

## Chapitre B-IV

# Le problème à deux corps. Mouvements à force centrale.

Joël SORNETTE met ce cours à votre disposition selon les termes de la licence Creative Commons :

- Pas d'utilisation commerciale.
- Pas de modification, pas de coupure, pas d'intégration à un autre travail.
- Pas de communication à autrui sans citer son nom, ni en suggérant son autorisation.

Retrouvez l'intégralité du cours sur le site [joelsornette.fr](http://joelsornette.fr)

## RÉSUMÉ :

*Dans un premier temps, il sera montré qu'on peut ramener l'étude d'un système isolé de deux corps en interaction à celui d'un corps soumis à une « force centrale ».*

*Après le rappel historique des lois de Kepler, on étudiera les mouvements à force centrale. On montera qu'ils sont plans et vérifient la « loi des aires », quelle que soit la loi de force et on mettra en place la méthode des formules de Binet.*

*On se placera ensuite dans le cadre d'une force en  $r^{-2}$  et montera que les trajectoires sont alors des coniques dont le centre de force occupe un des foyers. Dans ce cas, on montrera les charmes d'une autre méthode, celle de l'invariant de Lagrange.*

*La troisième loi de Kepler sera promue au rang de balance de l'Univers et l'on fera une digression sur les mesures astronomiques.*

*On évoquera enfin l'effet de perturbations sur les orbites des astres.*

*Le plus gros prérequis mathématique est celui concernant les coniques en équation polaire, quelques rappels vous y aideront. On peut aussi se rafraîchir la mémoire sur la définition d'un barycentre.*

*Remarque : on utilise systématiquement et sans démonstration le fait que le champ de gravitation d'un astre à symétrie sphérique est le même que si sa masse était concentrée en son centre ; c'est une conséquence du théorème de Gauss et ce sera démontré en électrostatique.*

# Table des matières

<b>B-IV Le problème à deux corps. Mouvements à force centrale.</b>	<b>1</b>
1 Réduction du problème à deux corps. . . . .	5
1.a Référentiel barycentrique. . . . .	5
1.b La réduction. . . . .	6
1.c Remarques sur le moment et l'énergie cinétique du système. . . . .	8
2 Les lois de Kepler. . . . .	9
2.a Le préalable connu : la période orbitale des planètes . . . . .	9
2.b La lente et difficile découverte. . . . .	11
2.c Les trois lois. . . . .	13
3 Mouvements à force centrale . . . . .	14
3.a Conservation du moment cinétique et conséquences . . . . .	14
3.b La méthode de Binet. . . . .	18
3.c Application à une force inversement proportionnelle au carré de la distance. . . . .	20
3.d La méthode de l'invariant de Lagrange-Runge-Lenz. . . . .	28
3.e Lancement d'un satellite artificiel. . . . .	32
4 Mesures astronomiques. . . . .	35
4.a Mesure des distances . . . . .	35
4.b La troisième loi de Kepler comme balance de l'Univers. . . . .	41
4.c Mesure de la masse de la Terre et de la constante de gravitation. . . . .	42
5 Exemples simples de perturbation d'orbites. . . . .	44
5.a Champ de gravitation créé par la Terre aplatie aux pôles. . . . .	44
5.b Précession du périhélie. . . . .	48

5.c Précession du plan de l'orbite. . . . . 50

# 1 Réduction du problème à deux corps.

## 1.a Référentiel barycentrique.

On considère dans un référentiel galiléen un ensemble isolé de deux points<sup>1</sup> matériels en interaction, l'un de masse  $m_A$  en un point  $A$  mobile et l'autre de masse  $m_B$  en un point  $B$  mobile.  $A$  exerce sur  $B$  une force  $\vec{F}_{A \rightarrow B}$  (on abrège en  $\vec{F}$ ) et  $B$  exerce sur  $A$  la force opposée  $-\vec{F}$ , on rappelle que cette force est parallèle à  $\vec{AB}$  (conséquence du postulat de conservation du moment cinétique, voir chapitre B-II).

Le postulat de conservation de la quantité de mouvement (équivalent à la loi d'action et réaction) entraîne que :

$$\frac{d}{dt} (m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B) = \vec{0}$$

Introduisons le barycentre  $G$  du système défini par :

$$(m_A \vec{OA} + m_B \vec{OB}) = (m_A + m_B) \vec{OG}$$

où  $O$  est l'origine du référentiel galiléen. Par dérivation, on en déduit :

$$(m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B) = (m_A + m_B) \vec{v}_G$$

que l'on reporte dans la loi de conservation :

$$\frac{d}{dt} [(m_A + m_B) \vec{v}_G] = (m_A + m_B) \frac{d}{dt} (\vec{v}_G) = \vec{0}$$

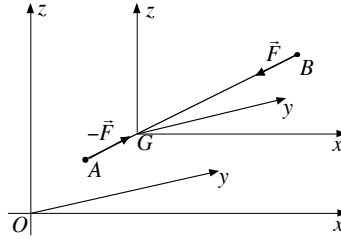


FIGURE 1 – Référentiel barycentrique

On en déduit que  $G$  a, dans le référentiel galiléen  $Oxyz$ , un mouvement à vitesse constante, donc rectiligne uniforme. On introduit le *référentiel barycentrique*  $Gxyz$ , d'origine  $G$  et d'axes parallèles à ceux de  $Oxyz$  de sorte qu'il est un référentiel en translation

1. On verra dans en électrostatique (chapitre C-I) qu'un corps à symétrie sphérique se comporte comme un point matériel confondu avec son centre. C'est en fait une conséquence du théorème de Gauss.

uniforme par rapport à un référentiel galiléen, donc galiléen lui-même et que l'on peut donc désormais mener l'étude dans ce référentiel où  $G$  est fixe, ce qui facilite un peu la tâche qui reste néanmoins encore ardue car les deux points  $A$  et  $B$  se déplacent tous les deux.

La figure 1 p. 5 résume la situation.

## 1.b La réduction.

Exprimons les vecteurs positions  $\overrightarrow{GA}$  et  $\overrightarrow{GB}$  des deux points dans le référentiel barycentrique. On part de la définition de  $G$  (équivalente<sup>2</sup> à celle exprimée ci-dessus) et de la relation de CHASLES :

$$\begin{cases} m_B \overrightarrow{GB} + m_A \overrightarrow{GA} = \vec{0} \\ \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Deux combinaisons linéaires d'équations mènent à :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GB} &= \frac{m_A}{m_A + m_B} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{GA} &= -\frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

ce qui montre que la donnée de l'évolution de  $\overrightarrow{AB}$  avec le temps permet d'en déduire celles de  $\overrightarrow{GA}$  et  $\overrightarrow{GB}$ .

Les équations des mouvements des deux masses dans le référentiel barycentrique sont :

$$m_B \frac{d^2 \overrightarrow{GB}}{dt^2} = \vec{F} \quad \text{et} \quad m_A \frac{d^2 \overrightarrow{GA}}{dt^2} = -\vec{F}$$

Reportons-y les expressions de  $\overrightarrow{GA}$  et  $\overrightarrow{GB}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$ , on retrouve deux fois la même relation :

$$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \frac{d^2 \overrightarrow{AB}}{dt^2} = \vec{F}$$

relation simple de même allure que la loi de la dynamique, à laquelle nous allons donner du sens.

Imaginons un point fictif  $M$  de masse  $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ , se déplaçant de façon qu'à tout moment  $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AB}$ , la force provoquant ce mouvement devrait être, en vertu de la loi de la dynamique,  $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \frac{d^2 \overrightarrow{AB}}{dt^2}$ , c'est-à-dire  $\vec{F}$ , qui est parallèle à  $\overrightarrow{AB}$  donc à  $\overrightarrow{GM}$ .

2.  $(m_A + m_B) \overrightarrow{OG} = m_A \overrightarrow{OA} + m_B \overrightarrow{OB}$  d'où  $(m_A + m_B) \overrightarrow{OG} = m_A (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + m_B (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB})$  et l'on simplifie.

Le problème des deux corps en interaction est donc équivalent à un problème à un corps (dont la position est notée  $M$ ), de masse  $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ , appelée *masse réduite* et attirée ou repoussée par une force  $\vec{F}$  passant par un point fixe ( $G$  en l'occurrence) qu'on qualifera de façon parlante de *force centrale*. Si de plus le module de la force ne dépend, dans le problème à deux corps, que de la distance  $r = \|\vec{AB}\|$ , il ne dépendra, dans le problème équivalent, qu'à la distance au centre attractif ou répulsif car  $r = \|\vec{AB}\| = \|\vec{GM}\|$ .

Après résolution de ce problème, à partir de la trajectoire de  $M$ , on en déduira par deux homothéties de rapports respectifs  $-\frac{m_B}{m_A + m_B}$  et  $\frac{m_A}{m_A + m_B}$  les trajectoires de  $A$  et  $B$ . Sur la figure 2 p. 7, on trouvera un tracé dans le cas où  $m_A = 3m_B$ , donnant des rapports d'homothéties  $-\frac{1}{4}$  et  $\frac{3}{4}$ ; on a pris pour  $M$  une trajectoire elliptique<sup>3</sup> de foyer  $G$  et l'on a indiqué trois positions successives de  $M$  et les positions relatives de  $A$  et  $B$ .

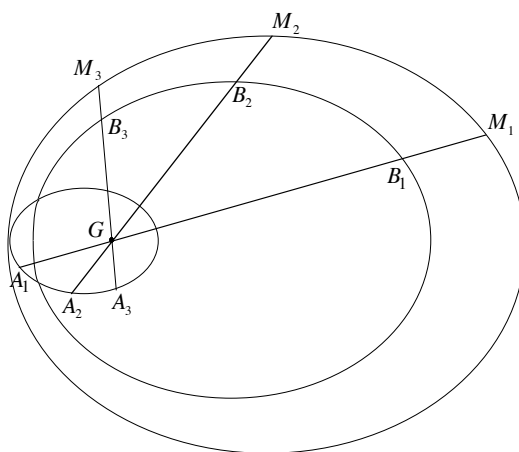


FIGURE 2 – Lien entre les trajectoires.

La figure 3 p.8 est un document d'après l'astronome Camille FLAMMARION qui enregistre les différentes positions<sup>4</sup>, par rapport à l'ensemble de ses voisines et sur presque un siècle, de l'étoile Sirius, la plus brillante du ciel, au fil du temps. C'est en fait une étoile double, une normale dont la masse est double de celle du soleil, celle que l'on voit à l'œil nu et une autre de même masse que le Soleil mais de la taille de la Terre, c'est une « naine blanche »<sup>5</sup>, elle n'est visible qu'au télescope. Le mouvement sur la figure résulte de la combinaison du déplacement uniforme du centre de gravité et de la rotation de l'étoile visible autour de celui-ci.

3. On anticipe sur la suite.

4. L'immobilité des étoiles les unes par rapport aux autres n'existe qu'à l'échelle de l'année; au delà les étoiles les plus proches du Soleil se déplacent nettement, les plus lointaines plus lentement. Au cours des siècles les constellations se déforment et nous ne voyons pas le même ciel que les Babyloniens.

5. En simplifiant beaucoup, une naine blanche résulte de l'effondrement gravitationnel d'une étoile qui a transformé son hydrogène en hélium par une première fusion nucléaire puis tout son hélium en carbone et oxygène par une seconde fusion

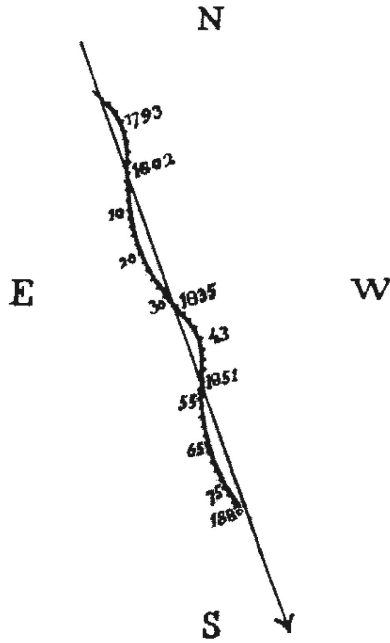


FIGURE 3 – Mouvement de Sirius.

### 1.c Remarques sur le moment et l'énergie cinétique du système.

Rappelons que :

$$\begin{aligned}\vec{GB} &= \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{AB} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{GM} \\ \vec{GA} &= -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{AB} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{GM}\end{aligned}$$

d'où par dérivation :

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{v}_M \\ \vec{v}_A &= -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{v}_M\end{aligned}$$

Rappelons aussi que la masse réduite du système est définie par :

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

Le moment cinétique total du système à deux corps, calculé en  $G$  parce que c'est le point qui joue le premier rôle dans cette histoire est :

$$\vec{\sigma}(G) = \vec{GA} \wedge (m_A \vec{v}_A) + \vec{GB} \wedge (m_B \vec{v}_B)$$

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(G) &= \left( \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}_M \right) \left[ m_A \left( -\frac{m_B}{m_A + m_B} \right)^2 + m_B \left( \frac{m_A}{m_A + m_B} \right)^2 \right] \\
\vec{\sigma}(G) &= \left( \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}_M \right) \frac{m_A m_B^2 + m_B m_A^2}{(m_A + m_B)^2} \\
\vec{\sigma}(G) &= \left( \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}_M \right) \frac{m_A m_B (m_A + m_B)}{(m_A + m_B)^2} \\
\vec{\sigma}(G) &= \left( \overrightarrow{GM} \wedge \vec{v}_M \right) \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \\
\vec{\sigma}(G) &= \overrightarrow{GM} \wedge (\mu \vec{v}_M)
\end{aligned}$$

c'est à dire le moment cinétique, calculé en  $G$ , du point  $M$  de masse  $\mu$  dans le problème équivalent du corps soumis à une force centrale.

De la même façon, en détaillant un peu moins les calculs, l'énergie cinétique totale dans le problème à deux corps est :

$$\begin{aligned}
E_{\text{cin.}} &= \frac{1}{2} (m_A \vec{v}_A^2 + m_B \vec{v}_B^2) \\
E_{\text{cin.}} &= \frac{1}{2} \frac{m_A m_B^2 + m_B m_A^2}{(m_A + m_B)^2} \vec{v}_M^2 \\
E_{\text{cin.}} &= \frac{1}{2} \mu \vec{v}_M^2
\end{aligned}$$

c'est à dire l'énergie cinétique du point  $M$  de masse  $\mu$  dans le problème équivalent du corps soumis à une force centrale.

Enfin l'énergie potentielle quand elle existe, c'est-à-dire en pratique quand la force ne dépend que de la distance entre points, elle aussi est la même dans le deux problèmes, tout bêtement parce que  $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{GM}\|$

Ces trois conclusions complètent la correspondance parfaite entre les deux problèmes.

## 2 Les lois de Kepler.

### 2.a Le préalable connu : la période orbitale des planètes

La période de révolution des planètes sur leur orbite était connue bien avant KEPLER car elle se confond (voir le chapitre B-III) avec la période de parcours des épicycles. Prenons le cas de Vénus ; la déformation du triangle Terre-Soleil-Vénus est bien sûr périodique et cette période est aisément mesurable car ces déformations engendrent des phénomènes facilement observables :

- la rétrogradation évoquée dans le chapitre B-III,

- le fait que la distance Terre-Vénus varie considérablement ce qui engendre de grosses variations d'éclat,
- on observe aussi, avec une lunette astronomique, les faces éclairées et à l'ombre donnant des aspects analogues à la pleine ou la nouvelle lune, au premier ou au dernier quartier
- dans le cas de Mercure et Vénus<sup>6</sup> l'existence d'une valeur maximale à l'angle Soleil-Terre-planète.

Il est très facile de montrer que la période de ces phénomènes est la différence des périodes orbitales des deux planètes. Considérons la figure 4 p. 10 :

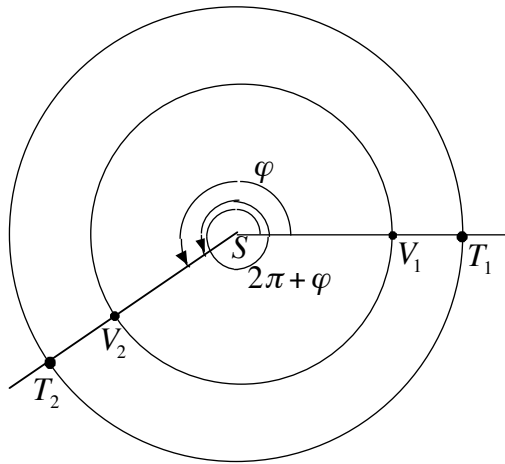


FIGURE 4 – Deux Conjonctions successives.

Considérons deux *conjonctions* successives du Soleil et de Vénus  $SV_1T_1$  et  $SV_2T_2$ ; Vénus tournant plus vite<sup>7</sup> que la Terre, la Terre s'est déplacée d'un angle  $\varphi$  et Vénus a fait un tour de plus pour se retrouver dans l'alignement, donc s'est déplacée de  $2\pi + \varphi$ . En appelant  $T_T$  et  $f_T$ ,  $T_V$  et  $f_V$ ,  $T$  et  $f$  les périodes et fréquences de rotation de la Terre et de Vénus et celles du phénomène de conjonction, on a :

$$\varphi = 2\pi \frac{T}{T_T} = 2\pi \frac{f_T}{f} \quad \text{et} \quad 2\pi + \varphi = 2\pi \frac{T}{T_V} = 2\pi \frac{f_V}{f}$$

$$\text{d'où} \quad 2\pi + 2\pi \frac{f_T}{f} = 2\pi \frac{f_V}{f} \quad \text{et} \quad f + f_T = f_V$$

6. Ce sont les planètes *intérieures* dont l'orbite a un rayon plus petit que celle de la Terre.

7. On le sait, car juste après la conjonction  $SV_1T_1$ , par rapport à la droite mobile  $ST$ , on observe que Vénus avance dans le sens trigonométrique au lieu de reculer dans le sens horaire.

Expérimentalement,  $T_T = 365$  jours et  $T = 584$  jours (appelée période *synodique*<sup>8</sup>), d'où :

$$\frac{1}{T_V} = \frac{1}{365} + \frac{1}{584}$$

On en déduit que  $T_V = 225$  jours.

## 2.b La lente et difficile découverte.

Rappelons (voir chapitre B-III) qu'au début du XVII<sup>ème</sup> siècle, on n'avait aucun moyen de mesurer la distance entre la Terre et une planète, disons Mars parce c'est par elle que KEPLER a commencé, on ne pouvait trouver que sa direction, vue de la Terre, par rapport aux étoiles, direction variable à cause des deux mouvements de la Terre et de Mars. A partir de cette unique information, il a fallu trouver les positions des deux planètes. Le moins que l'on puisse dire, c'est que ce n'est pas évident.

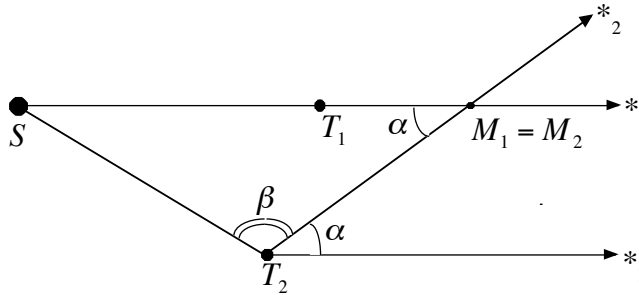


FIGURE 5 – Détermination de l'orbite de la Terre.

En 1601, KEPLER succède à Tycho BRAHE à l'observatoire de Prague à la suite du décès brutal de ce dernier. Il hérite d'une fabuleuse collection d'observations astronomiques d'une précision rare pour l'époque ; Tycho BRAHE était en effet très méticuleux. KEPLER s'attelle à la tâche de la détermination précise de l'orbite terrestre. Il part de l'idée suivante : Mars a une année de 687 jours donc tous les 687 jours, il se retrouve au même endroit. Il recherche dans les observations de Tycho BRAHE une opposition de Mars (Soleil, Terre, Mars alignés dans cet ordre  $S-T_1-M_1$  sur la figure 5 p. 11) et une autre observation 687 jours plus tard (en fait une un peu avant et une un peu après avec une interpolation) ; Mars est en  $M_2$  confondu avec  $M_1$  et la Terre est en  $T_2$ , le Soleil  $S$  n'a pas bougé car on raisonne dans le référentiel de COPERNIC.

La première observation donne la position de Mars dans la voûte terrestre, c'est-à-dire l'étoile qui est dans l'alignement Terre-Mars ( $*_1$  sur la figure). La deuxième observation donne une autre étoile ( $*_2$ ) et comme on connaît la date et l'heure, on sait dans quelle direction est le Soleil<sup>9</sup>. Il est alors aisé d'en déduire les angles  $\alpha = \widehat{*_1 M_1 *_2} = \widehat{T_2 M_1 S}$ ,

8. Du grec syn- (avec) et hodos (la route).

9. N'oublions pas qu'on ne peut observer Mars que la nuit !

$\beta = \widehat{M_1T_2S}$  et donc le troisième angle du triangle  $ST_2M_1$ . Il est donc possible, en prenant  $SM_1$  comme unité arbitraire, de construire ce triangle et de trouver la position du point  $T_2$ . On cherche une troisième observation à 2 fois 687 jours et la même méthode donne un point  $T_3$  et ainsi de suite. Les points  $T_2, T_3, T_4$ , etc. (attention la méthode n'apprend rien sur  $T_1$ ) permettent de se faire une idée de la trajectoire (à un homothétie près) et KEPLER trouve :

- que les directions  $M_1*1, M_1*2, M_1*3$ , etc., sont coplanaires et donc que l'orbite de la Terre est dans ce plan ; on avait à l'époque suffisamment de connaissances en *trigonométrie sphérique* pour que ce soit un jeu d'enfant.
- que le résultats sont compatibles avec un cercle<sup>10</sup> mais dont le centre n'est pas le Soleil.

KEPLER ne s'arrête pas là, il remarque que les arcs  $\widehat{T_2T_3}, \widehat{T_3T_4}, \widehat{T_4T_5}$ , etc., parcourus pendant le même temps (687 jours), ne sont pas égaux et il lui semble que le mouvement de la Terre est d'autant plus lent qu'elle est loin du Soleil. Soupçonnant bien sûr que le Soleil a son rôle dans l'histoire, après divers tâtonnements et des calculs contestables, il trouve que les aires des triangles (avec un coté arrondi)  $ST_2T_3, ST_3T_4, ST_4T_5$ , etc. ont des aires égales<sup>11</sup>. C'est la fameuse *loi des aires* : le segment Soleil-Terre balaie « des aires égales en des temps égaux ».

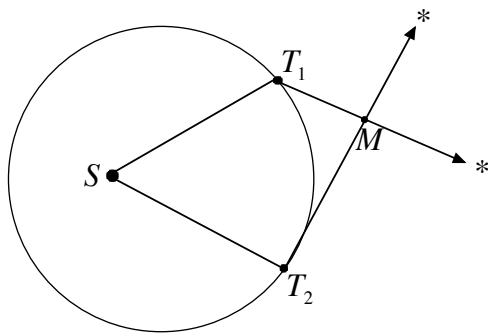


FIGURE 6 – Détermination de l'orbite de Mars.

KEPLER va dès lors s'attaquer au calcul de l'orbite de Mars. Il s'appuie sur la même idée et cherche des couples d'observations distantes de 687 jours. Observons la figure 6 p. 12 ; Mars est deux fois au même endroit et la Terre en  $T_1$  et  $T_2$ . Les observations donnent les angles  $ST_1M$  et  $ST_2M$ , et, l'orbite de la Terre étant désormais connue, en forme et en temps de parcours, les points  $S, T_1$  et  $T_2$  sont connus. Il est donc aisé de trouver le point  $M$ . En trouvant le plus de couples d'observations possible, on reconstruit ainsi l'orbite de Mars et sa chronologie de parcours.

10. On saura plus tard qu'il s'agit d'une ellipse à faible excentricité et dans ce cas la différence entre cercle et ellipse est minime et passe aisément inaperçue.

11. Le soleil est excentré ; quand la Terre en est loin, l'arc parcouru en un jour est court et quand elle en est proche, l'arc est long ; ça compense.

Pour la façon dont Mars décrit son orbite, il retrouve la loi des aires mais pour la forme de l'orbite, surprise, ce n'est pas un cercle ; après divers essais, les résultats s'avèrent compatibles avec une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

Par ailleurs, KEPLER note que le plan de l'orbite de Mars n'est pas coplanaire avec celle de la Terre.

Voilà ! Les orbites de Mars et de la Terre sont trouvées. L'humanité vient de faire un grand pas<sup>12</sup>.

Il va de soi que tout ce que je viens de dire est une simplification qui conserve l'esprit des méthodes utilisées par KEPLER mais en allant à l'essentiel ; ce paragraphe qui tient un peu plus de deux pages résume en effet plus de six ans de calculs menés par KEPLER ! Pour les autres planètes connues, la même méthode de mesure a conduit aux mêmes résultats. Vraisemblablement, dans le cas de Jupiter (de période 12 ans) et encore plus de Saturne (de période 29 ans), le nombre de couples d'observations disponibles était bien moindre et le calcul moins précis.

Il a fallu dix ans supplémentaires de travail à KEPLER pour trouver la relation entre la période des planètes et leurs distances au Soleil ; après bien des tâtonnements donc, il montra que le carré de la période était proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse (ou du demi-grand axe, ce qui revient au même). Là, pas d'astuce mais beaucoup de calculs.

## 2.c Les trois lois.

Voici donc les trois lois de KEPLER, les deux premières publiées en 1609, la dernière en 1618 :

- Les planètes décrivent autour du Soleil une orbite plane, elliptique, le Soleil occupant l'un des foyers.
- La planète parcourt son orbite selon la loi des aires, à savoir que le segment Soleil-planète balaie une surface dont l'aire est proportionnelle au temps.
- Pour les différentes planètes orbitant autour du Soleil, le rapport du carré de la période au cube du grand axe est constant.

En 1687 paraîtront les lois de NEWTON (lois de la dynamique et loi de gravitation) qui rendront compte des lois de KEPLER.

Remarquons au passage le fonctionnement de la physique : dans un premier temps, on réalise expériences et mesures que l'on les organise en lois expérimentales ; dans un second temps, on cherche à construire une axiomatique simple à partir de laquelle on démontre ces mêmes lois. D'abord une approche inductive, puis une approche déductive.

---

12. Ce n'est pas Kepler qui a dit ça !

### 3 Mouvements à force centrale

#### 3.a Conservation du moment cinétique et conséquences

- **Conservation du moment cinétique.**

Remarque initiale : Dans le problème à deux corps, elle est acquise par l'axiomatique de la dynamique ; elle l'est donc pour un mouvement à force centrale qui en est l'équivalent mais cela ne saute plus aux yeux. Nous le redémontrons ici car nous reprenons le problème à zéro.

Dans un référentiel galiléen, un point matériel de masse  $m$ , situé en un point mobile  $M$  est soumis à une unique force constamment parallèle à  $\overrightarrow{OM}$  où  $O$  est un point fixe (que l'on prendra bien évidemment comme origine) ; cette force peut être attractive ou répulsive et pour l'instant, on ne connaît rien de son module (sa norme).

Le moment cinétique, calculé au *centre de force*  $O$ , de la masse  $m$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$ , noté  $\vec{\sigma}(O)$  (on trouve aussi la notation  $\vec{L}(O)$ ), est défini par :

$$\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge (m \vec{v})$$

Dérivons ce moment cinétique par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O) = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt} \vec{p}$$

Injectons-y la définition de la vitesse comme dérivée du vecteur position et la loi de la dynamique définissant la force comme dérivée de la quantité de mouvement.

$$\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O) = \vec{v} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Les deux termes du résultat sont nuls car  $\vec{v}$  est parallèle à  $\vec{p} = m \vec{v}$  (c'est ainsi que l'on a démontré le théorème du moment cinétique) et dans le cadre d'une force centrale,  $\vec{F}$  est parallèle à  $\overrightarrow{OM}$ . Le moment cinétique a une dérivée temporelle nulle, il est donc constant. Voyons en les conséquences.

- **Le mouvement est plan.**

Il est aisé d'en déduire que le mouvement est plan mais l'on passe souvent à côté du bon argument au profit d'autres qui fleurissent bon le trop célèbre « on voit bien que... ». La clef est que le produit vectoriel est orthogonal à ses deux facteurs, donc  $\overrightarrow{OM}$  est orthogonal au vecteur fixe  $\vec{\sigma}(O)$  et donc  $M$  appartient au plan orthogonal à  $\vec{\sigma}(O)$  passant par  $O$ .

La première partie de la première loi de KEPLER est démontrée.

• **La loi des aires.**

Désormais, l'on choisit comme axes du référentiel galiléen, deux dans le plan du mouvement, disons  $Ox$  et  $Oy$ , et le troisième,  $Oz$ , orthogonal à ce plan.

Toutefois, décomposer les vecteurs pertinents dans la base des vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  est maladroit ; il faut mieux les décomposer sur la *base locale* associée aux coordonnées polaires du plan. A chaque point  $M$ , repéré par ses coordonnées polaires  $r = \|\vec{OM}\|$  et  $\theta = \widehat{xOM}$ , on associe le vecteur unitaire radial  $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$  et le vecteur unitaire  $\vec{e}_\theta$  qui lui est directement perpendiculaire dans le plan  $Oxy$ . Ces vecteurs dépendent de l'angle  $\theta$  et indirectement du temps si le point  $M$  se déplace. La définition de  $r$  entraîne que  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$  mais on devrait écrire :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r[\theta(t)]$$

Dérivons pour calculer la vitesse.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r[\theta(t)] + r \frac{d}{dt} \{ \vec{e}_r[\theta(t)] \} \\ \vec{v} &= \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ \vec{v} &= \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

car on sait<sup>13</sup> que  $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$

Attention, pas de méprise! Le fait de projeter les vecteurs sur la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  ne constitue pas un changement de référentiel. Ce sont toujours les vecteurs  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  qui sont considérés comme indépendants du temps, ce qui est la marque d'un référentiel.

Calculons maintenant le moment cinétique :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(O) &= \vec{OM} \wedge (m \vec{v}) \\ \vec{\sigma}(O) &= m (r \vec{e}_r) \wedge \left( \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \right) \\ \vec{\sigma}(O) &= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

en abrégant classiquement la notation par rapport au temps par un point au dessus de la variable ( $\dot{\theta}$  pour  $\frac{d\theta}{dt}$ ). On retrouve que moment cinétique est orthogonal au plan du

13. En effet  $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$  d'où, en dérivant,  $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$  où l'on reconnaît  $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{e}_x + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{e}_y$  où l'on reconnaît le vecteur unitaire de direction  $\theta + \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire  $\vec{e}_\theta$

mouvement et donc parallèle à  $\vec{e}_z$  ; puisqu'il est constant, il en est de même pour la quantité  $r^2 \dot{\theta}$  qu'il est d'usage de noter  $C$  et d'appeler (la suite le justifiera) *constante des aires*. Donc

$$C = r^2 \dot{\theta} = Cte$$

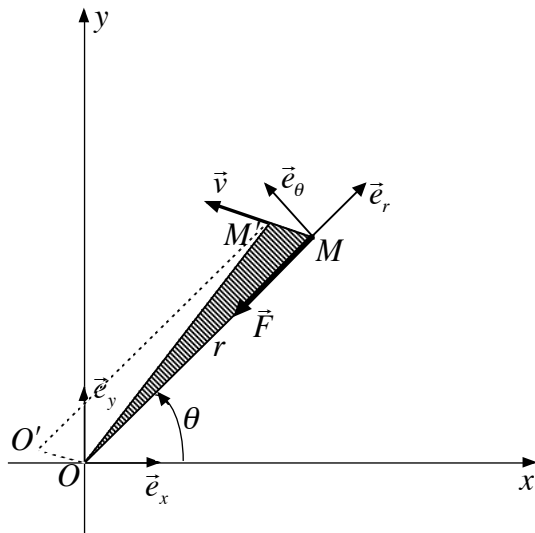


FIGURE 7 – La loi des aires.

Considérons la figure 7 p. 16 qui résume ce qui vient d'être dit, en y faisant apparaître un petit déplacement  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} dt$  parallèle à la vitesse. L'aire  $dA$  du triangle  $OMM'$  est la moitié de celle du parallélogramme  $OMM'O'$  construit sur  $OM$  et  $MM'$  et complété en pointillé sur la figure ; or on sait que l'interprétation géométrique du module du produit vectoriel de  $\overrightarrow{OM}$  et de  $\overrightarrow{MM'}$  est justement cette dernière aire. Donc :

$$dA = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{v} dt) \right\|$$

d'où

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \left\| \overrightarrow{OM} \wedge (m \vec{v}) \right\| = \frac{1}{2m} \left\| \vec{\sigma}(O) \right\| = \frac{1}{2m} m r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} C$$

Le rapport de l'aire balayée par le *rayon-vecteur*  $OM$  au temps de balayage est donc une constante égale à la moitié de la « constante des aires », ce rapport  $\frac{dA}{dt}$  est connu sous le nom de *vitesse aréolaire*.

La deuxième loi de KEPLER est démontrée.

#### • Notion de potentiel effectif.

On a vu dans le chapitre B-II (dynamique du point) que, dans le cas d'un mouvement unidirectionnel, le tracé de la fonction énergie potentielle permet d'avoir une idée assez

précise du mouvement. A deux ou trois dimensions, c'est plus difficile à visualiser. Nous allons monter ici comment se ramener d'un mouvement plan, bi-dimensionnel par essence, à un problème fictif mono-dimensionnel, tout au moins dans le cas d'une force ne dépendant que de  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$  et correspondant à une énergie potentielle  $U(r)$  que nous ne précisons pas.

On a vu plus haut que  $\overrightarrow{v} = \dot{r} \overrightarrow{e_r} + r \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta}$ , on peut donc exprimer ainsi l'énergie mécanique :

$$E_{\text{méc.}} = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v}^2 + U(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + U(r)$$

Or on a vu que  $r^2 \dot{\theta} = C = Cte$ , d'où :

$$E_{\text{méc.}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + U(r)$$

que l'on peut réécrire :

$$E_{\text{méc.}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff.}}(r)$$

en définissant une *énergie potentielle effective* par :

$$U_{\text{eff.}}(r) = U(r) + \frac{m C^2}{2 r^2}$$

On est ramené à un problème à une seule variable,  $r$ . Une subtilité est toutefois à noter : en général la loi de force est universelle et l'énergie potentielle aussi, mais la constante de aires, toute constante qu'elle soit, n'en dépend pas moins des conditions initiales. Dans le cas des planètes tournant autour du Soleil, les constantes des aires ne sont pas toutes identiques.

Prenons pour exemple une loi de force attractive en  $-Cte/r^2$  correspondant à une énergie potentielle en  $-Cte/r$  ; en notant  $k$  la constante de la loi de force, l'on a

$$U_{\text{eff.}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{m C^2}{2 r^2}$$

dont on a tracé le graphe en unités arbitraires sur la figure 8 p. 18.

La méthode exposée dans le chapitre B-II (dynamique du point) montre que si les conditions initiales donnent à l'énergie mécanique une valeur  $E_1$  positive, le point peut évoluer entre une valeur minimale de  $r$  et l'infini ; comprenez que si au départ  $r$  est croissant, le point va s'éloigner indéfiniment du centre attractif et s'en échappe et si au départ  $r$  est décroissant, le point va commencer par se rapprocher vers une distance minimale  $r_{\text{min.}}$ , telle que  $U_{\text{eff.}}(r_{\text{min.}}) = E_1$ , puis s'éloigner indéfiniment. On dit que le point  $M$  n'est pas *lié* au centre attracteur.

Par contre si les conditions initiales donnent à l'énergie mécanique une valeur  $E_2$  négative, le point peut évoluer entre une valeur minimale et une valeur maximale de  $r$  et le point  $M$  reste piégé par l'attraction du point  $O$  ; on dit qu'il est *lié*.

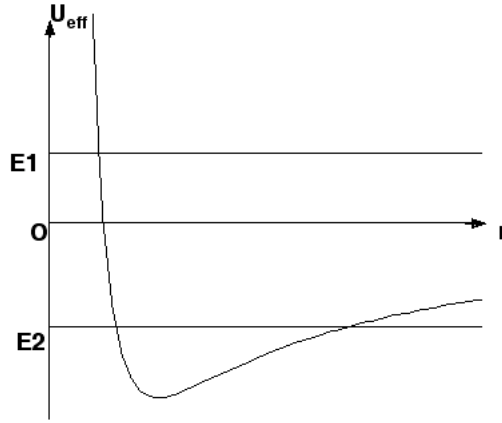


FIGURE 8 – Utilisation du graphe de l'énergie potentielle.

### 3.b La méthode de Binet.

- la problématique.

La physique suppose que l'espace est *isotrope*, c'est-à-dire a les mêmes propriétés dans toutes les directions. Une conséquence pour notre problème, c'est que tous les points à une même distance du centre  $O$ , mais dans des directions différentes, doivent, à masse égale, subir la même force; autrement dit, la force ne dépend que de  $r$ .

Dans ces conditions, la loi de la dynamique devient :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = F(r) \vec{e}_r$$

Calculons l'accélération en coordonnées polaires, en se souvenant<sup>14</sup> (cf supra) que l'on a  $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$  et que  $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right) = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

On reporte dans la loi de la dynamique et l'on projette sur les axes :

$$m \left[ (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \right] = F(r) \vec{e}_r$$

14. On complète a note antérieure par :  $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$  d'où  $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y$  c'est à dire  $-\vec{e}_r$  et par ailleurs  $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \quad \text{et} \quad 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

Ce qui donne deux équations différentielles non linéaires à deux fonctions inconnues, ce qui n'est pas aisé a priori. L'idée de BINET, c'est de déterminer dans un premier temps l'équation de la trajectoire, c'est-à-dire  $r$  en fonction de  $\theta$ . Ultérieurement, en reportant dans l'expression de la constante des aires  $r(\dot{\theta})^2 = C$ , on pourra à partir d'une primitive de  $r(\theta)^2$  et tirer quelque chose comme  $f[\theta(t)] = Ct + Cte$ , en déduire  $\theta$  en fonction du temps  $t$  qu'on reportera aussi dans  $r$  en fonction de  $\theta$  et le problème sera résolu.

Avant d'exposer la méthode de BINET, remarquons que la projection de la loi de la dynamique sur  $\vec{e}_\theta$  donne  $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ , soit après multiplication par  $r$  la relation  $2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$  où l'on reconnaît  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$  d'où  $r^2\dot{\theta} = Cte$ ; on retrouve ainsi la loi des aires.

• **la solution.**

On va transformer  $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$  en pensant que  $r$  est fonction du temps de façon composée, soit  $r[\theta(t)]$ . Etudions le terme  $\ddot{r}$  en dérivant deux fois  $r$  et en utilisant, chaque fois que possible la constante des aires  $r^2\dot{\theta} = C$  pour faire disparaître  $\dot{\theta}$  qui nuit à l'objectif ( $r(\theta)$  sous-entend que  $\theta$  sera la variable par laquelle on dérive et non la variable qui est dérivée) :

$$r = r[\theta(t)]$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2}$$

qu'on peut présenter aussi sous une forme faisant apparaître  $1/r$  qui simplifie la seconde dérivation :

$$\dot{r} = -C \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \dot{\theta} = -C \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{C}{r^2} = -C^2 \left( \frac{1}{r} \right)^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right)$$

Pour le second terme de l'accélération c'est plus simple :  $-r\dot{\theta}^2 = -C^2/r^3$ , on arrive donc à :

$$-mC^2 \left[ \left( \frac{1}{r} \right)^2 \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \left( \frac{1}{r} \right)^3 \right] = F(r)$$

Vu le rôle joué par  $1/r$ , il est d'usage de poser  $u = 1/r$  et d'exprimer la force en fonction de  $u$  par le biais de la substitution de  $1/u$  à  $r$  dans  $F(r)$ ; on va poser <sup>15</sup>  $\tilde{F}(u) = F(1/u)$ , d'où :

---

15. Le physicien écrit souvent  $F(u)$  et non  $\tilde{F}(u)$ , car, pour lui, c'est toujours la même force; mathématiquement parlant, il a tort car ce n'est pas la même fonction; tant qu'il fait de la physique, on ne lui dira rien.

$$-m C^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = \tilde{F}(u)$$

qui est une équation différentielle dont la solution donne l'équation de la trajectoire. Selon l'expression de  $\tilde{F}(u)$ , ce sera possible littéralement ou algorithmiquement (numériquement donc). La méthode répond donc à l'objectif.

- **l'énergie.**

Dans cet état d'esprit, on peut remarquer que l'énergie cinétique s'exprime aisément en fonction de  $u(\theta)$  et ses dérivées. En effet, en recyclant un résultat antérieur :

$$E_{\text{cin.}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \left( -C \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left( \frac{C}{r^2} \right)^2$$

$$E_{\text{cin.}} = \frac{m C^2}{2} \left[ u^2 + \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]$$

### 3.c Application à une force inversement proportionnelle au carré de la distance.

- **Nature de la trajectoire.**

Considérons une loi de force en  $1/r^2$ , pas forcément gravitationnelle (électrostatique par exemple), attractive ou répulsive, notée

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} \quad \text{d'où} \quad \tilde{F}(u) = -K u^2$$

avec  $K > 0$  dans le cas attractif et  $K < 0$  dans le cas répulsif. On reporte dans l'équation différentielle établie plus haut et l'on simplifie :

$$-m C^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = \tilde{F}(u) = -K u^2$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{m C^2}$$

équation particulièrement simple dont la solution est :

$$u = \frac{K}{m C^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

où  $A$  et  $\theta_0$  sont de constantes liées aux conditions initiales. Dans le plan du mouvement, il est alors adroit de choisir les directions de axes de sorte que  $\theta_0$  soit nul ; l'usage est alors d'écrire ce résultat sous la forme :

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta) \quad \text{soit} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où l'on est censé reconnaître l'équation polaire d'une conique de foyer  $O$ , d'excentricité  $e$  et de paramètre  $p$ , ellipse, parabole ou hyperbole selon la valeur de  $e$ . Il apparaît aisément par ce qui précède que  $p = m C^2 / K$ .

La seconde partie de la première loi de KEPLER est démontrée.

• **Remarque sur le caractère fermé de la trajectoire.**

Avant d'aller plus loin, remarquons que la solution trouvée a pour période  $2\pi$  ce qui fait, sous réserve que  $u$  ne s'annule pas (sinon le point part à l'infini sur l'une des branches de l'hyperbole et ne peut pas parcourir l'autre) donc dans le cas d'un point  $M$  lié (cf supra), qu'après un tour, on revient au même point, ce qui n'a rien d'évident a priori. Si cela n'avait pas été le cas, l'hypothèse implicite d'une trajectoire fermée sur laquelle KEPLER s'est appuyée aurait été fautive et il n'aurait peut-être pas trouvé de lois claires, NEWTON n'aurait pas trouvé de loi de gravitation, la physique n'aurait pas avancé et vous ne liriez pas ce cours.

On peut du reste montrer<sup>16</sup> que seules les lois en  $1/r^2$  ou en  $r$  permettent une trajectoire fermée.

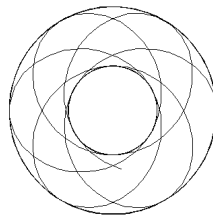


FIGURE 9 – Exemple de trajectoire non fermée.

Voici sur la figure 9 p. 21 un exemple de trajectoire périodique non fermée, encadrée par deux cercles ayant pour rayons les distances minimale et maximale prévue par l'approche

---

16. Il s'agit du théorème de J. Bertrand, qui relève plus de l'analyse mathématique que de la physique car dans la pratique il n'y a pas de problème à deux corps, il y a toujours quelques autres corps qui perturbent les trajectoires et l'on en observe jamais qui soient rigoureusement fermées, elles ne le sont que presque.

énergétique. Imaginez que Mars suive une telle trajectoire, que la Terre aussi et mettez-vous à la place de KEPLER.

• **Quelques rappels sur les coniques.**

APPOLONIUS de Perge<sup>17</sup> (vers 262 - vers 190 av. J.C.) avait déjà écrit huit livres sur les coniques, c'est dire que le sujet est vaste. Contentons-nous du strict minimum pour ce cours, le reste se trouve aisément dans n'importe quelle bibliothèque scientifique.

En fonction de l'excentricité, on distingue :

- l'ellipse pour  $e < 1$  (le cercle en est un cas particulier avec  $e = 0$ )
- la parabole pour  $e = 1$ , qui est un cas charnière réservé<sup>18</sup> aux mathématiciens
- l'hyperbole pour  $e > 1$  formée de deux branches disjointes, dont une seule peut physiquement être parcourue, partant à l'infini avec deux asymptotes communes.

Le cas le plus intéressant est celui de l'ellipse, je laisse donc au lecteur le loisir de se renseigner sur les propriétés de l'hyperbole par lui-même. Voici donc une ellipse sur la figure 10 p. 22 :

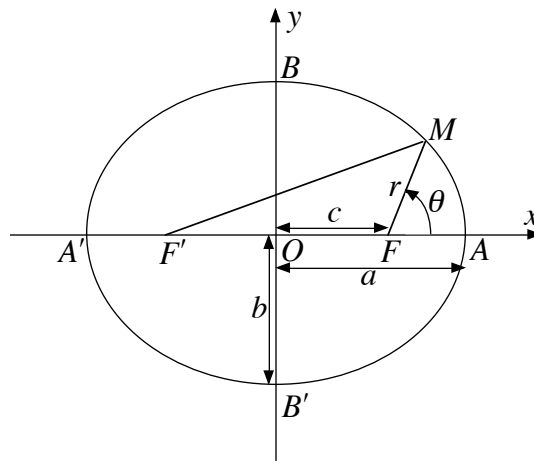


FIGURE 10 – Ellipse : notations.

On peut la définir de trois façons classiques :

- de manière géométrique, comme l'ensemble des points  $M$  tels que la somme des distances  $FM$  et  $F'M$  à deux points fixes  $F$  et  $F'$ , appelés foyers, de distance notée  $2c$ , est une constante notée  $2a$ .
- par son équation cartésienne dans un repère dont les axes sont les axes de symétrie

17. actuellement en Turquie, en ruines.

18. en physique une grandeur n'est jamais connue exactement,  $e$  n'est donc jamais rigoureusement égale à 1 et quand bien même elle le serait, la moindre perturbation en changerait la valeur.

de l'ellipse et qui est  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; l'axe  $Ox$  passe par le foyer, c'est l'axe focal ou grand axe qui coupe l'ellipse en  $A$  et  $A'$  distants de  $2a$ ; l'axe  $Oy$  est appelé petit axe et coupe l'ellipse en  $B$  et  $B'$  distants de  $2b$ . Les grandeurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont liées par la relation  $a^2 = b^2 + c^2$  et on appelle *excentricité* le rapport  $e = \frac{c}{a}$

– par son équation polaire dans un repère dont le centre est le foyer  $F$  et dont l'axe  $Fx$  est l'axe focal, équation qui est  $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  où  $p$  est appelé *paramètre* et est lié aux grandeurs  $a$  et  $b$  par la relation  $p = \frac{b^2}{a}$ . C'est cette dernière présentation qui est ici pertinente.

• **Lien entre excentricité et énergie mécanique.**

Reportons l'équation polaire  $u = \frac{1}{p}(1 + e \cos \theta)$  dans la formule de BINET relative à l'énergie cinétique :

$$E_{\text{cin.}} = \frac{mC^2}{2} \left[ u^2 + \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]$$

$$E_{\text{cin.}} = \frac{mC^2}{2p^2} [(1 + e \cos \theta)^2 + (-e \sin \theta)^2]$$

$$E_{\text{cin.}} = \frac{mC^2}{2p^2} [1 + 2e \cos \theta + e^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)]$$

$$E_{\text{cin.}} = \frac{mC^2}{2p^2} (1 + 2e \cos \theta + e^2)$$

Par ailleurs, à une force  $\frac{K}{r^2}$  correspond<sup>19</sup> une énergie potentielle en  $-\frac{K}{r} = -Ku$ , doù :

$$E_{\text{pot.}} = -Ku = -\frac{K}{p} (1 + e \cos \theta)$$

L'astuce consiste à se souvenir que  $p = mC^2/K$  (cf supra) que l'on n'utilise qu'une fois dans l'expression de l'énergie cinétique (je veux dire un seul des deux facteurs  $p$  contenus dans  $p^2$ ) donc :

$$E_{\text{cin.}} = \frac{K}{2p} (1 + 2e \cos \theta + e^2)$$

$$E_{\text{pot.}} = -\frac{K}{p} (1 + e \cos \theta) = -\frac{K}{2p} (2 + 2e \cos \theta)$$

---

19. Attention aux automatismes : le choix inhabituel de la convention de signe qui compte la force positivement dans le sens de  $-\vec{e}_r$ , ce qui explique les signes opposés entre la force et l'énergie.

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}} = \frac{K}{2p} (e^2 - 1)$$

L'angle  $\theta$  s'élimine; on s'y attendait car l'énergie mécanique doit être constante; s'il était resté, c'eût été le signe d'une erreur de calcul. Le résultat montre que  $(e^2 - 1)$  est du signe de l'énergie mécanique, donc que  $e > 1$  si elle est positive et  $e < 1$  si elle est négative.

On trouve cette relation partout, mais, en fait, elle est parfaitement inutile car elle redonne un résultat obtenu de façon plus simple et plus naturelle par la remarque énergétique établie plus haut.

• **Lien entre énergie mécanique et demi-grand axe.**

Le point le plus proche du foyer est le point  $A$  de la figure 10 p. 22; il correspond au minimum de la fonction  $r(\theta)$ , soit  $FA = \frac{p}{1+e}$ , on l'appelle de façon générale *péricentre*, en astronomie *périastre* et en particulier *périhélie* si le centre attracteur est le Soleil ou *périgée*<sup>20</sup> si le centre attracteur est la Terre.

Le point le plus éloigné du foyer est le point  $A'$  de la figure; il correspond au maximum de la fonction  $r(\theta)$ , soit  $FA' = \frac{p}{1-e}$ , on l'appelle de façon générale *apocentre*<sup>21</sup>, en astronomie *apoastre* et en particulier *aphélie* si le centre attracteur est le Soleil ou *apogée* si le centre attracteur est la Terre.

Par addition, on obtient le grand axe :

$$2a = A'F + FA = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

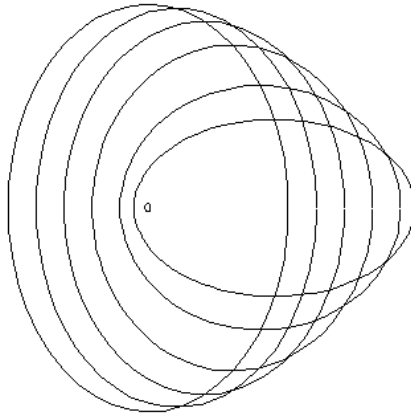


FIGURE 11 – Ellipses de même grand-axe.

20. en grec péri- indique le voisinage, la proximité, hélios désigne le Soleil, gê la Terre...

21. ...et apo- indique l'éloignement.

Si l'on y reporte une expression de  $(1 - e^2)$  tirée de la relation  $E_{\text{méc.}} = \frac{K}{2p} (e^2 - 1)$  établie ci-dessus, on obtient :

$$2a = \frac{K}{E_{\text{méc.}}}$$

La constante  $K$  ne dépend pas des conditions initiales, mais de la masse du point matériel. Ce résultat, anecdotique certes, montre que, pour une masse donnée, toutes les trajectoires possibles pour une énergie donnée, ont le même grand axe.

La figure 11 p.24 représente plusieurs orbites de même grand axe avec des excentricités différentes; le centre attracteur, au foyer commun à ces ellipses, y est représenté par un petit rond

• **Lien entre période et demi-grand axe.**

Là, l'objectif est manifeste : retrouver la troisième loi de KEPLER !

Il est clair que l'équation de l'orbite ne suffit pas car elle ne contient aucune information sur le temps de parcours. Où trouver cette information ? Si l'on se souvient de la démarche de BINET, c'est bien évidemment dans la loi des aires et son interprétation géométrique  $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} C$ . Comment faire apparaître la période, notée  $T$  ? En intégrant cette relation sur un tour, le rayon vecteur balaie alors tout l'intérieur de l'ellipse dont l'aire est donnée par la formule  $\mathcal{A}_{\text{ellipse}} = \pi a b$  et l'on a donc :

$$\frac{\mathcal{A}_{\text{ellipse}}}{T} = \frac{\pi a b}{T} = \frac{1}{2} C$$

Qu'en déduire ? A partir de là, on peut facilement tourner en rond en utilisant le grand nombre de relations géométriques et physiques disponibles. Heureusement, nous avons un but : montrer que  $T^2/a^3 = Cte$ , ce qui va nous aider<sup>22</sup>. Elevons au carré pour faire apparaître  $T^2$ , puis remplaçons  $b^2$  par  $ap$  (rappel  $p = \frac{b^2}{a}$ , cf supra) ce qui fera apparaître le  $a^3$  :

$$\frac{C^2}{4} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{\pi^2 a^3 p}{T^2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{C^2}$$

$p$  et  $C$  ne sont pas des constantes, mais l'on se souvient que  $p = m C^2/K$ , d'où :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

---

22. Les vents ne sauraient être favorables à qui navigue sans but (attribué à SÉNÈQUE).

Sans hypothèse supplémentaire sur  $K$ , l'on ne peut aller plus loin. Dans le cas de l'attraction gravitationnelle entre le soleil de masse  $M_S$  et une planète de masse  $M_P$ , on sait que  $K = G M_S M_P$  où  $G$  est la constante de gravitation universelle. Rappelons-nous aussi, car c'est un peu loin, que  $m$  est en fait la masse réduite du système Soleil-Planète, soit  $m = \frac{M_S M_P}{M_S + M_P}$ , donc :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M_S M_P} \frac{M_S M_P}{M_S + M_P} = \frac{4\pi^2}{G (M_S + M_P)} \approx \frac{4\pi^2}{G M_S}$$

car le Soleil est beaucoup plus lourd. On trouve bien, mais en bonne approximation et non rigoureusement, que c'est une constante pour tout ce qui tourne autour du Soleil. Attention, pour tout ce qui tourne autour de la Terre ce serait une autre constante où  $M_T$ , masse de la Terre, remplacerait  $M_S$ .

La troisième loi de KEPLER est démontrée.

• **Lien entre temps et position.**

La question est la suivante : l'origine de temps étant prise au passage au péricentre, quelle est la position du point  $M$  sur son orbite à l'instant  $t$  ? Là aussi, et pour les mêmes raisons que précédemment, le passage par la constante des aires s'impose mais il est judicieux de l'exprimer en fonction de la période grâce à la remarque de la précédente démonstration, soit :

$$r^2 \dot{\theta} = C = 2 \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{2\pi a b}{T}$$

Reportons l'équation polaire du mouvement puis séparons les variables :

$$\frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi a b}{T}$$

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2\pi a b}{p^2} \frac{dt}{T}$$

Malheureusement, la suite relève de la recherche algorithmique de solutions numériques. Néanmoins, le problème est ainsi résolu sous forme d'une *quadrature*, c'est à dire d'une intégrale à évaluer :

$$\int_0^{\theta(t)} \frac{d\tilde{\theta}}{(1 + e \cos \tilde{\theta})^2} = \frac{2\pi a b}{p^2} \frac{t}{T}$$

• **Le charme discret de l'anomalie excentrique.**

Une autre façon de résoudre le problème est d'utiliser une équation paramétrique de l'ellipse d'équation cartésienne  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . On vérifie aisément que  $x = a \cos \varphi$  et  $y =$

$b \sin \varphi$  correspond bien à un point de l'ellipse. On peut lui donner un sens en associant au point  $M$  repéré par  $\varphi$  par une affinité<sup>23</sup> de direction  $Oy$  et de rapport  $a/b$  le point du cercle de rayon  $a$  repéré par l'angle  $\varphi$ . Le paramètre  $\varphi$  s'appelle *anomalie excentrique* du point  $M$ . Vous n'avez rien compris, alors voyons la figure 12 p. 27, tout deviendra clair.

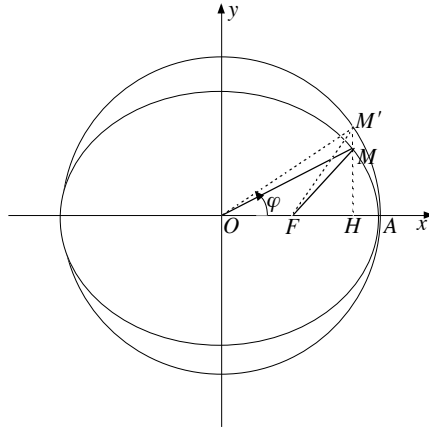


FIGURE 12 – L'anomalie excentrique.

Par intégration de  $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T}$ , on tire que l'aire balayée par le rayon-vecteur entre les positions  $FA$  à l'instant 0 et  $FM$  à l'instant  $t$ , donc l'aire du triangle curviligne  $AFM$ , est :

$$\mathcal{A}_{AFM} = \pi ab \frac{t}{T}$$

L'affinité multiplie par 1 selon  $x$  et par  $a/b$  selon  $y$  donc multiplie les aires par  $a/b$ ; elle transforme le triangle curviligne  $AFM$  en  $AFM'$ , ce qui nous ramène à un cercle plus aisé à manipuler, doù :

$$\mathcal{A}_{AFM'} = \frac{a}{b} \mathcal{A}_{AFM} = \pi a^2 \frac{t}{T}$$

Or l'aire de  $AFM'$  est la différence entre l'aire de  $AOM'$  et celle de  $FOM'$ . L'aire d'un secteur de cercle comme  $AOM'$  est proportionnelle à son angle  $\varphi$  et l'on connaît l'aire correspondant à  $2\pi$ , c'est celle du cercle donc :

$$\mathcal{A}_{AOM'} = \frac{\pi a^2}{2\pi} \varphi = \frac{a^2}{2} \varphi$$

---

23. qui à tout point  $(x, y)$  associe le point  $(x, \frac{a}{b} y)$ , une sorte d'homothétie mais ne portant que sur les ordonnées.

Par ailleurs, le point  $M$  de l'ellipse a pour coordonnées  $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ , donc par affinité, le point  $M'$  a pour coordonnées  $(a \cos \varphi, a \sin \varphi)$ . Ce qui permet d'affirmer, pour le triangle  $FOM'$ , que :

$$\mathcal{A}_{FOM'} = \frac{1}{2} OF \cdot HM' = \frac{ca \sin \varphi}{2}$$

Résumons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AOM'} - \mathcal{A}_{FOM'} &= \mathcal{A}_{AFM'} \\ \frac{a^2}{2} \varphi - \frac{ca \sin \varphi}{2} &= \pi a^2 \frac{t}{T} \\ \varphi - \frac{c}{a} \sin \varphi &= 2\pi \frac{t}{T} \\ \varphi - e \sin \varphi &= 2\pi \frac{t}{T} \end{aligned}$$

La suite relève là encore de la recherche algorithmique de solutions numériques, mais ce sera beaucoup plus simple à gérer qu'une intégration numérique.

### 3.d La méthode de l'invariant de Lagrange-Runge-Lenz.

- L'invariant et son usage.

Nous avons établi que pour un mouvement à force centrale en  $1/r^2$ , l'énergie mécanique et le moment cinétique sont des constantes ; leurs définitions font apparaître la vitesse du point et à ce titre les expressions  $E_{\text{méc.}} = Cte$  et  $\vec{\sigma}(O) = \vec{C}te$  sont des équations d'ordre 1 déduites des lois de la dynamique qui sont des équations différentielles d'ordre 2. Ce genre de constantes s'appellent des *intégrales premières du mouvement*.

Une autre intégrale première, valable uniquement<sup>24</sup> pour les forces en  $1/r^2$ , a été mise en évidence, elle se nomme invariant<sup>25</sup> de LAGRANGE-RUNGE-LENZ ou encore vecteur excentricité. On part de la loi de la dynamique sous la forme :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$$

puis on se sert du fait que  $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$ , on fait apparaître la constante des aires  $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$  et l'on utilise la formule de dérivation d'une fonction composée, d'où :

24. Mais comme les principales forces de l'Univers (forces gravitationnelles et électrostatiques) sont en  $1/r^2$ , ce n'est pas réductible.

25. En fait il y a, dans la littérature scientifique, plusieurs invariants qui se déduisent les uns des autres par multiplication scalaire par une constante ou multiplication vectorielle (produit vectoriel) par un vecteur constant. J'ai choisi la forme qui apparaît le plus naturellement dans une démarche heuristique (c'est-à-dire de recherche et non de vérification).

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r = \frac{K}{r^2} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = \frac{K}{r^2 \dot{\theta}} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{C} \frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt}$$

Par intégration, on obtient :

$$m \vec{v} = \frac{K}{C} \vec{e}_\theta(t) + \vec{Cte}$$

En notant  $\vec{L}$  ce vecteur constant, dépendant comme toute intégrale première des conditions initiales, on a :

$$\vec{L} = m \vec{v} - \frac{K}{C} \vec{e}_\theta = m (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) - \frac{K}{C} \vec{e}_\theta = \vec{Cte}$$

Si, dans le plan du mouvement, l'on choisit les axes de sorte que  $\vec{L}$  soit parallèle à  $Oy$  et de même sens, la projection de cette relation sur  $e_\theta$  et l'utilisation de la constante des aires conduit à :

$$\vec{L} \cdot \vec{e}_\theta = m r \dot{\theta} - \frac{K}{C}$$

$$(\|\vec{L}\| \vec{e}_y) \cdot (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) = m \frac{C}{r} - \frac{K}{C}$$

$$\|\vec{L}\| \cos \theta = m \frac{C}{r} - \frac{K}{C}$$

En réorganisant, on retrouve l'équation d'une conique de foyer le centre de forces :

$$\frac{1}{r} = \frac{K}{m C^2} + \frac{\|\vec{L}\|}{m C} \cos \theta = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta)$$

avec  $p = \frac{m C^2}{K}$  (résultat que l'on retrouve) et  $e = \frac{\|\vec{L}\| C}{K}$ . A partir de là, on peut retrouver les diverses relations établies plus haut et de la même manière, sauf le lien énergie-excentricité que je vous laisse le soin<sup>26</sup> de redémontrer si le cœur vous en dit.

A noter qu'un intérêt de  $\vec{\sigma}$  c'est de donner la direction du plan de l'orbite et un intérêt de  $\vec{L}$ , c'est de donner la direction du petit axe (et donc du grand axe).

---

<sup>26</sup>. Si vous n'en avez pas le courage, allez donc voir un peu plus loin dans l'étude sur le lancement d'un satellite.

• Un exemple dans le cas d'une force répulsive.

Nous allons considérer ici la trajectoire d'une particule chargée positivement, disons une particule  $\alpha$ , c'est-à-dire un ion  $He^{2+}$ , dans le champ répulsif d'un ion positif très lourd, disons un ion du réseau cristallin de l'or, c'est-à-dire un ion  $Au^+$ , confondu avec le centre de masse du système, donc immobile, et représenté sur la figure 13 p. 30 par le gros point noir en  $O$ . La force d'interaction subie par la particule est répulsive, notée<sup>27</sup> en  $K/r^2$  :

$$\vec{F} = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$$

On choisit l'axe  $Ox$  parallèle à la vitesse de la particule quand elle est loin et se dirige vers l'ion (position  $M_0$ , vitesse  $\vec{v}_0$ ). La base unitaire locale  $(\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_{\theta_0})$  se confond, si le point est assez loin (plus que sur la figure, forcément resserrée pour tenir sur la page) se confond avec  $(-\vec{e}_x, -\vec{e}_y)$  comme le montre la figure et un peu d'imagination pour rejeter  $M_0$  loin vers la gauche. Le point  $O$  se trouve à une distance  $b_0$ , appelé *paramètre d'impact*, de la droite passant par  $M_0$  et parallèle à  $\vec{v}_0$ , en fait l'asymptote de la trajectoire puisque  $M_0$  est très loin.

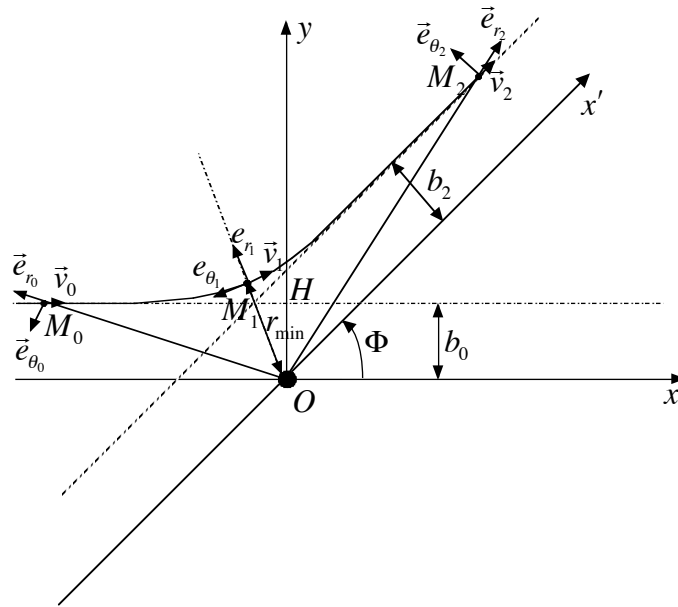


FIGURE 13 – Mouvement avec une force centrale répulsive.

A une loi de force en  $+K/r^2$ , correspond une énergie potentielle en  $+K/r$  donc positive, tout comme l'énergie cinétique, positive par essence, et donc comme l'énergie mécanique somme de deux termes positifs. La remarque énergétique exposé plus haut, ou encore le

27. On change donc de convention pour travailler avec  $K$  positif.

lien entre  $(e^2 - 1)$  et l'énergie, montrent que la trajectoire est une hyperbole comme la présente la figure 13 p.30.

Deux points y sont intéressants.

- d'une part le point  $M_1$  (vitesse  $\vec{v}_1$ ) le plus proche du centre  $O$ , à une distance  $r_{\min.}$  de celui-ci ; c'est le *point d'approche minimale*.
- d'autre part, un point  $M_2$  (vitesse  $\vec{v}_2$ ), très éloigné de  $O$  (bien plus que sur la figure), pratiquement sur l'asymptote de direction  $Ox'$  (distance  $b_2$  entre cet axe et l'asymptote) ; la base unitaire locale  $(\vec{e}_{r_2}, \vec{e}_{\theta_2})$  se confond, si le point est assez loin avec  $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$  comme le montre la figure (on n'y a pas tracé  $Oy'$  car il y a déjà beaucoup de monde).

Utilisons toutes les intégrales premières connues.

L'énergie mécanique se conserve ; on tient compte qu'à l'infini ( $M_0$  et  $M_1$ ) l'énergie potentielle en  $K/r$  s'annule, donc :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{K}{r_{\min.}} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

On remarque déjà que  $v_2 = v_0$  en module.

Le moment cinétique se conserve. Pour un point éloigné à l'infini, on peut se troubler. On procède ainsi  $\overrightarrow{OM_0} \wedge \vec{v}_0 = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_0}) \wedge \vec{v}_0$  où  $H$  est la projection de la droite définie par  $M_0$  et  $\vec{v}_0$  ;  $\overrightarrow{HM_0}$  est parallèle à la vitesse et donne un produit vectoriel nul ; on retrouve la propriété classique qu'un moment est le produit de la quantité de mouvement par la distance du point de calcul à la droite support de la vitesse. Après simplification par la masse, et compte tenu de  $v_2 = v_0$ , on a donc :

$$b_0 v_0 = r_{\min.} v_1 = b_2 v_0$$

On remarque déjà que  $b_2 = b_0$ , ce qui est normal car  $O$ , foyer de l'hyperbole, a une position symétrique vis-à-vis des asymptotes.

Dans le système suivant :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{K}{r_{\min.}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$r_{\min.} v_1 = b_0 v_0$$

tirons  $r_{\min.}$  en fonction de  $v_1$  dans la seconde relation et reportons dans la première ; on trouve une équation en  $v_1$  :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{K}{b_0 v_0} v_1 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

dont la solution est :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \left( \frac{K}{m b_0 v_0} \right)^2} - \frac{K}{m b_0 v_0}$$

et l'on tire  $r_{\min.}$  par  $r_{\min.} = \frac{b_0 v_0}{v_1}$

Utilisons maintenant l'invariant de LAGRANGE-RUNGE-LENZ (en changeant le signe de  $K$  puisqu'on a changé de convention) entre les deux positions asymptotiques où la constante des aires est le module du moment cinétique divisé par la masse, changé de signe avec notre figure car l'angle  $(Ox, OM)$  décroît, on vient de le calculer donc  $C = -b_0 v_0$ , avec un signe négatif qui compense celui sur  $K$ . La conservation de l'invariant  $m \vec{v} + \frac{K}{C} \vec{e}_\theta$  soit  $m \vec{v} - \frac{K}{b_0 v_0} \vec{e}_\theta$  donne

$$m \vec{v}_0 - \frac{K}{b_0 v_0} \vec{e}_{\theta_0} = m \vec{v}_2 - \frac{K}{b_0 v_0} \vec{e}_{\theta_2}$$

En rappelant que la figure empêche de voir qu'à l'infini  $\vec{e}_{\theta_0} = -\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_{\theta_2} = \vec{e}_{y'}$ , et aussi que  $\|\vec{v}_2\| = v_0$ , les projections sur  $Ox$  et  $Oy$ , en appelant  $\Phi$  l'angle  $(Ox, Ox')$  appelé *déviatio*n donnent :

$$\begin{aligned} m v_0 &= m v_0 \cos \Phi + \frac{K}{b_0 v_0} \sin \Phi & \text{et} & \quad \frac{K}{b_0 v_0} = m v_0 \sin \Phi - \frac{K}{b_0 v_0} \cos \Phi \\ m v_0 (1 - \cos \Phi) &= \frac{K}{b_0 v_0} \sin \Phi & \text{et} & \quad \frac{K}{b_0 v_0} (1 + \cos \Phi) = m v_0 \sin \Phi \\ 2m v_0 \sin^2(\Phi/2) &= 2 \frac{K}{b_0 v_0} \sin(\Phi/2) \cos(\Phi/2) & & \quad 2 \frac{K}{b_0 v_0} \cos^2(\Phi/2) = 2m v_0 \sin(\Phi/2) \cos(\Phi/2) \\ \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) &= \frac{K}{m v_0^2 b_0} & & \quad \text{et... la même chose} \end{aligned}$$

Le résultat est simple : la tangente de la demi-déviatio

n est inversement proportionnelle à l'énergie et inversement proportionnelle au paramètre d'impact.

Remarque : on trouvait le résultat plus vite en projetant sur les bissectrices de  $Ox$  et  $Ox'$ . Je le savais, mais ai préféré une démarche plus naïve<sup>28</sup>.

Remarque : L'exemple de l'or et de la particule  $\alpha$  n'est bien sûr pas innocent. Il s'agit de l'expérience de RUTHEFORD qui a permis de valider le modèle planétaire de l'atome avec un noyau positif très petit autour duquel tournent les électrons, au détriment du modèle de J. J. THOMSON<sup>29</sup> du type plum-pudding où l'atome est une grosse boule contenant les électrons, ravalés au rang de raisins secs.

### 3.e Lancement d'un satellite artificiel.

La mise en orbite d'un satellite s'effectue forcément en deux temps. En effet quand les réacteurs de la fusée de lancement s'arrêtent, la fusée s'est élevée dans l'air en un point  $A$

28. au sens étymologique de l'oisillon au nid.

29. à ne pas confondre avec W. THOMSON, lord KELVIN.

d'altitude toutefois négligeable par rapport au rayon terrestre. Ensuite, soumise à la seule force de gravitation, elle décrit une ellipse ayant le centre  $O$  de la Terre comme foyer ; la figure 14 p. 33 montre que cette ellipse recoupe la surface terrestre en un point  $A'$ . Dès lors, il ne s'agit plus d'un lanceur de satellite mais d'un missile intercontinental.

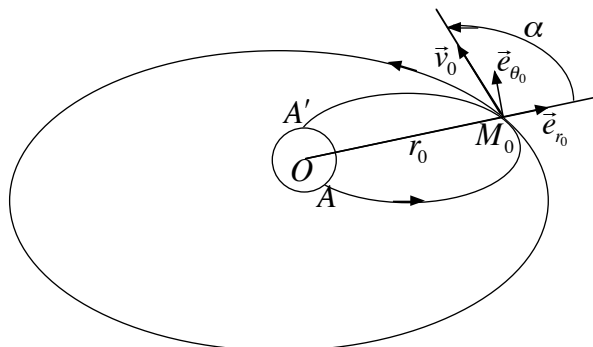


FIGURE 14 – Lancement d'un satellite.

La première ellipse est l'*ellipse de transfert* et la phase de fonctionnement des réacteurs près de  $A$  et la phase de *lancement*. Pour placer le satellite sur l'orbite souhaitée, l'on fait fonctionner à nouveau les réacteurs d'un dernier étage conservé à cet effet, c'est la phase de *satellisation* ; elle a lieu près de l'apogée car ce serait stupide de le faire ailleurs. A la fin de cette phase, le satellite s'est certes déplacé mais d'une quantité négligeable par rapport au périmètre de son orbite définitive ; il est en un point  $M_0$ , à une distance  $r_0$  du centre de la Terre, avec une vitesse  $\vec{v}_0$  de module  $v_0$  faisant l'angle  $\alpha$  (compris entre 0 et  $\pi$ ) avec le vecteur  $\vec{e}_{r_0}$  de la base locale  $(\vec{e}_{r_0}, \vec{e}_{\theta_0}, \vec{e}_z)$ .

En notant  $m$  la masse du satellite et  $M$  la masse de la Terre, l'énergie mécanique est :

$$E_{\text{méc.}} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

Pour que la trajectoire soit elliptique, on a vu qu'il faut que l'énergie soit négative, sinon le satellite échappe à l'attraction terrestre, ce qui peut être voulu, par exemple pour aller explorer le système solaire. Pour  $r_0$  donnée, la vitesse critique correspondant à l'énergie nulle correspond à une énergie nulle, on l'appelle *vitesse de libération* et son expression est :

$$v_{\text{lib.}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

Supposons que  $v_0$  soit inférieur à  $v_{\text{lib.}}$  ; la trajectoire est alors elliptique. Déterminons-en les caractéristiques. Son plan est bien sûr celui contenant  $\vec{OM}_0$  et  $\vec{v}_0$ . Pour le reste,

déterminons les autres intégrales premières du mouvement et utilisons les formules établies plus haut. Le moment cinétique, la constante des aires et l'invariant de LAGRANGE-RUNGE-LENZ sont respectivement :

$$\vec{\sigma}(O) = \overrightarrow{OM_0} \wedge (m \vec{v}_0) = m r_0 v_0 \sin \alpha \vec{e}_z$$

$$C = \frac{\|\vec{\sigma}(O)\|}{m} = r_0 v_0 \sin \alpha$$

$$\vec{L} = m \vec{v}_0 - \frac{GMm}{C} \vec{e}_{\theta_0} = m \left[ v_0 \cos \alpha \vec{e}_{r_0} + \left( v_0 \sin \alpha - \frac{GMm}{r_0 v_0 \sin \alpha} \right) \vec{e}_{\theta_0} \right]$$

La direction de  $\vec{L}$  est celle du petit axe de l'ellipse (cf supra), le grand axe ou axe focal passe par le foyer  $O$  et est perpendiculaire à  $\vec{L}$ , il est donc connu.

Les formules  $p = \frac{mC^2}{K}$  et  $e = \frac{\|\vec{L}\|C}{K}$  établies plus haut, donnent le paramètre et l'excentricité, ce qui détermine totalement l'ellipse par son équation polaire. Détaillons :

$$p = \frac{mC^2}{K} = \frac{m(r_0 v_0 \sin \alpha)^2}{GMm} = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{GM}$$

$$\vec{L}^2 = m^2 \left[ (v_0 \cos \alpha)^2 + \left( v_0 \sin \alpha - \frac{GM}{r_0 v_0 \sin \alpha} \right)^2 \right] = m^2 \left[ v_0^2 - \frac{2GM}{r_0} + \left( \frac{GM}{r_0 v_0 \sin \alpha} \right)^2 \right]$$

$$e^2 = \frac{\vec{L}^2 C^2}{K^2} = \left( \frac{r_0 v_0 \sin \alpha}{GMm} \right)^2 \vec{L}^2$$

$$e^2 = \left( \frac{r_0 v_0 \sin \alpha}{GM} \right)^2 \left[ v_0^2 - \frac{2GM}{r_0} + \left( \frac{GM}{r_0 v_0 \sin \alpha} \right)^2 \right]$$

$$e^2 = 1 + \left( \frac{r_0 v_0 \sin \alpha}{GM} \right)^2 \left( \frac{2}{m} \right) \left[ \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} \right]$$

En fin de calcul, on a légèrement «trituré» l'expression de  $e^2$  pour retrouver le lien entre  $(e^2 - 1)$  et l'énergie.

Si l'on tient à retrouver les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  de l'ellipse, on part de  $a = p/(1 - e^2)$  trouvé plus haut (lien entre grand axe et énergie), puis on tire  $c$  de  $e = c/a$  (rappels sur les coniques) et enfin  $b$  de  $a^2 = b^2 + c^2$  (rappels sur les coniques).

Remarque : Le mouvement est circulaire pour  $e = 0$  et  $\alpha = \pi/2$  mais plutôt que résoudre l'équation bicarrée obtenue (c'est facile, on reconnaît un carré parfait), on étudie directement un mouvement circulaire d'accélération centripète  $v^2/r$ , en notant  $r_0$  le rayon et  $v_{\text{circ}}$  la vitesse :

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

$$-m \frac{v_{\text{circ}}^2}{r_0} \vec{e}_r = -\frac{GMm}{r_0^2} \vec{e}_r$$

$$v_{\text{circ.}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

Le rapport entre vitesse circulaire et vitesse de libération (cf supra) est classique :

$$v_{\text{lib.}} = v_{\text{circ.}} \sqrt{2}$$

## 4 Mesures astronomiques.

### 4.a Mesure des distances

- Le rayon terrestre.

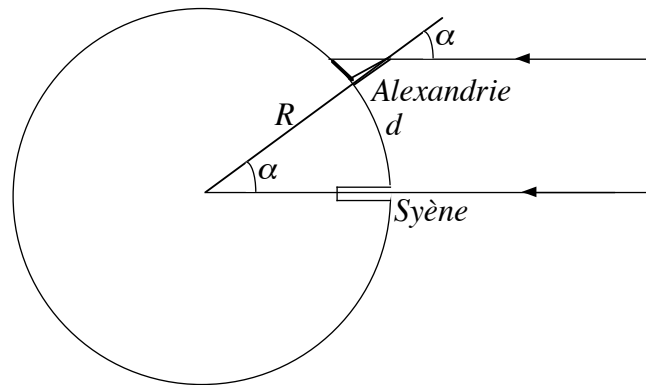


FIGURE 15 – Mesure du rayon terrestre par Hératosthène.

La première mesure du rayon terrestre a été effectuée par ERATOSTHÈNE de Cyrène<sup>30</sup> au III<sup>e</sup> siècle avant J.C., sur la constatation que le jour du solstice d'été à Syène<sup>31</sup>, ville située (presque) sur le tropique du Cancer, le soleil à midi est (presque) exactement à la verticale, on le constate parce que les rayons solaires parviennent jusqu'au fond d'un puits profond ; le même jour, à la même heure, à Alexandrie<sup>32</sup>, le soleil n'est pas à la verticale et la longueur de l'ombre d'un obélisque permet de mesurer la hauteur (angulaire)  $\alpha$  du soleil dans le ciel, ce qui donne la valeur angulaire, vue du centre de la Terre de l'angle entre les deux villes ; comme on connaissait la distance  $d$  entre les deux villes, il a été aisé d'en déduire le rayon terrestre dans l'hypothèse d'une Terre sphérique et d'un soleil suffisamment éloigné pour que ses rayons soient quasiment parallèles, par  $\frac{d}{\alpha} = \frac{2\pi R}{2\pi}$ . Le tout est illustré par la figure 15 p. 35.

30. actuellement en Lybie, en ruines.

31. actuellement Assouan, en Egypte, sur le Nil.

32. à l'ouest du delta du Nil, actuellement le plus grand port d'Egypte.

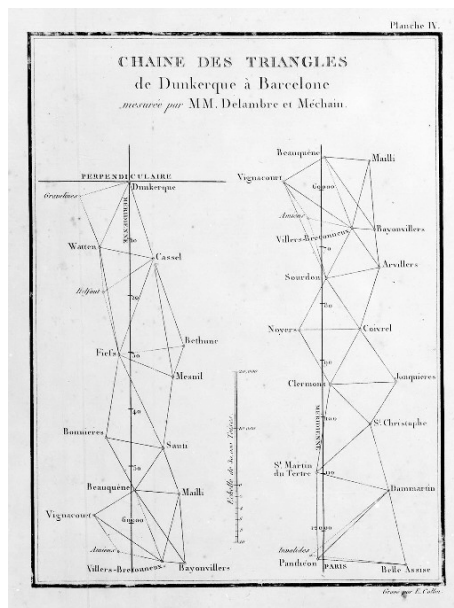


FIGURE 16 – Mesure du méridien, chaîne de triangulations.

Cette mesure a été reprise à partir de 1792, en application d'un décret de l'Assemblée Constituante définissant le mètre comme dix-millionième partie du quart de méridien terrestre. Une portion de méridien entre Dunkerque et Barcelone, dont on connaissait les latitudes par observation de la position dans le ciel de l'étoile polaire, a été ainsi mesurée par les astronomes de l'observatoire de Paris Jean-Baptiste DELAMBRE et Pierre MÉCHAIN, par une succession de triangulations entre sommets de collines, dont une partie figure sur le document 16 p. 36

La valeur actuellement admise du rayon de l'équateur est 6378 km.

• **La Lune, son rayon, sa distance à la Terre.**

Les grecs avaient déjà constaté, lors d'une éclipse de Lune que le temps que celle-ci reste totalement dans l'ombre est à peu près trois fois le temps qu'elle met à y entrer entièrement ou à en sortir entièrement ; la figure 17 p. 37, où sont dessinées cinq positions<sup>33</sup> de la Lune entre lesquelles la Lune s'est déplacée pendant le même temps d'une même longueur égale à son diamètre, montre que celui-ci est le tiers du diamètre de la Terre. La précision des mesures actuelles donnent un résultat un peu inférieur  $R_{\text{Lune}}/R_{\text{Terre}} = 0,27$

33. Dans la première, la Lune commence à entrer dans l'ombre de la Terre (premier contact), dans la deuxième, elle finit (deuxième contact), dans la quatrième, elle commence à sortir (troisième contact) et dans la dernière, elle finit (quatrième contact).

et  $R_L = 1\,737$  km.

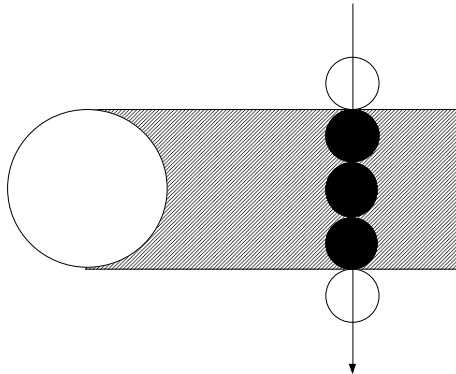


FIGURE 17 – Eclipse de Lune.

Par ailleurs, ils avaient mesuré que la Lune est vue sous un angle  $\alpha$  d'environ un demi-degré; le rayon  $R$  de la Lune et la distance Terre-Lune sont dès lors liés par  $\frac{R}{d} = \tan \frac{\alpha}{2}$  comme le montre la figure 18 p. 37. La valeur actuellement admise de la distance Terre-Lune est 384 milliers de kilomètres.

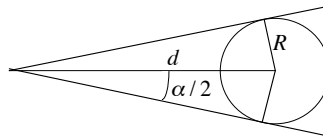


FIGURE 18 – Mesure de la distance Terre-Lune.

#### • Distances dans le système solaire.

On a vu comment KEPLER a réalisé des triangulations pour trouver la taille relative des orbites de Mars et de la Terre, puis des autres planètes. Or qui dit taille relative dit unité arbitraire de longueur. Il a été naturellement convenu, anthropocentrisme oblige, d'appeler *unité astronomique* (U.A. en abrégé) le demi-grand axe de l'orbite terrestre. Restait désormais à relier l'U.A. aux unités de longueur. L'idée est de faire de la triangulation entre une planète  $P$  dont on connaît la distance en U.A. et deux points  $M_1$  et  $M_2$  sur Terre dont on connaît la distance en kilomètres. Mais l'angle  $\widehat{M_1PM_2}$  est très petit et la mesure manque de précision. Pour se donner la maximum de chances, on prend  $M_1$  et  $M_2$  éloignés et  $P$  proche, en pratique Mars ou Vénus, lors de la conjonction quand la distance Terre-planète est minimale.

La première mesure a été réalisée en 1672<sup>34</sup> par les astronomes CASSINI et RICHER, avec

34. C'était donc avant la naissance du kilomètre, mais cela ne change rien à notre histoire.

deux observations de Mars, l'une à Paris, l'autre à Cayenne en Guyane. L'angle mesuré, que l'on appelle *parallaxe* était de 25", moins d'un centième de degré ; bien sûr cette mesure n'a pas été faite au rapporteur mais par comparaison des positions de Mars par rapport aux étoiles <sup>35</sup>.



FIGURE 19 – Eros, photographié en 1996 par la sonde NEAR.

En 1900 et 1901, on a profité de la conjonction avec un astéroïde atypique <sup>36</sup> nommé Eros (voir photographie 19 p. 38), un gros caillou informe dont la plus grande longueur est de 33 km, passant alors près de la Terre, pour améliorer la précision.

De nos jours, c'est beaucoup plus facile : on arrive, quelque sportif que ce soit, à recueillir l'écho d'une impulsion radar sur Vénus, comme le signal radar se déplace à la vitesse de la lumière, qui est connue, on mesure les distances de façon absolue.

La valeur admise de nos jours est 1 U.A. =  $150 \cdot 10^6$  km.

#### • Distances des étoiles de notre galaxie.

L'étoile la plus proche est encore bien trop loin de la Terre pour avoir une parallaxe mesurable. L'idée est d'augmenter la distance entre  $M_1$  et  $M_2$  en les choisissant au périhélie et à l'aphélie de la Terre, c'est à dire en comparant les images du ciel à six mois d'intervalle ; la plupart de étoiles conservent leur positions relatives, les plus proches se déplacent par rapport à leur voisines et l'on peut ainsi mesurer leur parallaxe. Pour la plus proche <sup>37</sup>, la parallaxe est encore minime (0,77" soit 0,2 millièmes de degrés) mesurable avec un puissant télescope.

On retrouve la situation de la figure 18 p.37, en remplaçant  $R$  par  $a$ . Comme l'angle est petit, on peut le confondre avec sa tangente et  $d = \frac{2a}{\alpha}$ . On a défini une unité adaptée, le *parsec* <sup>38</sup> qui est la distance correspondant à une parallaxe d'une seconde d'angle ; ce qui

35. Pour visualiser l'expérience, quittez votre ordinateur et sortez, il fait beau dehors ; tendez votre bras et levez un pouce, fermez un œil et notez quel arbre de l'arrière plan est aligné avec votre pouce, ouvrez l'œil et fermez l'autre et notez que ce n'est plus le même arbre qui est aligné avec votre pouce. Remplacez vos yeux par Paris et Cayenne, votre pouce par Mars et les arbres par les étoiles et vous y êtes.

36. Les astéroïdes sont une multitudes de petits astres dont l'orbite est en général comprise entre celle de Mars et de Jupiter. Eros est atypique parce que son orbite est en gros entre celle de Mars et de la Terre.

37. Elle se trouve dans la constellation du Centaure et s'appelle Alpha Centauri ou Proxima Centauri

38. pour par(allaxe) sec(onde).

revient à dire que numériquement  $d$  en parsec et  $\alpha$  en secondes sont liés par  $d = \frac{1}{\alpha}$

Pour avoir la valeur du parsec en unités astronomique, il suffit de remarquer que pour  $d = 1$  parsec et  $a = 1$  U.A., on a, par définition,  $\alpha = 1'' = \frac{2\pi}{360 \cdot 60 \cdot 60}$  radian, d'où 1 parsec vaut  $\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} = 206\,265$  U.A. ; à noter que, de par sa définition, le parsec et l'unité astronomique sont liés l'un à l'autre par une constante mathématique. Par contre, la valeur en mètres de l'U.A. est entachée de incertitudes de mesure qui se reportent donc sur le parsec ; le parsec vaut  $30,9 \cdot 10^{15}$  m. Une autre unité astronomique couramment utilisée est l'année-lumière (A.L. en abrégée) qui est la distance parcourue par la lumière pendant un an à la vitesse  $c = 2,997 \cdot 10^8$  m/s soit  $365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 2,997 \cdot 10^8 = 9,46 \cdot 10^{15}$  m ; à la différence du parsec, c'est une valeur qui est plus précise car la vitesse de la lumière est connue très précisément<sup>39</sup>. Le parsec et l'année-lumière sont du même ordre de grandeur avec 1 parsec égal à 3,26 A.L.

Revenons à l'étoile la plus proche, elle a une parallaxe de 0,77" et se trouve donc à  $1/0,77 = 1,3$  parsec soit 4,2 A.L. ; sa lumière met 4,2 ans à nous parvenir.

### • Distances des galaxies.

Bien que ce soit extrêmement délicat, on arrive à mesurer la parallaxe des étoiles de notre galaxie et des nuages de MAGELLAN<sup>40</sup>, deux petites galaxies très proches de la nôtre. Au delà, c'est impossible. Comment donc mesurer la distance qui nous sépare d'une galaxie ?

Remarquons tout d'abord que l'éclat d'une étoile dépend de la puissance lumineuse qu'elle émet mais aussi de sa distance. Si elle est à une distance  $d$ , une sphère de rayon  $d$ , passant par la Terre, est traversée par la puissance émise  $P$ , elle reçoit donc, par unité de surface, une puissance surfacique  $P_S = \frac{P}{4\pi d^2}$  ; on appelle cette puissance surfacique, exprimée dans une échelle logarithmique, *magnitude apparente* ; on la mesure en concentrant la puissance d'un télescope de surface  $S$ , soit  $P_S S$  sur un corps absorbant appelé *bolomètre* dont on mesure l'échauffement.

Une façon indirecte de donner la puissance lumineuse émise est de donner la magnitude apparente qu'aurait l'étoile si elle était à une distance conventionnelle  $d_0$  de 10 parsecs, appelée *magnitude absolue*, correspondant à une puissance surfacique  $P_{S0} = \frac{P}{4\pi d_0^2}$  qui s'avère donc être proportionnelle à  $P$  avec un coefficient parfaitement déterminé. Si l'on connaissait la différence entre magnitude absolue et magnitude relative, en inversant la relation logarithmique, on aurait le rapport  $P_{S0}/P_S$ , donc en extrayant la racine, le rapport  $d/d_0$ , donc  $d$  puisque  $d_0$  est conventionnel donc connu. Donc si l'on connaissait la magnitude absolue d'une étoile d'une galaxie, on en déduirait sa distance (en mesurant sa magnitude relative avec un bolomètre ultra-sensible). Mais cela semble impossible, hélas. Quoique...

C'est là qu'intervient Henrietta LEAVITT, astronome américaine qui entre en 1895, à

---

39. en fait exactement, car on a décidé, il y a peu, de fixer une fois pour toute la valeur  $c$  et d'en déduire la valeur du mètre à partir de celle de la seconde pour maintenir cette valeur.

40. Au vu de leur nom, vous avez bien sûr compris qu'ils ne sont visibles que dans l'hémisphère sud.

l'âge de 27 ans à l'observatoire de l'université Harvard à Cambridge (Massachusetts, USA) comme volontaire. Elle est brillante mais c'est une femme et est donc<sup>41</sup> reléguée à l'obscur travail de mesure de la magnitude relative des étoiles. Ce qui ne l'empêchera pas de faire une découverte majeure.

Il existe une catégorie d'étoiles, les *céphéides* ou *étoiles variables*, qui ont la particularité d'avoir une magnitude qui varie de façon périodique entre un minimum et un maximum ; ce sont des étoiles géantes<sup>42</sup> qui se dilatent (en se refroidissant et en brillant moins) et se contractent (en s'échauffant et en brillant plus). H. LEAVITT s'intéressa tout particulièrement aux céphéides contenues dans le nuage de MAGELLAN dont la taille est petite par rapport à la distance dont il est séparé de nous, ainsi, toutes ses céphéides sont quasiment à la même distance de nous et ont donc le même écart entre magnitude absolue et magnitude apparente (cf supra). Elle mit en évidence une relation linéaire<sup>43</sup> entre la magnitude moyenne et le logarithme de la période du phénomène.

Si l'on veut trouver la distance  $d_2$  d'une galaxie, on observe ses céphéides, on utilise la formule de LEAVITT et on en déduit la magnitude qu'elles auraient à la distance  $d_1$  des nuages de MAGELLAN. Par le même raisonnement qu'un peu plus haut, on en déduit le rapport  $d_2/d_1$ . La mesure de  $d_1$  a été effectuée en 1916 par une classique méthode de parallaxe.

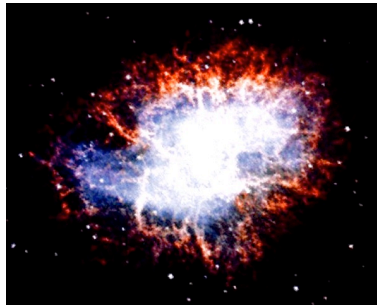


FIGURE 20 – La nébuleuse du crabe.

Pour les galaxies lointaines dont les céphéides ne sont plus observables, on essaie d'observer des objets typiques dont les propriétés ont été, à l'instar des céphéides, «calibrées»

---

41. Je prie le lecteur de ne pas prendre ce « donc » au premier degré, il est ironique.

42. par rapport à notre soleil.

43. Le physicien dit systématiquement «linéaire», là ou il devrait dire «affine».

sur les galaxies proches, par exemple les super-novae (Il s'agit d'étoiles qui explosent après avoir consommé tout leur combustible nucléaire; elles se mettent à briller intensément pendant un temps très bref... à l'échelle de l'univers, disons quelques mois. La plus connue est celle apparue en 1054, observée par les chinois et l'on observe de nos jours les restes de son explosion sous le nom de Nébuleuse du Crabe, voir figure 20 p. 40).

#### 4.b La troisième loi de Kepler comme balance de l'Univers.

Rappelons (cf supra) que pour un corps orbitant autour d'un corps bien plus lourd que lui et de masse  $M$ , la période  $T$  et le demi-grand axe  $a$  de son orbite sont liés par la relation :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

et l'on conçoit dès lors qu'on peut ainsi déterminer la masse  $M$  de l'astre attracteur. Prenons un exemple :

La Terre tourne autour du Soleil de masse  $M_S$  avec une orbite de période sidérale<sup>44</sup>  $T_T = 365$  jours et un demi-grand axe  $a_T = 150 \cdot 10^6$  km.

La Lune<sup>45</sup> tourne autour de la Terre de masse  $M_T$  avec une orbite de période sidérale  $T_L = 27,3$  jours et un demi-grand axe  $a_L = 384 \cdot 10^3$  km.

On a donc :

$$\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \quad \text{et} \quad \frac{T_L^2}{a_L^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

donc, en faisant le rapport :

$$\frac{M_S}{M_T} = \left(\frac{a_T}{a_L}\right)^3 \left(\frac{T_L}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{150 \cdot 10^6}{384 \cdot 10^3}\right)^3 \left(\frac{27,3}{365}\right)^2 = 333 \cdot 10^3$$

Par cette méthode, on peut mesurer, de façon relative, par exemple en masse terrestre prise comme unité, la masse de tous les astres dès lors qu'ils ont un satellite, et au delà la masse d'un couple d'étoiles proches tournant autour de leur centre de gravité, la masse d'une galaxie à partir de la rotation de ses étoile externes, etc.

---

44. c'est-à-dire par rapport aux étoiles, c'est-à-dire encore dans le référentiel de COPERNIC.

45. En fait la lune n'a pas une masse négligeable devant celle de la Terre, on utilisera donc la masse réduite. Par ailleurs l'orbite de la Lune est très perturbée, essentiellement par l'aplatissement des pôles. L'exemple est donc mal choisi; mais comme c'est notre voisine, on fermera les yeux.

#### 4.c Mesure de la masse de la Terre et de la constante de gravitation.

- **Mesure du champ de pesanteur.**

Pour avoir les masses de façon absolue, il « suffit » de peser la Terre. Comme elle est presque sphérique de rayon  $R$ , son champ de gravitation<sup>46</sup> à sa surface est  $g = \frac{GM_T}{R^2}$  et vaut  $9,81 \text{ m/s}^2$ , d'où, avec  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$  :

$$GM_T = 9,81 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2 = 4,02 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

- **L'expérience de Cavendish.**

Et maintenant, il s'agit de mesurer  $G$ , constante de gravitation universelle, ce qui est difficile car elle est très faible.

La première mesure a été tentée par CAVENDISH en 1798<sup>47</sup>. Il a utilisé un fil de torsion, c'est à dire un fil qui exerce sur ses extrémités un moment dynamique  $\mathcal{M}$  proportionnel à l'angle  $\alpha$  dont on l'a tordu (on note  $\mathcal{M} = -C \alpha$ ). Ce fil accroché en un point fixe supporte en son milieu une tige horizontale très légère de longueur  $2\ell = 20 \text{ cm}$  qui supporte elle-même en ses extrémités deux masses sphériques  $m = 50 \text{ g}$  devant lesquelles on place deux énormes masses sphériques  $M = 30 \text{ kg}$  au plus près, la distance entre centres étant notée  $d = 15 \text{ cm}$ .

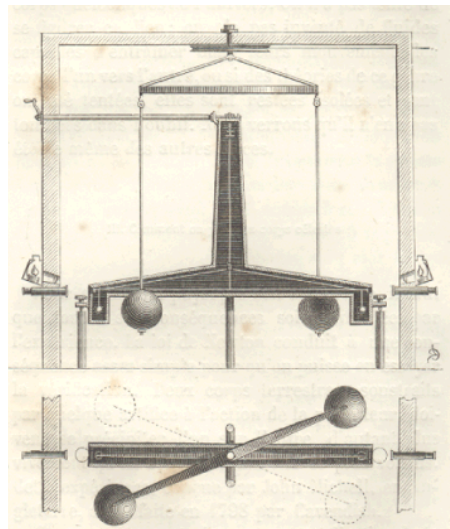


FIGURE 21 – La balance de Cavendish.

Comme le montre le document 21 p. 42, pour éviter toutes les forces parasites (le moindre courant d'air suffit à fausser la mesure) ; le fil et les petites masses sont enfermées

46. en négligeant le terme d'inertie d'entraînement, cf chapitre B-III.

47. soit un peu plus d'un siècle après l'énoncé de la loi de gravitation par Newton.

dans une petite boîte, elle-même enfermée avec les grosses masses dans une seconde boîte. Les mesures sont prises à travers la boîte extérieure grâce à une lunette, visible sur le document en deux exemplaires.

Chaque grosse masse exerce sur la petite masse en vis-à-vis une force  $F = \frac{GMm}{d^2}$  (de l'ordre de 3 milliardièmes de Newton) de moment par rapport au point d'accrochage du fil sur la tige  $F \ell$ . Il y a deux paires grosse masse-petite masse donc l'équilibre de la tige s'écrit :

$$2 \frac{GMm}{d^2} \ell - C \alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{2GMm\ell}{Cd^2}$$

Pour que  $\alpha$  soit assez grand pour être mesurable, le résultat ci-dessus montre que  $C$ , constante de rappel du fil, doit être la plus petite possible. Pour un matériau donné,  $C$  est proportionnel à la puissance 4 de son rayon et inversement proportionnel à sa longueur ; on prend donc un fil long (80 cm) et très fin (diamètre de 1/20ème de millimètre, soit à peine supérieur à la limite de rupture sous le poids de la tige et des petites masses) ce qui donne une constante  $C$  de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-7}$  Newton.mètre par radian et un angle  $\alpha$  de l'ordre du millième de radian (environ 2 minutes d'angle) à l'équilibre.

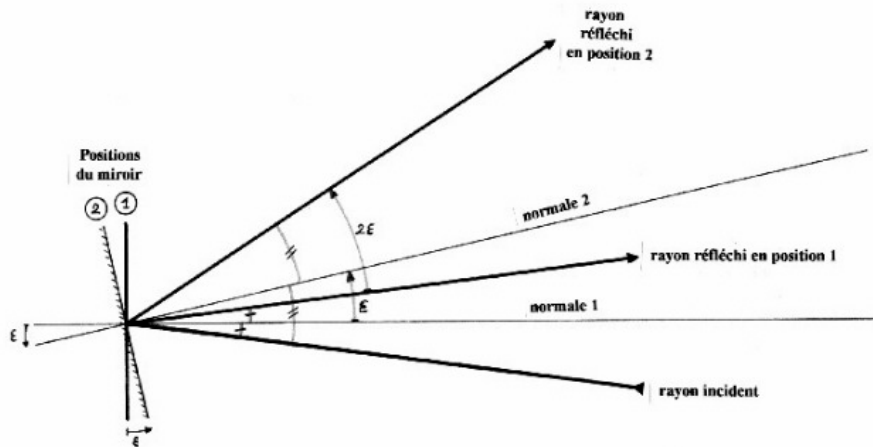


FIGURE 22 – Le miroir de Poggendorff.

Pour en déduire  $G$  par :

$$G = \frac{Cd^2\alpha}{2Mm\ell}$$

la mesure des masses et des longueurs ne pose pas de problème, la mesure de  $C$  se réalise à partir de la période des oscillations (en rotation) de la tige en l'absence des grosses masses et la mesure des angles par la méthode de POGGENDORFF illustrée par la figure 22 p. 43.

Un miroir solidaire de l'ensemble suspendu reçoit et renvoie un mince faisceau de lumière parallèle ; si le miroir tourne d'un angle  $\alpha$ , le rayon réfléchi tourne d'un angle double (cf figure). On place un écran à une distance  $D$  et orthogonal au faisceau réfléchi. La tache lumineuse se déplace alors sur l'écran d'une longueur  $D \tan(2\alpha) \approx 2D\alpha$ . Avec  $D$  égal à 5 mètres, le déplacement est de l'ordre d'un centimètre. En fait on double la précision en réitérant l'expérience en plaçant les grosses masses de l'autre côté pour obtenir la même rotation mais dans l'autre sens et c'est la distance des taches lumineuses des deux expériences que l'on mesure. C'est sportif, mais on y arrive.

On est allé ici à l'essentiel et l'on a passé sous silence les complications expérimentales et théoriques, la plus importante étant l'action des grosses masses sur les petites qui ne leur font pas face.

## 5 Exemples simples de perturbation d'orbites.

Je ne parlerai pas ici, par exemple, de la perturbation par Jupiter de l'orbite terrestre, parce qu'il a été prouvé que, bien que la méthode de calcul traditionnelle donne à court terme de bons résultats, elle repose sur le calcul des premiers termes d'une série dont on n'arrive pas à prouver la convergence, ce qui, avouons-le, fait désordre.

Je parlerai plutôt de l'influence de la non-sphéricité de la Terre sur la trajectoire d'un satellite artificiel.

### 5.a Champ de gravitation créé par la Terre aplatie aux pôles.

Considérons d'abord un ensemble de masses  $m_i$  situées en des points  $A_i$ , chacune crée en un point un champ en  $-\vec{u}/r^2$  correspondant à un potentiel en  $-1/r$  où  $r$  et  $\vec{u}$  sont le module et le vecteur directeur de  $\overrightarrow{A_i M}$  ; comme il est plus facile d'additionner des scalaires, calculons le potentiel total, son opposé en pratique pour une meilleure lisibilité des calculs :

$$-V(M) = \sum_i \frac{G m_i}{\|\overrightarrow{A_i M}\|} = \sum_i \frac{G m_i}{r_i}$$

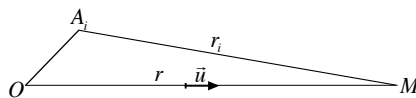


FIGURE 23 – Contribution d'une masse.

Prenons comme origine  $O$  barycentre des masses (donc  $\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$ ) et supposons le point  $M$  assez loin pour que  $r = \|\overrightarrow{OM}\| \gg \|\overrightarrow{OA_i}\|$  pour toutes les masses.

Observons la figure 23 p. 44, où  $r$  et  $\vec{u}$  sont relatifs à  $\overrightarrow{OM}$ , on a :

$$r_i^2 = \overline{A_i M}^2 = (\overline{OM} - \overline{OA_i})^2 = (r \vec{u} - \overline{OA_i})^2$$

$$r_i^2 = r^2 - 2r \vec{u} \cdot \overline{OA_i} + r_i^2 = r^2 \left( 1 - 2 \frac{\vec{u}}{r} \cdot \overline{OA_i} + \frac{r_i^2}{r^2} \right)$$

d'où :

$$\frac{1}{r_i} = (r_i^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{\vec{u}}{r} \cdot \overline{OA_i} + \frac{r_i^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Effectuons un développement limité à l'ordre <sup>48</sup> 2 (la suite expliquera pourquoi) :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( -2 \frac{\vec{u}}{r} \cdot \overline{OA_i} + \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left( -2 \frac{\vec{u}}{r} \cdot \overline{OA_i} + \frac{r_i^2}{r^2} \right)^2 \right]$$

soit en se limitant aux termes d'ordre 2 au plus :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot \overline{OA_i} - \frac{1}{2} \frac{r_i^2}{r^3} + \frac{3}{2r} \left( \frac{\vec{u}}{r} \cdot \overline{OA_i} \right)^2$$

Multiplions par  $G m_i$  et sommons :

$$\sum_i \frac{G m_i}{r_i} = \frac{G}{r} \sum_i m_i + \frac{G \vec{u}}{r^2} \cdot \sum_i m_i \overline{OA_i} - \frac{G}{2} \sum_i m_i \frac{r_i^2}{r^3} + \frac{3G}{2r} \sum_i m_i \left( \frac{\vec{u}}{r} \cdot \overline{OA_i} \right)^2$$

$\sum_i m_i$  est la masse totale, notons-la  $M_{\text{tot}}$ , par définition du barycentre  $\sum_i m_i \overline{OA_i} = \vec{0}$  (le terme d'ordre 1 disparaît, c'est pourquoi l'on a développé à l'ordre 2), pour les autres termes posons  $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z$  et  $\overline{OA_i} = x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y + z_i \vec{e}_z$ , on a donc :

$$-V(M_{\text{tot.}}) = \sum_i \frac{G m_i}{r_i} = \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3G}{2r^3} \sum_i m_i \left[ ((u_x x_i + u_y y_i + u_z z_i)^2 - \frac{1}{3} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)) \right]$$

que l'on peut réécrire ainsi, puisque  $\vec{u}$  est unitaire :

$$-V(M_{\text{tot.}}) = \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3G}{2r^3} \sum_i m_i \left[ ((u_x x_i + u_y y_i + u_z z_i)^2 - \frac{1}{3} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)) \right]$$

Le terme en  $1/r^3$  peut être écrit sous forme d'une forme quadratique :

---

48. Rappel  $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots$ , même avec  $n$  fractionnaire et/ou négatif.

$$-V(M_{\text{tot.}}) = \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3G}{2r^3} \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

avec :

$$I_{11} = \sum_i m_i \left( \frac{2}{3} x_i^2 - \frac{1}{3} y_i^2 - \frac{1}{3} z_i^2 \right)$$

$$I_{22} = \sum_i m_i \left( \frac{2}{3} y_i^2 - \frac{1}{3} x_i^2 - \frac{1}{3} z_i^2 \right)$$

$$I_{33} = \sum_i m_i \left( \frac{2}{3} z_i^2 - \frac{1}{3} x_i^2 - \frac{1}{3} y_i^2 \right)$$

$$I_{12} = I_{21} = \sum_i m_i x_i y_i$$

$$I_{13} = I_{31} = \sum_i m_i x_i z_i$$

$$I_{23} = I_{32} = \sum_i m_i y_i z_i$$

dont la matrice est cousine de la matrice d'inertie définie dans la mécanique du solide.

Nos amis mathématiciens démontrent que la matrice symétrique d'une forme quadratique est diagonalisable dans une base orthonormée. Nous nous placerons dans cette base pour simplifier la relation précédente, avec les mêmes définitions (dans cette nouvelle base) pour les termes diagonaux de la matrice :

$$-V(M_{\text{tot.}}) = \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3G}{2r^3} \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$-V(M_{\text{tot.}}) = \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3G}{2r^3} (I_{11} u_x^2 + I_{22} u_y^2 + I_{33} u_z^2)$$

Si la répartition des masses a une symétrie de révolution autour d'un axe choisi comme axe  $Oz$ , on peut retrouver ce résultat sans faire appel à un ami mathématicien ; il suffit de couper la répartition en quatre par les plans  $Oxz$  et  $Oyz$  et à chaque point  $M(x, y, z)$  du quart défini par  $x > 0$  et  $y > 0$ , associer les quatre points de coordonnées  $(x, y, z)$ ,  $(-x, y, z)$ ,  $(x, -y, z)$  et  $(-x, -y, z)$ . On vérifie aisément que la somme sur ces quatre points des produits  $x_i y_i$ ,  $x_i z_i$ ,  $y_i z_i$  est nulle, résultat qui se reporte à l'ensemble de la répartition. De plus, les axes  $Ox$  et  $Oz$  étant équivalents par la symétrie,  $I_{11}$  et  $I_{22}$  sont donc égaux, on notera  $I_{11} = I_{22} = I$  et  $I_{33} = J$ . d'où :

$$-V(M_{\text{tot.}}) = \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3G}{2r^3} (I u_x^2 + I u_y^2 + J u_z^2)$$

Si l'on utilise les coordonnées polaires,  $\vec{u}$  vecteur unitaire de  $\overrightarrow{OM}$  s'identifie au vecteur unitaire radial donc on connaît les coordonnées :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ -V(M_{\text{tot.}}) &= \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3G}{2r^3} (I \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + I \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + J \cos^2 \theta) \\ -V(M_{\text{tot.}}) &= \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3G}{2r^3} (I \sin^2 \theta + J \cos^2 \theta) \\ -V(M_{\text{tot.}}) &= \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3G}{2r^3} [I + (J - I) \cos^2 \theta] \\ -V(M_{\text{tot.}}) &= \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3GI}{2r^3} \left[ 1 - \left( \frac{I - J}{I} \right) \cos^2 \theta \right] \\ -V(M_{\text{tot.}}) &= \frac{G M_{\text{tot.}}}{r} + \frac{3GI}{2r^3} [1 - \varepsilon \cos^2 \theta] \end{aligned}$$

où  $\varepsilon = \frac{I-J}{I}$ . En bonne approximation, la Terre a une symétrie de révolution et comme elle n'est que très aplatie  $J \approx I$  et donc  $|\varepsilon| \ll 1$ . Comme la Terre est aplatie aux pôles, sur l'axe  $Oz$  de symétrie, les  $z_i$  prennent des valeurs extrêmes légèrement plus petites que celles des  $x_i$  et des  $y_i$ ; on en déduit, au vu de leurs définitions, que  $J < I$  et donc que  $\varepsilon$  est positif. En négligeant le terme centrifuge (voir chapitre précédent), le champ de pesanteur est l'opposé du gradient de ce potentiel, donc ses trois coordonnées sphériques sont :

$$\begin{aligned} g_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{G M_{\text{tot.}}}{r^2} - \frac{9GI}{2r^4} [1 - \varepsilon \cos^2 \theta] \\ g_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{3GI}{r^4} \varepsilon \cos \theta \sin \theta \\ g_\varphi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}$$

Ce champ ne correspond plus à une force centrale, à cause du terme  $g_\theta$  dont on se convainc<sup>49</sup> aisément (en étudiant le signe de  $\sin \theta$  dans les deux hémisphères) qu'il est toujours dirigé vers  $Oxy$ , c'est-à-dire le bourrelet équatorial, ce qui est normal puisque c'est là qu'est le « surpoids ». Il n'est plus non plus en  $1/r^2$ . Ceci va avoir deux effets sur une trajectoire qui restera toutefois proche de l'ellipse contenue dans un plan (car les termes correctifs sont petits) : la *précession*, c'est-à-dire la rotation de la direction du grand axe dans le plan de l'ellipse et la *précession* du plan de l'orbite qu'il sera plus aisé de matérialiser par la précession de sa normale. On n'étudiera ci-après que deux situations où un seul de ces effets se fait sentir, l'un quantitativement, l'autre qualitativement.

49. Ça surprend toujours mais ça s'écrit bien comme ça.

## 5.b Précession du périhélie.

On n'étudie ici que le cas simple où le mouvement a lieu dans le plan  $Oxy$  caractérisé par  $\theta = 0$ , la composante  $g_\theta$  s'annule et tout se passe comme si le satellite était soumis à une force centrale<sup>50</sup> que l'on écrira désormais, pour alléger l'écriture :

$$F = m g_r = -\frac{GMm}{r^2} - \frac{k}{r^4}$$

Reprenons la méthode utilisée pour mettre en évidence l'invariant de LAGRANGE-RUNGE-LENZ, car il est orthogonal au grand-axe et c'est donc un bon candidat pour suivre la précession de l'orbite :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r - \frac{mk}{r^4} \vec{e}_r = \frac{GMm}{r^2} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} + \frac{mk}{r^4} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{GMm}{r^2 \dot{\theta}} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{mk}{r^4 \dot{\theta}} \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{GMm}{C} \frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt} + \frac{mk}{Cr^2} \frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( m \vec{v} - \frac{K}{C} \vec{e}_\theta \right) = \frac{mk}{Cr^2} \frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt} \\ d\vec{L} &= \frac{d}{dt} \left( m \vec{v} - \frac{K}{C} \vec{e}_\theta \right) = \frac{mk}{Cr^2} d\vec{e}_\theta(t) \end{aligned}$$

La perturbation étant faible, après un tour, on est presque revenu au même point et l'on présentera le mouvement comme un mouvement elliptique dont les axes tournent lentement. Comparons donc deux instants séparés par une période du mouvement elliptique,  $\theta$  variant par exemple (cela facilitera les calculs) de  $-\pi$  à  $\pi$  ;  $\vec{L}$  varie de :

$$\Delta \vec{L} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{mk}{Cr^2} d\vec{e}_\theta(t)$$

Reportons-y  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta)$  (car dans un terme correctif d'ordre 1 au sens des développements limités, on peut se contenter de reporter le mouvement non perturbé, d'ordre 0, puisque le report d'un terme d'ordre 1 dans un terme d'ordre 1 donne un terme d'ordre 2) et évitons le piège classique en projetant  $\vec{e}_\theta$  (qui n'est pas une constante, c'est le piège en question) sur la base cartésienne :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{L} &= \frac{mk}{Cp^2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e \cos \theta)^2 d[-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y] \\ \Delta \vec{L} &= -\frac{mk}{Cp^2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta) (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) d\theta \end{aligned}$$

---

50. la loi des aires est donc valable ; on peut donc introduire la constante des aires  $C$ .

Or

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 \theta \, d\theta = 0$$

$$\text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \pi$$

d'où :

$$\Delta \vec{L} = -\frac{2\pi m k e}{C p^2} \vec{e}_x$$

La relecture de l'étude de l'invariant de LAGRANGE-RUNGE-LENZ nous donne par ailleurs :

$$\vec{L} = \frac{e G M m}{C} \vec{e}_y$$

On constate que  $\vec{L}$  et  $\Delta \vec{L}$  sont orthogonaux ; en assimilant variation et différentielle :

$$\Delta \|\vec{L}\|^2 = \Delta \vec{L}^2 = 2 \vec{L} \Delta \vec{L} = 0$$

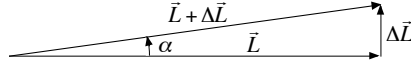


FIGURE 24 – Précession du périhélie.

Le module de  $\vec{L}$  ne varie pas, or on vient de voir qu'il est proportionnel à l'excentricité ; celle-ci ne change pas, l'orbite tourne mais ne se déforme pas. Comme le montre la figure 24 p. 49, en une période du mouvement elliptique,  $\vec{L}$ , donc l'ellipse, tourne d'un angle  $\alpha$  tel que :

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\|\Delta \vec{L}\|}{\|\vec{L}\|} = \frac{2\pi k}{G M p^2}$$

Le mouvement de précession est donc d'autant plus marqué que  $p$  est plus petit ; pour le système solaire, la précession de Mercure<sup>51</sup> est la plus importante. Cela dit, ce n'est pas une surprise ; plus on est loin, plus le terme correctif en  $1/r^4$  est négligeable devant celui en  $1/r^2$  !

---

<sup>51</sup>. Sa valeur observée n'est pas celle obtenue par ce calcul ; c'est une des vérifications, certes délicate, de la théorie de la relativité généralisée, due à EINSTEIN, qui est une théorie de la gravitation.

### 5.c Précession du plan de l'orbite.

Considérons cette fois une orbite qui ne soit pas dans le plan équatorial pour que la composante non centrale de la gravitation exerce son action, mais prenons la circulaire pour simplifier au maximum. Donc, on part d'une orbite circulaire de centre  $O$ , centre de la Terre, de rayon  $R$ , dont le plan coupe le plan équatorial  $Oxy$  selon  $Ox$  et dont la normale, parallèle au moment cinétique  $\vec{\sigma}$ , fait avec l'axe des pôles  $Oz$  un angle  $i$ . Plutôt qu'une figure en perspective, qui serait un peu confuse, la figure 25 p. 50 montre à gauche l'orbite, vue par la tranche, en projection sur  $Oyz$  et à droite en projection sur  $Oxy$ .

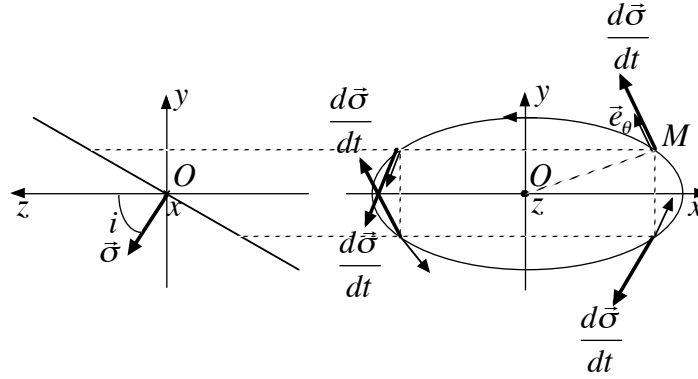


FIGURE 25 – Précession du plan orbital.

Le théorème du moment cinétique donne, lorsque le satellite est en un point  $M$  et en utilisant les coordonnées polaires (avec  $r = R$  ici) et la base locale de ce point, sans oublier que  $g_\varphi$  est nul :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = R \vec{e}_r \wedge (m g_r \vec{e}_r + m g_\theta \vec{e}_\theta) = R \vec{e}_r \wedge m g_\theta \vec{e}_\theta = m R g_\theta \vec{e}_\varphi$$

avec  $g_\theta = \frac{3GI}{R^4} \varepsilon \cos \theta \sin \theta$  qu'on note pour alléger  $\frac{\kappa}{R^4} \cos \theta \sin \theta$ , d'où :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \frac{m \kappa}{R^3} \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

et la variation sur un tour correspondant à un période  $T$  sera :

$$\Delta \vec{\sigma} = \frac{m \kappa}{R^3} \int_0^T \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

où l'on pourra comme dans le cas précédent remplacer dans l'intégrale le vrai mouvement par le mouvement circulaire non perturbé ; mais les calculs sont assez lourds. La piste à suivre est :

- paramétrer le point  $M$  par l'angle  $\omega t = \frac{2\pi}{T} t$  entre  $Ox$  et  $OM$  dans une base cartésienne constituée de  $Ox$ , sa normale dans le plan de l'orbite et la normale à ce plan.
- en déduire en fonction de  $t$ , les coordonnées  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  par un classique changement de base faisant intervenir l'angle  $i$
- en déduire en fonction de  $t$ , les coordonnées sphériques  $\theta(t)$  et  $\varphi(t)$  (car  $\vec{e}_\varphi$  en dépend) puis le vecteur  $\vec{e}_\varphi(t)$  en projection sur la base fixe  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$
- intégrer

Nous nous contenterons ici d'une approche qualitative basée sur une observation graphique. Nous grouperons les points de la trajectoire par quatre en utilisant les symétries, l'un ayant les coordonnées  $(x, y, z)$  les trois autres, comme le montre la figure,  $(-x, y, z)$ ,  $(-x, -y, -z)$  et  $(x, -y, -z)$ .

Sur la partie droite de la figure, on a dessiné les vecteurs  $\vec{e}_\varphi$  qui sont orthogonaux aux plans méridiens contenant  $Oz$  et les points  $M$  considérés, orthogonalité que l'on retrouve en projection sur  $Oxy$ , et orientés dans le sens trigonométrique.

Sur la partie gauche de la figure, pour les deux premiers points  $\theta = \frac{\pi}{2} - i < \frac{\pi}{2}$  donc  $\cos \theta \sin \theta$  est positif et pour les deux derniers points  $\theta = \frac{\pi}{2} + i > \frac{\pi}{2}$  donc  $\cos \theta \sin \theta$  est négatif.

Ce qui a permis de dessiner sur la partie droite, les quatre vecteurs  $\frac{d\vec{\sigma}}{dt}$ , qui par symétrie ont même module et dont les directions sont symétriques par rapport à  $Ox$  et  $Oy$ . On y voit clairement que pour un même  $dt$  les quatre contributions à  $\int_0^T d\vec{\sigma}$  ont une somme parallèle à  $Ox$  et donc qu'il en est de même pour l'intégrale entière qui est la variation  $\Delta \vec{\sigma}$  du moment cinétique pour un tour.

La partie gauche montre que  $\vec{\sigma}$  est dans le plan  $Oyz$  donc perpendiculaire à  $\Delta \vec{\sigma}$ ; en assimilant variation et différentielle, comme dans le paragraphe précédent :

$$\Delta \|\vec{\sigma}\|^2 = \Delta \vec{\sigma}^2 = 2 \vec{\sigma} \Delta \vec{\sigma} = 0$$

Le module de  $\vec{\sigma}$  ne varie donc pas. De même, pour la projection de  $\vec{\sigma}$  sur  $Oz$ , sachant que  $\vec{e}_z$  est un vecteur constant :

$$\Delta \sigma_z = \Delta(\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_z) = \Delta \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_z = 0$$

La projection sur  $Oz$  est constante; c'est  $\|\vec{\sigma}\| \cos i$  avec  $\|\vec{\sigma}\|$  constant donc  $\cos i$  est constant et  $i$  l'est aussi.  $\vec{\sigma}$  tourne donc autour de  $Oz$  en conservant un angle constant, comme l'axe d'une toupie tournant autour de la verticale.

La calcul de l'angle dont le plan orbital a tourné est un peu piégeant; par rapport au paragraphe précédent, on est dans l'espace et non dans le plan. La figure 26 p. 52 montre que l'angle  $\alpha$  dont  $\vec{\sigma}$  et donc le plan orbital a tourné en une période  $T$  de révolution est,

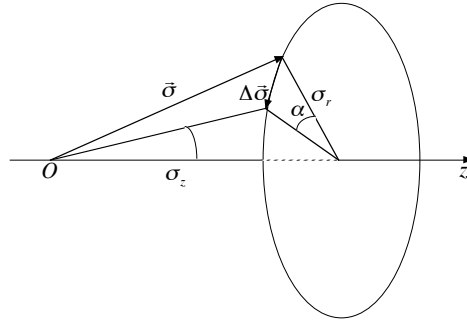


FIGURE 26 – Vitesse de précession.

en introduisant la composante radiale  $\sigma_r$  de  $\vec{\sigma}$  :

$$\alpha = \frac{\|\Delta \vec{\sigma}\|}{\sigma_r} = \frac{\|\Delta \vec{\sigma}\|}{\|\vec{\sigma}\| \sin i}$$

Faute d'avoir calculé  $\Delta \vec{\sigma}$ , nous n'irons pas plus loin, sauf à dire que la vitesse angulaire de précession  $\frac{\alpha}{T}$  va dépendre des deux paramètres, le rayon  $R$  (auquel  $T$  est lié par la troisième loi de KEPLER) et l'angle  $i$ , ce qui permet de fixer deux contraintes à l'orbite.

Il est intéressant d'imposer que la vitesse angulaire de précession soit égale à la vitesse angulaire sidérale de rotation de la Terre ; le satellite survole ainsi systématiquement les mêmes points. On peut ainsi imposer à un satellite de passer toutes les heures (seconde contrainte) au dessus de la France et de faire des mesures et photographies météorologiques ; et l'on ne s'en prive pas.