique selon Oy crée une biréfringence entre les composantes de polarisations rectilignes selon Oy et Oz , matérialisé par une différence d'indice Δn , là aussi proportionnel en général au carré du champ. Cet effet a été étudié par Aimé COTTON³⁹ et Henri MOUTON⁴⁰.

5.d Pouvoir rotatoire magnétique.

Avec une géométrie différente, dans un milieu où se propage une onde plane dans la direction de l'axe Ox , un champ magnétique lui aussi selon Ox provoque, de par sa nature de pseudo-vecteur, une chiralité et une différence d'indice Δn entre les composantes circulaires directe et indirecte. Cet effet a été mis en évidence par FARADAY dès 1846 et il suit la loi expérimentale de VERDET⁴¹ qui affirme que Δn est proportionnel au champ.

38. Friedrich POCKELS, physicien allemand, 1862–1935.

39. physicien français 1869–1951.

40. biologiste français 1869–1935.

41. Emile VERDET, physicien français, 1824–1866.